

ANA SOFIA RODRIGUES RÉZIO

**Desenvolvimento do Pensamento Algébrico
Concepções de Professores e Manuais Escolares**

Orientadora: Glória Ramalho

Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Lisboa

2013

ANA SOFIA RODRIGUES RÉZIO

Desenvolvimento do Pensamento Algébrico
Concepções de Professores e Manuais Escolares

Tese apresentada para obtenção do Grau de Doutor em Educação no Curso de Doutoramento em Educação, conferido pela Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Orientadora: Professora Doutora Glória Ramalho

Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Instituto de Ciências da Educação

Lisboa

2013



In http://crescercomateresa.blogspot.pt/2009_09_01_archive.html

(...) a introdução do Pensamento Algébrico nos primeiros anos de escolaridade representa um passo em frente muito significativo pela possibilidade que inspira de uma abordagem à Matemática mais integrada e interessante (...)

Canavarro

Aos meus valiosos filhos Miguel e Beatriz, que tanto gostam de Matemática!
Aos meus pais, que de formas diferentes e complementares têm sido sempre um amparo.
Ao João, por ser um companheiro fantástico e sempre presente!
Ao João e ao Pedro, pela partilha.

AGRADECIMENTOS

Este é o momento de agradecer a todos os que iluminaram o meu caminho, tornando possível a concretização deste trabalho de investigação.

À Professora Doutora Glória Ramalho, a quem só tenho a agradecer a disponibilidade, afabilidade, organização, objectividade, rigor científico e sistematização do trabalho investigativo. Foi uma sorte imensa a oportunidade de trabalharmos juntas!

À Professora Doutora Rosa Serradas, pelo acompanhamento inicial da minha investigação.

Aos professores da parte curricular deste curso de doutoramento, pelos ensinamentos e partilha de conhecimentos.

À D. Lurdes e D. Anabela, do secretariado do Instituto de Educação, pela simpatia e rapidez com que sempre conduziram os assuntos.

À Andreia, responsável pela Biblioteca do Instituto Superior de Ciências Educativas, pela simpatia e eficiente ajuda na procura de referências bibliográficas.

Aos Directores de Agrupamentos de Escolas, Coordenadores e especialmente aos Professores que estiveram disponíveis para colaborar no estudo empírico deste trabalho, em particular à professora Margarida.

À Teresa, pelas conversas esclarecedoras sobre a escolha do tema de investigação.

À minha mãe, pela preciosa ajuda na revisão de textos, tanto no percurso curricular do curso de doutoramento como na revisão da minha tese.

À minha irmã, pelo apoio emocional em todos os momentos que não foram fáceis.

Ao meu irmão, pela ajuda informática durante a escrita do trabalho.

A muitas das minhas alunas, com quem tive o privilégio de trabalhar, pela ajuda, força e reconhecimento.

A Deus, pelo amparo e protecção.

E finalmente a todos os que não são aqui referidos mas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Sozinha não teria sido possível!

RESUMO

Este trabalho começa com observações de natureza teórica, focando-se no conceito de Pensamento Algébrico. Sob esse pano de fundo discute-se a pertinência da inclusão deste tipo de pensamento no novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Analisam-se diferenças e semelhanças entre o currículo nacional, descrito em relação ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico e as normas publicadas pelo National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. Identificam-se características específicas de actividades de sala de aula que as nutrem de potencial algébrico.

Procurando encontrar respostas adequadas sobre como os professores do 1º Ciclo concebem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos seus alunos e como os Manuais Escolares de Matemática destes níveis de escolaridade promovem esse tipo de pensamento, entrevistam-se professores, analisam-se e avaliam-se manuais.

A concepção que os professores do 1ºCiclo entrevistados têm de Pensamento Algébrico dos alunos, nos primeiros anos de escolaridade revelou-se próxima de algumas habilidades implicadas nesse tipo de pensamento mas longínqua de outras.

Quanto aos manuais analisados, tomando como principal referência o Programa Nacional de Matemática, concluiu-se que cobrem de forma geral os itens por este estabelecidos. Foram ainda comparados os manuais com as metas estruturais do Pensamento Algébrico que se devem esperar em Manuais de Matemática do 1ºCiclo, definidas por Lew, investigador coreano, tendo-se confirmado a promoção de algumas habilidades que caracterizam este tipo de pensamento, nomeadamente a abstracção, o desenvolvimento do pensamento analítico e a modelação.

Palavras-Chave: Álgebra Inicial; Pensamento Algébrico; Concepções de Professores; Manuais Escolares; Currículo do 1ºCiclo.

ABSTRACT

This work begins with observations of theoretical nature, focusing on the concept of Algebraic Thinking. Under this background, we discuss the relevance of including this type of thinking in the new Mathematics Program for Basic Education. We analyze the differences and similarities between the national curriculum in relation to the development of Algebraic Thinking and the standards published by the National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. Specific features of classroom activities that nurture the potential Algebraic Thinking are identified.

Teachers were interviewed and textbooks were analyzed and evaluated while looking for answers with respect to the concepts teachers of the Elementary school have about Algebraic Thinking and its development among their students, as well as how mathematics textbooks promote this thinking,

Evidence shows that the teachers of the Elementary School that were interviewed have some concepts close to the literature taken as reference but distant with respect to some others.

As for the textbooks that were analyzed, taking as benchmark the National Mathematics Program, we concluded that generally they cover the items that were established. We also compared the textbooks with the goals of Algebraic Thinking that are to be expected in Mathematics textbooks for elementary school, defined by Lew, a researcher from Korea. This led to the confirmation of the presence of some abilities that characterize this type of thinking, namely abstraction, development of analytical thinking and modeling.

Key-Words: Initial Algebra, Algebraic Thinking; Conceptions of Teachers, textbooks; Elementary School Curriculum.

LISTA DE ABREVIATURAS

ABREVIATURA	SIGNIFICADO
AAAS	American Association for the Advancement of Science Achievement in Mathematics and Science
APM	Associação de Professores de Matemática
CBMS	Conference Board of the Mathematical Sciences
CRUP	Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas
DEEBS	Divisão de Estatísticas do Ensino Básico e Secundário
DGEBS	Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário
DGEEC	Direcção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência
DGIDC	Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular
DSEE	Direcção de Serviços de Estatísticas da Educação
EIEM	Encontro de Investigação em Educação Matemática
GAVE	Gabinete de Avaliação Educacional
IES	Institutos de Ensino Superior
INAFOP	Instituto Nacional de Acreditação da Formação de Professores
ME	Ministério da Educação
NAEYC	National Association for the Education of Young Children
NMSU	New Mexico State University
NCISLA	National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
NMSU	New Mexic State University
PFCM	Plano de Formação Contínua de Matemática
PME	Group for the Psychology of Mathematics Education
GSP	The Geometer's Sketchpad

ÍNDICE GERAL

INTRODUÇÃO	15
1. DESENVOLVIMENTO E APRENDIZAGEM	26
2. ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO	42
3. DA ARITMÉTICA AO PENSAMENTO ALGÉBRICO	50
3.1. ESTRUTURA ALGÉBRICA DA ARITMÉTICA	50
3.1.1. DO PENSAMENTO ARITMÉTICO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO.....	50
3.1.2. ESTUDOS	58
3.2. PADRÕES, GENERALIZAÇÃO, MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO	61
4. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - O QUE SE PENSA HOJE, A NÍVEL INTERNACIONAL	69
4.1. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PERSPECTIVAS INTERNACIONAIS.....	69
4.2. DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO - ESTUDOS INTERNACIONAIS	81
5. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM PORTUGAL	84
5.1. ORIENTAÇÕES CURRICULARES E RESPECTIVA COMPARAÇÃO COM ORIENTAÇÕES CURRICULARES INTERNACIONAIS	84
5.1.1. VERTENTES FUNDAMENTAIS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	101
5.1.2. SENTIDO DO NÚMERO.....	105
5.1.3. SINAL DE IGUAL	110
5.1.4. PADRÕES.....	111
6. FORMAÇÃO DE PROFESSORES E MANUAIS ESCOLARES.....	121
6.1. O PENSAMENTO ALGÉBRICO NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO – PERSPECTIVAS INTERNACIONAIS E NACIONAIS.....	121
6.2. O MANUAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA.....	137
6.2.1. ENQUADRAMENTO LEGAL EM PORTUGAL.....	137

6.2.2. O MANUAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA NA PRÁTICA DOCENTE DOS PROFESSORES.....	143
6.2.3. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA.....	145
6.2.3.1. A NÍVEL NACIONAL	145
6.2.3.2. A NÍVEL INTERNACIONAL	148
6.2.3.3. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO.....	152
6.2.3.4. CONSTRUÇÃO DE UM QUADRO DE HABILIDADES QUE CARACTERIZAM O PENSAMENTO ALGÉBRICO, QUE SE ESPERA VER PROMOVIDAS NOS MANUAIS ESCOLARES DE MATEMÁTICA	156
7. PROBLEMÁTICA E METODO.....	169
7.1. PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO	169
7.2. QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO.....	171
7.3. ESTUDO 1.....	172
7.3.1. PARTICIPANTES	172
7.3.2. A ENTREVISTA.....	174
7.3.3. PROCEDIMENTOS	179
7.3.4. TRATAMENTO DE DADOS.....	179
7.4. ESTUDO 2.....	180
7.4.1. OS MANUAIS ESCOLARES.....	180
7.4.2. CONSTRUÇÃO DE UM INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO	181
7.4.3. TRATAMENTO DE DADOS.....	186
8. RESULTADOS	187
8.1. A ENTREVISTA.....	187
8.2. OS MANUAIS	220
DISCUSSÃO E CONCLUSÕES.....	236
DO ESTUDO 1	236
DO ESTUDO 2	242

BIBLIOGRAFIA	249
APÊNDICES	i
ANEXOS	xlix

ÍNDICE DE QUADROS

QUADRO 1. OS ESTÁDIOS DE DESENVOLVIMENTO COGNITIVO DE PIAGET	28
QUADRO 2. QUADRO QUE RELACIONA O Nº DE CAIXAS DE BOLACHAS COM O PREÇO TOTAL A PAGAR	46
QUADRO 3. FOCO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, SEGUNDO VÁRIOS AUTORES	48
QUADRO 4. SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENTRE NÚMEROS, NUM CONTEXTO ARITMÉTICO, E SÍMBOLOS LITERAIS, NUM CONTEXTO ALGÉBRICO	54
QUADRO 5. FOCO DA EVOLUÇÃO DO RACIOCÍNIO ARITMÉTICO PARA O ALGÉBRICO	57
QUADRO 6. ÁLGEBRA - NORMAS PARA OS ANOS PRÉ-2ºANO (NCTM, Princípios e Normas para a Matemática Escolar, 2008)	79
QUADRO 7. ÁLGEBRA - NORMAS PARA OS 3º- 5ºANOS (NCTM, Princípios e Normas para a Matemática Escolar, 2008)	80
QUADRO 8. RELAÇÃO DO PROGRAMA NACIONAL DE MATEMÁTICA DO 1º E 2º ANOS DO 1º CICLO COM O DE OUTROS PAÍSES.....	87
QUADRO 9. RELAÇÃO DO PROGRAMA NACIONAL DE MATEMÁTICA DO 3º E 4º ANOS DO 1º CICLO COM O DE OUTROS PAÍSES.....	91
QUADRO 10. RELAÇÃO METAS DE APRENDIZAGEM DA.....	98
QUADRO 11. VERTENTES FUNDAMENTAIS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO.....	103
QUADRO 12. ASPECTOS CHAVE NO DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE NÚMERO..	106
QUADRO 13. METAS ESTRUTURAIS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, A ESTAREM PRESENTES NOS MANUAIS DE MATEMÁTICA DO 1º CICLO	155
QUADRO 14. HABILIDADES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO ESPERADOS EM CRIANÇAS DO 1º E 2º ANOS	158
QUADRO 15. HABILIDADES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO ESPERADOS EM CRIANÇAS DO 3º E 4º ANOS	163
QUADRO 16. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA, DO 1º E 2ºANO, QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DOS ALUNOS.....	182
QUADRO 17. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA, DO 3º E 4ºANO, QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DOS ALUNOS.....	184
QUADRO 18. QUESTÃO 1.1.	187
QUADRO 19. QUESTÃO 1.2.	188
QUADRO 20. QUESTÃO 2.1.	189
QUADRO 21. QUESTÃO 3.1.	189
QUADRO 22. QUESTÃO 3.2.	190
QUADRO 23. QUESTÃO 4.....	192
QUADRO 24. QUESTÃO 5.1.	194
QUADRO 25. QUESTÃO 5.2.	195

QUADRO 26. QUESTÃO 5.3	196
QUADRO 27. QUESTÃO 6.1	197
QUADRO 28. QUESTÃO 6.2	198
QUADRO 29. QUESTÃO 6.3	199
QUADRO 30. QUESTÃO 6.5	201
QUADRO 31. QUESTÃO 6.6	203
QUADRO 32. QUESTÃO 6.8	204
QUADRO 33. QUESTÃO 7.1	205
QUADRO 34. QUESTÃO 7.2	207
QUADRO 35. QUESTÃO 8.1	208
QUADRO 36. QUESTÃO 8.2	209
QUADRO 37. QUESTÃO 8.3	209
QUADRO 38. QUESTÃO 8.4	210
QUADRO 39. QUESTÃO 8.5	211
QUADRO 40. QUESTÃO 8.6	212
QUADRO 41. QUESTÃO 8.7	212
QUADRO 42. QUESTÃO 9	213
QUADRO 43. QUESTÃO 10	214
QUADRO 44. BREVE REFERÊNCIA À EXPRESSÃO ORAL DOS DOCENTES ENTREVISTADOS	219
QUADRO 45. ESCALA DE CLASSIFICAÇÃO UTILIZADA NA ANÁLISE E AVALIAÇÃO DOS MANUAIS ESCOLARES SELECIONADOS	221
QUADRO 46. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA DO 1º E 2º ANOS «A GRANDE AVENTURA», QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DOS ALUNOS	223
QUADRO 47. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA, DO 3º E 4º ANOS «A GRANDE AVENTURA», QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DOS ALUNOS	229
QUADRO 48. COMPARAÇÃO ENTRE AS HABILIDADES COMUNS AOS QUATRO MANUAIS E AS METAS ESTRUTURAIS	244

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. DIFERENTES VISÕES DE INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA	52
FIGURA 2. EVOLUÇÃO DO SIGNIFICADO DO SINAL DE IGUAL DE ALGUNS ALUNOS DO 1º E 2º CICLOS.....	59
FIGURA 3. PADRÃO COM BLOCOS	62
FIGURA 4. REPRESENTAÇÃO DE PISCINAS COM E SEM BORDAS	64
FIGURA 5. COMPONENTES DE CONSTRUÇÃO DE UMA GENERALIZAÇÃO	65
FIGURA 6. CONJUNTO DE ACTIVIDADES QUE CONDUZEM OS ALUNOS A GENERALIZAÇÕES.....	66
FIGURA 7. PROPOSTA DE CURRÍCULO DA MATEMÁTICA PARA O PRÉ-ESCOLAR	76
FIGURA 8. PADRÃO DO PEDRO	111
FIGURA 9. PADRÃO DO JOÃO	112
FIGURA 10. REPRESENTAÇÃO DE UMA ALUNA NA SUA RESPOSTA À QUESTÃO1.....	117
FIGURA 11. ESTUTURA DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	120
FIGURA 12. DESCOBERTA DE SIMBOLOS NA MULTIPLIACÇÃO	154
FIGURA 13. ACTIVIDADE ILUSTRADA POR CRIANÇAS QUE GOSTAM DE LER.....	155
FIGURA 14. EVOLUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DOS PROFESSORES DO 1ºCICLO, SEGUNDO AS SUAS HABILITAÇÕES ACADÉMICAS (2000/2001-2010/2011)	173
FIGURA 15. CLASSIFICAÇÃO FINAL POR NÍVEIS, A NÍVEL NACIONAL,.....	215
FIGURA 16. RESULTADOS DA PROVA DE AFERIÇÃO DE MATEMÁTICA DO 1ºCICLO, 2011/2012, POR TEMAS E NÍVEIS (%), A NÍVEL NACIONAL	216

INTRODUÇÃO

A investigação sobre o Pensamento Algébrico de um aluno no início da sua escolaridade é um assunto que não data de muito tempo (Kieran, 2006), o que torna pertinente perceber se o estudo da Álgebra deve ser transversal a todos os anos de escolaridade. Esta área de interesse, especialmente para um grupo da comunidade científica denominado Group for the Psychology of Mathematics Education [PME], passou a designar-se por Álgebra Inicial adquirindo destacada importância em 2001. Tais factos despertaram o interesse em investigar como este assunto tem estado a ser concebido e abordado pelo currículo português.

Os principais tópicos abordados neste ramo da Matemática dizem respeito a pensar sobre igualdades numéricas, simbolizar relações entre quantidades, trabalhar com equações, desenvolver o pensamento funcional e promover e compreender propriedades matemáticas (Kieran, 2006). Neles, poderão estar presentes, de forma mais ou menos explícita, a promoção da abstracção e da generalização, e ainda uma outra grande ideia que alicerça o Pensamento Algébrico e que é a análise da mudança ou da variação, como adianta Cox (2003). Este investigador explica que as mudanças qualitativas e quantitativas estão implícitas em diversas experiências do quotidiano que fazem parte da vida das crianças.

Esta dissertação procurou identificar quais as habilidades do pensamento matemático que podem ser promovidas desde os primeiros anos de escolaridade, para que se estabeleça uma base alicerçada para o posterior sucesso desses alunos, em Álgebra, tendo em conta o desenvolvimento de competências como abstrair, generalizar e analisar a variação, referidas anteriormente.

O olhar observador do trabalho empírico não se focou nos alunos, mas antes nos seus professores e nos manuais utilizados, sendo através destes que se percebeu quais as actividades que estimulavam determinado tipo de competências quando se pretendia desenvolver nos alunos o seu Pensamento Algébrico.

Segundo Kieran (2006), as habilidades deverão ser desenvolvidas através de actividades: de exploração de propriedades das operações, com números, sobre a análise do significado de igualdades numéricas, envolvendo mudanças e padrões e no estabelecimento de relações entre quantidades.

Considera-se este trabalho de investigação relevante por diversas razões.

A primeira, porque permitiu na revisão de literatura efectuada, identificar factores que contribuem para diminuir o fosso entre a aprendizagem da Álgebra dos mais pequenos e dos mais crescidos. Para a investigadora acima citada, a inclusão de Pensamento Algébrico nos primeiros anos é vantajosa na medida em que estabelece uma ponte entre os esforços de introduzir o Pensamento Algébrico desde cedo e a Álgebra que se ensina a alunos mais velhos, de 12 ou 13 anos.

Um desses factores é a promoção do Pensamento Algébrico a partir da Aritmética. Segundo Carraher, Earnest, Schliemann e Brizuela (2006) é nos primeiros anos de escolaridade que faz sentido pensar no desenvolvimento do Pensamento Algébrico das crianças, uma vez que se a Aritmética for ensinada com fins algébricos contribui para uma melhor compreensão da transição da Aritmética para a Álgebra, assunto que usualmente se revela difícil para os alunos. Além disso, a presença de uma estrutura algébrica na Aritmética permite trabalhar o Pensamento Algébrico dos alunos desde o início da sua escolaridade. Estes investigadores são da opinião que a Aritmética tem um carácter algébrico intrínseco pois detém uma estrutura que pode ser entendida através de notação algébrica. Para eles, o significado algébrico das operações aritméticas não deverá constituir uma opção mas sim um foco essencial e intrínseco da Matemática Elementar.

O outro factor que ajuda a diminuir a dificuldade da aprendizagem da Álgebra dos mais pequenos é anteceder o Pensamento Algébrico de Pensamento Quantitativo. Segundo Thomson e Smith III (n.d.), as referidas dificuldades não têm apenas que ver com o currículo do ano em causa mas também com os currículos dos anos elementares que não conseguem desenvolver nos alunos a capacidade de raciocinarem sobre as operações de adição e multiplicação. Assim sendo, perspectiva-se que o Pensamento Algébrico pode e deve, não apenas ser antecedido de Pensamento Aritmético mas primeiro que tudo de Pensamento Quantitativo. Estes autores pretendem evidenciar que deve ser dada mais atenção ao desenvolvimento do raciocínio quantitativo, que no fundo se traduz no desenvolvimento de habilidades de cálculo. Para estes investigadores, orientações curriculares ricas em raciocínio quantitativo estimulam o desenvolvimento conceptual dos alunos, as suas capacidades de representação e ainda o seu poder de análise, articulação e representação de relações gerais e entre quantidades. Desta forma, explicam que, se se desenvolverem nos alunos ideias matemáticas com alguma complexidade, entre quantidades e suas relações, a manipulação e abstracção da notação algébrica podem tornar-se actividades significativas.

A segunda razão pela qual este estudo aqui desenvolvido se revelou importante é por permitir aferir concepções e didácticas do Pensamento Algébrico, praticadas por docentes do 1ºCiclo. Dada a inexistência de um Guião de Entrevista a professores do 1ºCiclo, que permita perceber como os professores concebem o Pensamento Algébrico dos seus alunos e perceber como exercem a sua didáctica, construiu-se um Guião, que se aplicou posteriormente a uma amostra de 50 docentes.

Como terceira razão, a realização deste trabalho de investigação, conduziu à construção de um instrumento de análise e avaliação de Manuais Escolares de Matemática, do 1ºCiclo, em Portugal, com o objectivo de se perceber de que forma estes desenvolvem o Pensamento Algébrico dos alunos que os utilizam. Tal instrumento não existia até à data, a nível nacional para os níveis de escolaridade em causa.

Na opinião de Canavarro (2007), nos últimos anos tem-se defendido a inserção do Pensamento Algébrico na Matemática desde os primeiros anos de escola, porque se tem revelado credível que as dificuldades dos alunos nesta ciência residem essencialmente na utilização de símbolos despidos de significado e de regras e propriedades que visam a manipulação simbólica envolvendo um grande grau de abstracção. Esta investigadora adianta ainda que tal se deve, em parte, ao facto de usualmente a Álgebra ser encarada como um assunto isolado dos outros, no currículo da Matemática.

Ao entrevistar Professores do 1ºCiclo e analisar alguns dos seus Manuais Escolares de Matemática, pretendeu-se, por um lado ficar a conhecer as concepções que estes professores têm do Pensamento Algébrico dos seus alunos, a nível de conceitos e práticas, mas também perceber o modo como os manuais que utilizam promovem este tipo de pensamento nos alunos.

Foram duas as questões de investigação que se definiram e para as quais se procuraram respostas. A primeira questão que se equacionou é a seguinte: Que concepções têm os professores acerca do desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos seus alunos? No fundo pretendeu-se perceber: como é que estes docentes abordam actividades com sequências numéricas, padrões geométricos, proporções ou o sinal de igual, numa perspectiva algébrica, em que idades consideram adequado o fomento deste tipo de pensamento e porquê e ainda quais são considerados, por eles, os focos do Pensamento Algébrico.

Posteriormente formulou-se a segunda questão de investigação: De que forma os Manuais Escolares de Matemática do 1ºCiclo, promovem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos? A ideia fulcral foi analisar como é estimulado o desenvolvimento de habilidades em: classificar, investigar regularidades, representar, modelar, descrever variações, utilizar as propriedades das operações e resolver situações problemáticas, citando estas como as que mais se destacaram.

Vários são os estudos já realizados sobre o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos primeiros anos de escolaridade que se consideraram neste trabalho de investigação. De momento, segue-se a sua referência, de modo sucinto.

Welder (2008) desenvolveu pesquisa no que diz respeito ao estudo e abordagem do sinal de igual, tendo distinguido diferentes situações que atribuem diversos significados a este sinal, o que chamou a atenção para este assunto. Quando os alunos olham para « $7 + 5 = 12$ », a primeira leitura que fazem é que se trata de um símbolo computacional, isto é, de cálculo. Neste caso, este investigador é da opinião que os professores devem ler a equação acima como «7 mais 5 é equivalente a 12», destacando assim o sinal de igual como um símbolo de relação. Pode ainda trabalhar-se o sentido de equivalência do sinal de igual, por exemplo, através da igualdade entre expressões numéricas como « $8 + 4 = 7 + 5$ » ou « $8 = 3 + \dots$ ».

A utilização de letras como quase – variáveis é um tema que também tem sido alvo de investigação, por diversos autores. Mais uma vez, temos Welder (2008) a manifestar a sua opinião de que a utilização de equações como $78 - a + a = 78$ são manifestamente benéficas pois deixam transparecer algumas propriedades dos números e operações. Também Kieran (2007a) tem realizado estudos acerca desta temática, deixando expresso que entre a aprendizagem dos números na Aritmética e a aprendizagem dos símbolos na Álgebra encontra-se uma fase intermédia na qual os números podem ser utilizados como quase – variáveis.

A habilidade em generalizar tem sido uma competência estudada no que ao Pensamento Algébrico diz respeito. Segundo Cai e Moyer (2008) os professores devem apoiar uma transição suave entre a Aritmética e a Álgebra reconhecendo a utilidade de abordagens generalizadas na resolução de problemas. Também Kieran (2007a) pesquisou e acrescenta algo, dizendo que os estudos sobre padrões sugerem que, de um modo geral, é mais benéfico para jovens alunos permanecerem durante algum tempo a explorar aspectos das generalidades de padrões do que serem expostos muito rapidamente à representação simbólica

desta generalidade, isto é, deve dispensar-se tempo ao desenvolvimento da capacidade de abstrair, sem contudo a sobrecarregar de simbolismo algébrico.

Warren e Cooper (2008) orientaram um estudo que promoveu e explorou padrões e relações, que ajudassem os alunos a descobrir relações. Concluiu-se que algumas das questões chave de aprendizagem que podem ocorrer nos anos elementares, no âmbito do desenvolvimento do Pensamento Algébrico Inicial são: compreender os padrões e sustentar um pensamento funcional, reconhecer a relação entre dois conjuntos de dados, expressar uma relação e escrever uma regra padrão.

Num estudo conduzido por Welder (2008) os alunos foram capazes de construir a partir da Aritmética frases numéricas que eles sabiam ser verdade, utilizando os símbolos $=$ e $\square$ para representar variáveis, o que revela a presença de símbolos embora não se trate de excesso de simbolismo algébrico. Por seu lado, Zazkis e Liljedahl (2002) levaram a cabo um estudo que analisou como um grupo de professores do 1ºCiclo do Ensino Básico conduziram uma actividade que consistia em generalizar um padrão numérico visual repetitivo. Os resultados desta investigação indicaram que a capacidade destes alunos se expressarem verbalmente superou a sua capacidade de utilização de notação algébrica, pelo que, nestas idades o seu uso não deve ser excessivo. Realmente os participantes muitas vezes percebiam as suas soluções sem se envolverem em demasiado simbolismo algébrico.

A abordagem da Aritmética para fins algébricos, tem sido alvo de atenção investigativa, mais uma vez, de Kieran (2007a). Num estudo por ela realizado, alunos do 3º e do 5ºano conseguiram descobrir e justificar generalizações como «quando se adiciona zero a um número obtém-se o mesmo número com o qual se começou, quando se subtrai um número a ele próprio obtém-se zero» ou «quando se multiplicam dois números pode-se trocar a ordem dos números», descoberta que indicou que apesar de os alunos não recorrerem a notação algébrica nas suas respostas, conseguem expressar propriedades algébricas gerais sobre os números.

Relativamente aos estudos realizados, que se relacionam com o tema desta dissertação, termina-se referindo que Livneh e Linchvski (1998) projectaram tarefas numéricas que eram estruturalmente análogas a tarefas que tinham sido encontradas em problemas com contexto algébrico e apresentaram aos alunos iniciantes de Álgebra. Veio a confirmar-se a hipótese de que as dificuldades detectadas em contextos algébricos existem também em contextos numéricos correspondentes. Depois de provas aplicadas a alunos de 15/16 anos com o objectivo de averiguar a consistência dos seus conhecimentos algébricos, os resultados

conduziram à conclusão de que as novas aprendizagens só serão verdadeiramente adquiridas se integrarem os conhecimentos anteriores dos alunos e o ensino através de situações problemáticas constitui uma abordagem interessante. Os autores acima referidos realizaram testes que lhes permitiram concluir que ensinar Aritmética para fins algébricos ajuda os estudantes de Álgebra a não cometerem alguns erros estruturais.

Para dar respostas às questões de investigação definidas, realizaram-se dois estudos.

O Estudo 1 teve como participantes professores do 1ºCiclo, que foram entrevistados com base num Guião de Entrevista construído para o efeito, e anteriormente referido. A análise das entrevistas envolveu a análise do seu conteúdo tendo as respostas às questões colocadas sido posteriormente categorizadas e realizada uma análise frequencista dessas mesmas respostas. Em seguida, deu-se início ao Estudo 2, que envolveu a análise e avaliação de Manuais Escolares através de um instrumento criado para o efeito.

A convicção da escolha do tema tratado nesta dissertação, e do estudo aqui desenvolvido, tem raízes, entre outros, num artigo que se destaca. Segundo Canavarro (2007), investigadora portuguesa, a frequente falta de articulação da Álgebra com a Aritmética e os modelos de leccionação que temos em funcionamento, permite que os alunos transportem consigo concepções que não se apresentam favoráveis a aprendizagens algébricas. Assim sendo, a opinião desta autora é de que:

(...) como argumento para defender a inclusão do Pensamento Algébrico no currículo de Matemática dos primeiros anos pode evocar-se, não só o seu carácter preparatório para a Álgebra dos anos posteriores, mas também o seu contributo para o aprofundamento da compreensão da Matemática e do poder desta área do saber.

(2009, p.92)

Canavarro (2007) acrescenta ainda que:

(...) a introdução do Pensamento Algébrico nos primeiros anos de escolaridade representa um passo em frente muito significativo pela possibilidade que inspira de uma abordagem à Matemática mais integrada e interessante, na qual os alunos desenvolvam as suas capacidades matemáticas motivados por uma actividade rica e com sentido, que lhes possibilita a construção de conhecimento relevante, com compreensão,

ampliando o seu património quer ao nível dos processos, quer dos produtos matemáticos (conhecimentos que podem usar posteriormente).

(2009,p.113)

Ficou revelado também neste estudo que as práticas lectivas dos professores portugueses do 1.º e 2.º Ciclos, no que diz respeito à Matemática, têm estado muito distantes daquilo que implica a exploração matemática e a orientação de uma aula vocacionada para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Conclui-se que as práticas de sala de aula centradas no modelo de explicação por parte do professor seguida de aplicação e treino por parte dos alunos, não são um contexto favorável ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico, pois deve proporcionar-se momentos de confronto de ideias, argumentação e construção de generalizações colectivas. Esta pesquisa veio mostrar que estes são desafios significativos e para lidar com eles, será necessária vontade e investimento a longo prazo por parte dos professores e dos responsáveis pela formação de professores, em especial das instituições de ensino superior que asseguram cursos de formação inicial e formação contínua de professores.

Expondo de forma bastante sucinta o percurso deste trabalho, pode dizer-se que se começou pela identificação do Estado da Arte do que se considera Pensamento Algébrico em crianças pequenas, nos primeiros anos de escolaridade, e de linhas curriculares orientadoras desse tipo de pensamento, primeiro a nível internacional e em seguida a nível nacional.

Seguiu-se a análise do Programa de Matemática, para o Ensino do 1ºCiclo, sob a perspectiva referida e sua comparação não só com as Normas publicadas pela NCTM, como também com as orientações curriculares de outros países, em particular da Coreia e do Novo México, dado que os seus currículos se encontram em estreita relação com as Normas acima citadas. Posteriormente, construiu-se um Guião de Entrevista a aplicar a professores do 1ºCiclo, já mencionado, com base na fundamentação teórica e recolha de autores, com o objectivo de se aferir quais as suas concepções e práticas, o que constituiu o Estudo 1. Deu-se continuidade ao trabalho de dissertação, através da construção de um instrumento de análise e avaliação de Manuais Escolares de Matemática do 1ºCiclo, com a intenção de perceber como é promovido nestes livros o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, realizando-se o Estudo ora designado por Estudo 2.

Segue-se a apresentação da estrutura deste trabalho tecendo-se uma súmula de cada um dos capítulos que o constitui.

O Capítulo Um, designado por Desenvolvimento e Aprendizagem, inicia-se com a abordagem ao conceito de Desenvolvimento, sob os olhares de Piaget e Flavell, um teórico mais recente, e segue com o de Aprendizagem, numa perspectiva Vigotskiana, relacionando-o com o conceito anterior. Dado a Psicologia Cognitiva muito ter contribuído para uma melhor compreensão do conhecimento matemático das crianças (Baroody, 2002) tornou-se pertinente repensar a aprendizagem da Matemática e do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, nos primeiros anos de escolaridade.

É feita referência à investigação que tem explicado que sob um olhar Pré-Piagetiano salientava-se a importância do adulto, em particular do professor, no processo de Ensino - Aprendizagem do aluno, e os referenciais teóricos na análise de dados raramente iam além de Piaget. Contudo, essa investigação adianta que desde há algum tempo que o PME tem pesquisado no campo da Álgebra com vista a recorrer a representações, a ferramentas tecnológicas, a perspectivas diferentes sobre o conteúdo da Álgebra e a uma grande variedade de referenciais teóricos que sejam mais actuais para repensar o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

Segue-se o Capítulo Dois, que trata os conceitos de Álgebra e Pensamento Algébrico. Em primeiro lugar esclarece-se o conceito actual do termo Álgebra, o qual nas últimas décadas tem sofrido alterações. Deste, deriva o termo Álgebra Inicial, associado ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos primeiros anos de escolaridade.

Esclarece-se a diferença entre dois conceitos distintos: o de pensamento algébrico e o de simbolismo algébrico. Inicia-se a abordagem a competências consideradas fundamentais no desenvolvimento do Pensamento Algébrico como abstrair, generalizar e analisar a mudança. Fruto de uma pesquisa teórica de autores internacionais, dão-se a conhecer os principais focos considerados nesse tipo de pensamento: a estrutura da Aritmética, tratar as operações aritméticas como funções e fomentar actividades de generalização. Nomeiam-se as vantagens de incorporar desde cedo o pensamento algébrico e ainda os seis tipos de habilidades do pensamento matemático que contribuem em muito para o sucesso os alunos na Álgebra.

Apesar de a pesquisa sobre Pensamento Algébrico de alunos em início de contacto com a escola ser relativamente recente, identificaram-se investigadores que são da opinião de que a Álgebra deve ser introduzida desde cedo (Carraher et. al., 2006) embora existam divergências quanto à forma de a implementar.

Porque a presença de uma estrutura algébrica na Aritmética cria uma oportunidade para fomentar o Pensamento Algébrico dos alunos desde o início da sua escolaridade, no capítulo seguinte explica-se como a Aritmética pode ser ensinada numa perspectiva algébrica.

Inicia-se então o Capítulo Três, intitulado Da Aritmética ao Pensamento Algébrico, no qual se expõe como o Pensamento Algébrico dos alunos pode ser estimulado e desenvolvido a partir da Aritmética, identificando também as dificuldades que podem surgir nesta transição e quais os factores necessários a uma transição bem sucedida. Destacam-se vários estudos pela importância que ganharam nesta temática e que envolveram: significados do sinal de igual, abordagens generalizadas e propriedades algébricas do sistema numérico. Por fim explicou-se de que forma os padrões, actividades de generalização e modelação e representações podem contribuir para a Álgebra Inicial.

O capítulo que se segue, capítulo Quatro, consiste numa apresentação actualizada do que se pensa hoje, a nível internacional, sobre Educação Matemática e também sobre Educação Algébrica nos primeiros anos de escolaridade.

Identificam-se razões porque precisamos da Matemática no Pré-Escolar, orientações para a prática docente dos professores deste nível de ensino e políticas educativas sugeridas por duas relevantes associações, a National Association for the Education of Young Children [NAEYC] e o NCTM. É exemplificado um currículo para a Matemática no Pré-Escolar, que havia sido apresentado na Conference on Standards for Preschool and Kindergarten Mathematics Education por Clements, Sarama e Bibiase (2002). Toma-se contacto com um Programa elaborado especificamente para crianças de 4/5 anos de idade, intitulado Big Math for Little Kids (Ginsburg, Greens, & Robert, 2004).

Segue-se com as Normas para a Matemática do Pré-escolar ao 5ºano, relativamente ao Pensamento Algébrico, estabelecidas pelo NCTM.

O capítulo termina com referência a estudos internacionais sobre notação algébrica, questões-chave da aprendizagem, habilidade em generalizar e tarefas numéricas em contexto algébrico.

Depois da abordagem internacional, segue-se a nacional, e portanto, no Capítulo Cinco a temática é a Educação Matemática em Portugal. Na primeira metade deste capítulo reúnem-se as mais recentes orientações curriculares nacionais e respectiva comparação com as orientações curriculares internacionais, do 1º ao 4ºano, em particular, da Coreia e Novo México. Posteriormente realiza-se uma atenta observação às Metas de Aprendizagem do Pré-

Escolar, porque este antecede o 1ºCiclo, e à transição do 1º para o 2ºCiclo, relativamente ao ensino da Álgebra. Na segunda metade do capítulo investiga-se sobre as vertentes fundamentais do Pensamento Algébrico através de alguns trabalhos de investigação realizados em Portugal sobre as seguintes temáticas: sentido do número, significados do sinal de igual, padrões e formas de representar.

Como já foi dito anteriormente, as questões de investigação têm por objectivo aferir concepções que os professores do 1ºCiclo têm sobre Pensamento Algébrico e como é que os Manuais Escolares preparam os alunos para este tipo de pensamento. Assim sendo, no capítulo que se segue aborda-se o tema da Formação de Professores e Manuais Escolares de Matemática, o Capítulo Seis.

Em relação à Formação inicial, dão-se a conhecer: os perfis da formação inicial e práticas de sala de aula (Ponte, 2008), os princípios que fundamentam a Formação Matemática dos futuros professores e educadores (Monteiro, 2002), o enquadramento legal em Portugal, orientações, estrutura dos cursos, objectivos e metas, os padrões de qualidade da Formação Inicial, estabelecidas pelo Instituto Nacional de Acreditação da Formação de Professores [INAFOP] e as recomendações do Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas [CRUP]. São referidas as posições de algumas associações científicas como o National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science [NCISLA] e o NCTM. Posteriormente investiga-se sobre experiências relativas a unidades curriculares de álgebra nos cursos de educação. Destaca-se o Plano de Formação Contínua de Matemática [PFCM], que deu ênfase aos temas considerados novos no Programa de Matemática do Ensino Básico, como os relativos ao sentido de número e à compreensão das operações, a aspectos da Geometria e ao Pensamento Algébrico. É feita referência ao Guião de Entrevista a aplicar a professores para se conhecerem as suas concepções sobre a temática abordada neste trabalho.

Na segunda parte deste capítulo, sobre os Manuais Escolares de Matemática utilizados por estes professores começa-se pelo seu enquadramento legal em Portugal. Investiga-se sobre instrumentos de avaliação de Manuais Escolares de Matemática, tendo-se ficado a conhecer o que existe actualmente a nível nacional e a nível internacional, inclusive quanto à promoção do Pensamento Algébrico contemplada nesses livros. Após esta pesquisa, constrói-se um quadro de habilidades que caracterizam o Pensamento Algébrico e que se espera ver promovidas nos Manuais Escolares de Matemática em Portugal.

O Capítulo Sete apresenta a problemática e as questões de investigação assim como os dois estudos empíricos realizados no que diz respeito aos participantes, instrumentos, e tratamento de dados.

Segue-se o Capítulo Oito, que reúne os principais resultados da análise de conteúdo das entrevistas e da análise e avaliação de Manuais Escolares.

Na última etapa desta dissertação, a Conclusão, resumem-se os aspectos que se revelaram essenciais para o problema em estudo, assumem-se limitações do trabalho desenvolvido e sugerem-se caminhos de continuação do estudo desta temática.

Termina-se com referência às normas da American Psychological Association [APA], que regem a escrita, a estrutura e a indicação bibliográfica desta dissertação.

Avança-se no capítulo seguinte para o corpo do trabalho.

1. DESENVOLVIMENTO E APRENDIZAGEM

(...) um novo posicionamento da Psicologia como ciência e como área de actuação, lembrando que uma nova forma de se compreender o processo de aquisição de conhecimento exige a reestruturação do processo de ensino.

Lara, Tanamachi & Lopes Junior (2006)

Começa-se pelo conceito de Desenvolvimento, referenciando duas das principais individualidades com mais destaque nesta área investigativa do conhecimento, Piaget e mais recentemente Flavell. Segue-se o conceito de Aprendizagem, intensamente estudado por Vigotsky, e de como este poderá estar relacionado com o conceito de Desenvolvimento. Nos últimos 25 anos a Psicologia Cognitiva tem alargado bastante a nossa compreensão e entendimento do conhecimento matemático das crianças (Baroody, 2002), razão pela qual se aborda também a pertinente discussão da aprendizagem da Matemática e do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, nos primeiros anos de escola das crianças.

Segundo Marques (2000) Desenvolvimento é um termo que designa um conjunto de transformações por que passa o sujeito ao longo da sua vida, tendo como etapas fundamentais a infância, a adolescência e a vida adulta. No fundo é um processo com diferentes dimensões e que depende não só de processos maturacionais e biológicos, mas também educacionais e ambientais. Segundo este autor, para os comportamentalistas, o desenvolvimento resulta de um processo contínuo de aquisições cumulativas enquanto para os construtivistas, o desenvolvimento é um processo descontínuo que conhece diversos estados sequenciais que resultam de interacções entre o sujeito e o seu meio ambiente. Em suma, para este investigador, o desenvolvimento do pensamento encontra-se envolvido por um processo educacional, em que as aquisições são sequenciais e cumulativas.

Vygotsky refere-se ao conceito de desenvolvimento em contraposição com o conceito de aprendizagem, como mais à frente se constatará, uma vez que em seguida se abordarão alguns dos aspectos mais pertinentes para este trabalho de investigação, sobre a Teoria do Desenvolvimento de Piaget, um dos estudiosos que mais se destaca nesta área.

Para Piaget (1972) todas as formas de conhecimento sem dúvida pressupõem a realização de alguma experiência e sem a manipulação de objectos a criança não teria sucesso em estabelecer correspondências de um-para-um, que ajudam a desenvolver o conceito dos números inteiros, nem em descobrir que a soma de um determinado número de objectos é sempre a mesma qualquer que seja a ordem de enumeração. A experiência dá mais tarde lugar a um sistema operacional que é puramente dedutivo.

O estudo do comportamento da criança em relação aos objectos indica que existem dois tipos de experiência e dois tipos de abstracção:

- 1) a experiência que se baseia na natureza das coisas em si e permite a descoberta de algumas das suas propriedades. Por exemplo, a criança que descobre o facto inesperado de que uma esfera de chumbo pode pesar o mesmo que um haste de bronze está a realizar uma experiência física e abstraindo a sua descoberta faz estimativas de peso.
- 2) a experiência com objectos que se baseia em relações que não são intrínsecas às coisas em si, mas em que alguma acção que lhes foi imposta. Por exemplo, a criança que conta 10 seixos e que descobre que ainda há 10, mesmo quando muda a sua ordem, enriquece o objecto com propriedades que anteriormente não possui.

Este segundo tipo de actividades podem ser generalizadas, explica este investigador, ou, para ser mais preciso, os padrões deste tipo de actividades podem ser generalizados e transformar-se muito rapidamente, aos 7-8 anos de uma criança, em operações internalizadas, de tal forma que a criança já não precisa da experiência para saber que 10 objectos são sempre 10, independentemente da ordem em que se encontram. As operações lógicas são deduzidas enquanto as estimativas dos pesos não, sem qualquer informação prévia suficiente. Neste ponto preciso, a experiência é realmente lógico-matemática, na medida em que estão em causa as acções dos próprios sujeitos e não os objectos. Por esta razão, o sujeito das acções lógico-matemáticas torna-se, num dado momento, independente de qualquer aplicação directa aos objectos físicos e pode internalizar as operações simbolicamente manipuláveis. Por outras palavras, é por isso que existe para além de um certo nível, uma forma pura da lógica e da matemática para a qual a experiência se torna irrelevante, esclarece Piaget (1972).

A construção das operações é faseada por este autor em faixas etárias. Piaget (1963) defende que após o surgimento da linguagem, ou, mais precisamente, da função simbólica que faz a sua possível aquisição, aos 1,5-2 anos, começa um período que dura até cerca dos 4 anos

e vê o desenvolvimento de forma simbólica e pré-conceptual. Dos 4 até cerca dos 7 ou 8 anos, desenvolve-se, de modo continuamente ligado à etapa anterior, um pensamento intuitivo que conduz a um progresso no limiar das operações. Dos 7-8 até aos 11-12 anos, as «operações sobre o concreto» são organizadas, isto é, desenvolvem-se grupos operacionais de pensamento sobre os objectos que podem ser manipulados ou conhecidos através dos sentidos. Finalmente, a partir dos 11-12 anos e durante a adolescência, o pensamento formal é aperfeiçoado e caracteriza a conclusão da inteligência reflexiva.

Sprinthall & Sprinthall (1993) após um aprofundado estudo das obras de Piaget, resumem os estádios de desenvolvimento deste investigador, bem como as suas características, conforme o que se apresenta no quadro nº.1.

Segundo estes autores Piaget deu uma contribuição muito significativa para que pudéssemos compreender o desenvolvimento mental da criança enquanto processo de interacção e supôs à partida que o desenvolvimento cognitivo se processa em estádios de desenvolvimento, ou seja, que tanto a natureza como a forma da inteligência se alteram profundamente ao longo do tempo.

QUADRO 1. OS ESTÁDIOS DE DESENVOLVIMENTO COGNITIVO DE PIAGET

IDADE	ESTÁDIO	CARACTERÍSTICAS
0-2 ANOS	Sensório-motor	
2-7 ANOS (PRÉ-ESCOLAR)	Intuitivo ou pré-operatório	Ideal para facilitar o desenvolvimento da linguagem. Estruturas mentais são amplamente intuitivas, livres e altamente imaginativas (muitos estudos na área da criatividade sugerem que a intuição e a livre associação são aspectos importantes na resolução de problemas criativa ou original e que as crianças em idade pré-escolar têm uma maior capacidade para compreender sequencias numéricas.)
7-11 ANOS (1º CICLO)	Operações concretas	As crianças comprazem-se com aquilo que é concreto. A ênfase a competências e actividades como contar, classificar, construir e manipular, estimula o desenvolvimento cognitivo Simplificando a tarefa e treinando intensivamente as crianças, é possível produzir

		prematuramente alguns aspectos do desenvolvimento.
11-16 ANOS (2º/3º CICLOS)	Operações formais	Logo que a capacidade de pensar abstractamente se desenvolve, os alunos são capazes de construir estratégias lógicas, racionais e abstractas (formas poderosas de estimular o pensamento abstracto são o visionamento de filmes ou vídeos e a participação em actividades artísticas, tais como a pintura, o drama, a dança e a música.)

FONTE: Sprinthall & Sprinthall (1993)

Para Sprinthall & Sprinthall (1993) as diferenças de um estágio para outro não são tão grandes assim nem as mudanças tão bruscas como originalmente foram descritas por Piaget. Estudos recentes demonstraram que durante o estágio sensório-motor já existe algum pensamento simbólico, habitualmente associado a estágios de desenvolvimento posteriores. Da mesma forma, a investigação indicou que as crianças no segundo estágio têm uma maior capacidade durante o primeiro ciclo do ensino básico, do que por Piaget havia sido suposto. Nestes estudos, alunos manifestaram claras tendências cognitivas para formas de pensamento concreto, existindo simultaneamente indícios de raciocínio formal e abstracto, embora raros.

Campbell & Bickhard (1986) analisaram a forma como Piaget conceptualizou a sua teoria do desenvolvimento da criança, desde o início do seu trabalho até ao final. Para estes investigadores, Piaget sentia necessidade de explicar o desenvolvimento lógico à custa da abstracção reflexiva, embora descurasse os pormenores deste processo de desenvolvimento. É patente a tensão na teoria de Piaget entre fases estruturalmente definidas e o conceito de abstracção reflexiva como processo de transição entre elas. Concepções anteriores, de Piaget, residiam no facto de a abstracção reflexiva ter sido resultado de uma fase estruturalmente definida para a próxima fase, não sendo esta caracterizada em termos do processo que a produz, mas sim em termos do modelo da fase estrutural. Para Campbell & Bickhard (1986) era quase como que as estruturas já devessem estar lá. Deste ponto de vista, para estes autores, a abstracção reflexiva era um apêndice do modelo estrutural que foi usado para explicar as origens de novas estruturas lógico-matemáticas. Foi então que Piaget se preocupou realmente com o equilíbrio e outros processos construtivos, e com a necessidade e possibilidade de a abstracção reflexiva se tornar um processo por si próprio.

Para aqueles investigadores, do ponto de vista do processo, Piaget considerou que as necessidades lógicas foram entendidas como resultado de um processo de várias

possibilidades, um processo de diferenciação, reconhecendo que possuem propriedades intrínsecas de um processo de integração. Estas requerem procedimentos reais para resolver problemas, ou «esquemas processuais» e não apenas estruturas operatórias.

Para os autores acima citados, a abstracção reflexiva de Piaget entendida como um processo de desenvolvimento entra em confronto com a sua visão estrutural dos Estádios de Desenvolvimento que foram supostamente relacionados com a abstracção reflexiva. Do ponto de vista do processo, os procedimentos foram a vanguarda do desenvolvimento, e a necessidade lógica surgiu através de uma reflexão sobre as implicações e as necessidades locais de estruturas operacionais concretas. Para Piaget, as estruturas estáticas eram mais importantes que os procedimentos. A sua reflexão epistémica como um processo de desenvolvimento fornece, na opinião de Campbell & Bickhard (1986), uma base de princípios para rejeitar o seu estruturalismo.

Um estudioso do desenvolvimento da criança, Flavell (1985), refere Gelman e outros investigadores por terem demonstrado que as crianças durante o período pré-escolar, altura em que emergem as suas habilidades numéricas, possuem mais conhecimento e capacidades no domínio dos números que a pesquisa pioneira de Piaget sugeriu, de que o conhecimento do número fosse apenas projectado para medir.

Segundo Flavell (1985), Gelman e Gallistel, em 1978, identificaram dois grandes tipos de conhecimentos numéricos e capacidades que se vão adquirindo durante a primeira infância:

- habilidades de abstracção numérica: que se referem ao processo através do qual a criança abstrai e representa o valor numérico ou a cardinalidade de um conjunto de objectos. Por exemplo, a criança conta um conjunto e assim alcança a representação de que ele contém «quatro» objectos.
- princípios de raciocínio numérico: são os que permitem à criança alcançar os resultados numéricos das operações ou transformar conjuntos de várias formas. Permitem-lhe perceber que o cardinal de um conjunto não se altera por simplesmente se espalharem os objectos mas que se altera adicionando um ou mais objectos ao conjunto.

Em resumo, as habilidades de abstracção ajudam a criança a estabelecer valores numéricos e os princípios de raciocínio ajudam-na a fazer inferências e a operar além dos valores numéricos estabelecidos.

Claro que as habilidades numéricas das crianças continuam a melhorar e a expandir-se durante o 1ºCiclo e a adolescência, como uma consequência directa do ensino formal na Escola.

O conhecimento sobre como as crianças abstraem e raciocinam acerca dos números vai-se tornando mais explícito. Flavell (1985), explica que enquanto as crianças pequenas podem por vezes detectar erros no raciocínio numérico ou de contagem, as crianças mais velhas reflectem sobre os erros e indicam explicitamente porque são erros, que efeitos é que têm nos resultados e como.

Segundo este investigador, apesar de o pensamento das crianças do pré-escolar ter sido muitas vezes caracterizado como «pré-operacional» ou até «pré-conceptual», pesquisas posteriores a Piaget mostraram que um número impressionante de frágeis mas genuínas competências, anteriormente consideradas integradas no estágio de desenvolvimento posterior, foram adquiridas no final deste período. Parece que se subestimaram as habilidades das crianças pequenas, assim como se tinha subestimado na infância. Mais ainda, em anos anteriores, vários teóricos afirmaram que a natureza e organização das categorias mentais das crianças pequenas diferem qualitativamente das dos adultos, contudo, recentes trabalhos sugerem que as diferenças podem não ser assim tão radicais. Fizeram-se descobertas espantosas que aumentam a possibilidade de que os processos básicos numéricos – tal como andar e falar – sejam actividades a que os humanos estão predispostos através da sua evolução, a aprender e a fazer.

Para Flavell (1985), se é difícil identificar um corte muito claro num estágio de «metamorfose cognitiva» entre a infância e a adolescência, pelo contrário, é fácil defender e identificar tendências de desenvolvimento importantes durante estes anos. Sete tendências são delineadas:

1. capacidade de processar a informação: de forma estrutural, baseada em processos neurológicos, ou funcional, sobre o processamento que somos capazes de fazer perante tarefas específicas usando as nossas estruturas básicas e até outras fontes que conseguimos comandar;
2. domínio específico do conhecimento: as crianças mais velhas acumularam mais conhecimento em diferentes domínios do conhecimento do que as mais novas e esta maior especialização traduz-se numa performance cognitiva melhor nesses mesmos domínios;

3. operações formais e concretas: apesar de os modelos lógico-matemáticos de Piaget, Estádio Operacional-Concreto e Operacional Formal, parecerem teoricamente inadequados, muitas das tendências de desenvolvimento que ele descreveu parecem muito perspicazes e actuais;
4. pensamento quantitativo: a aquisição do conceito de unidade de medida, torna possível para as crianças mais velhas e adolescentes, realizarem medições exactas quantitativas, o que parece não acontecer com as crianças mais novas. Esta tendência de desenvolvimento hipotético ganha uma importância adicional pelo facto de que a medida e a quantificação são ferramentas cognitivas largamente aplicadas em vários domínios do conhecimento;
5. sentido do jogo: à medida que as crianças se desenvolvem, o seu conhecimento sobre «o pensamento sobre o jogo» é como deve ser jogado. Isto não implica que elas vão sempre jogar bem o jogo, mesmo quando atingem a maturidade cognitiva, pelo contrário, as pesquisas sugerem que a cognição do adulto é frequentemente de fraca qualidade;
6. metacognição: inclui qualquer actividade cognitiva sobre o seu próprio pensamento. As habilidades metacognitivas submetem-se a um desenvolvimento considerável durante a média infância e a adolescência;
7. improvisar competências existentes: uma importante parte do crescimento cognitivo é o desenvolvimento de competências imaturas. A competência pode ser melhorada no curso do desenvolvimento sendo invocada com maior segurança, mais generalizada e diferenciada, mais dominante sobre a competição, mais acessível à reflexão consciente e à expressão verbal.

Como diz este autor, é útil focarmo-nos nos estádios de Piaget, uma vez que tem dado maior atenção a estes assuntos, no entanto, para ele, as suas tentativas de conclusões sobre estádios, são sujeitos a uma maior discussão relativamente a estruturas e mudanças qualitativas.

Para Flavell:

Os psicólogos do desenvolvimento têm-se tornado cada vez mais cépticos acerca das teorias utilizadas na construção de um estágio desenvolvimental-cognitivo. Em particular, os estágios concreto-operacional e formal-operacional de Piaget têm sido bastante criticados. As estruturas utilizadas para modelar estes estádios

parecem inadequadas. De estádio para estádio, as mudanças desenvolvimentais não são exclusivamente qualitativas se olharmos para processos subjacentes.

(1985, p.295)

Segundo Sprinthall & Sprinthall (1993), Flavell resume da melhor forma o significado fundamental do período pré-operatório, observando que, enquanto a aprendizagem sensório-motora é lenta, acontece passo-a passo e é concreta e ligada à experiência imediata, a aprendizagem pré-operatória é rápida como um relâmpago e flexível. É nesta altura que se dá o início do pensamento simbólico, em que as ideias substituem a experiência concreta. Alguns investigadores cognitivo-desenvolvimentistas procuraram obter suporte para a ideia de que durante os primeiros anos de escolaridade já existe um potencial para o pensamento abstracto.

Passados alguns anos da sua Teoria do Desenvolvimento Cognitivo, mais precisamente nos anos 1990, Piaget emite o seu parecer relativamente à importância do papel da Psicologia da Aprendizagem nas práticas do professor.

Segundo Piaget (1990), em anos anteriores à década de 1990, em alguns países, sobretudo nos Estados Unidos da América, por influência da vulgarização da Psicanálise, a tendência dominante era a de evitar qualquer frustração para a criança em desenvolvimento, o que culminou num excesso de liberdade sem direcção, sem grande resultado educativo. Para tentar travar esta tendência, seguiu-se uma reacção no sentido de uma canalização e de um reforço das actividades cognitivas.

Para este investigador, é preciso que o professor não se limite ao conhecimento da sua ciência mas esteja muito bem informado a respeito das particularidades do desenvolvimento psicológico da inteligência da criança ou do adolescente. Piaget acrescenta ainda que, com referência, por exemplo, ao ensino da Matemática Moderna, embora seja «moderno» o conteúdo ensinado, a maneira de o apresentar permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, mesmo que se tente adoptar, até precocemente, uma forma axiomática.

Para Piaget:

(...) os professores de Matemática, se se dispusessem a tomar conhecimento da formação psicogenética *natural* das operações lógico-matemáticas, descobririam que existe uma convergência muito maior do que se poderia imaginar entre as principais operações usadas espontaneamente pela criança e as noções que nela se tentam inculcar pela abstracção.

(1990, p.30)

E exemplifica dizendo que a partir dos 7-8 anos, as crianças descobrem por si mesmas as operações de reunião e de intersecção dos conjuntos, assim como produtos

cartesianos, e a partir dos 11-12 anos chegam à partição dos conjuntos. Assim sendo, muito se pode esperar da colaboração entre psicólogos e matemáticos para a prática de um ensino *moderno* e não tradicional da Matemática, e que consistiria em falar à criança na sua linguagem antes de lhe impor uma outra já pronta e por demais abstracta, e sobretudo levar a criança a reinventar aquilo de que é capaz, em vez de se limitar a ouvir e a repetir.

Este autor não deixa de assinalar a importância crescente que sem dúvida irá assumir a Educação Pré-escolar, o que de facto se tem vindo a confirmar.

Sobre o conceito de Aprendizagem, Luria, Leontiev e Vygotsky (1988) consideram que esta não é em si mesmo desenvolvimento, contudo, uma correcta organização da aprendizagem da criança conduz ao desenvolvimento mental e activa um conjunto de processos de desenvolvimento. Por isto, para estes investigadores, a Aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário para que se desenvolvam na criança características humanas formadas historicamente, embora não-naturais. Para o referido autores, a aprendizagem é vista como fonte de desenvolvimento.

«Porque será que está tanta gente interessada na Matemática para crianças muito jovens?» é uma questão colocada por Clements e Sarama (2009), que afirmam que desde os primeiros anos de vida, as crianças têm habilidade para aprender Matemática e desenvolver o seu interesse nesta área.

Para estes investigadores, tão importante quanto os conteúdos matemáticos são os processos matemáticos como resolver problemas, raciocinar e provar, comunicar, estabelecer conexões e representações, organizar a informação como um processo específico da Matemática, reconhecer e compor padrões e criar hábitos mentais tais como a curiosidade, a imaginação, a invenção, a persistência e a experimentação. Na opinião de Clements e Sarama (2009) todos deveríamos estar envolvidos num programa de Matemática para a Infância de alta qualidade. Sublinham ainda que desde o Pré-Escolar até ao 8ºano de escolaridade, todas as crianças deveriam ser matematicamente proficientes, o que subentende as seguintes vertentes:

- compreensão conceptual: dos conceitos, operações e relações matemáticos (a ideia por detrás dos símbolos);
- fluência processual: evidenciar flexibilidade, precisão e eficiência apropriadas (conhecimento do tipo «como fazer» ou utilização de algoritmos);

- competência estratégica: habilidade para formular, representar e resolver problemas;
- raciocínio adaptativo: capacidade para o pensamento lógico, reflexão, explicação e justificação;
- disposição produtiva: tendência para ver a Matemática como útil e eficaz.

A reforçar esta concepção encontramos Baroody (2002) ao afirmar que para maximizar a aprendizagem matemática é necessário incentivar o conhecimento conceptual e o conhecimento processual, encorajando o desenvolvimento de estratégias e do conhecimento metacognitivo e promovendo uma predisposição positiva para a aprendizagem.

Uma das questões, quando falamos da possibilidade e potencialidade da aprendizagem é a da relação existente entre Desenvolvimento e Aprendizagem.

As teorias mais importantes que se referem à relação entre Desenvolvimento e Aprendizagem são agrupadas por Luria, Leontiev e Vygotsky (1988) em três categorias:

1ª) Independência do processo do Desenvolvimento e do processo de Aprendizagem: a aprendizagem é considerada um processo puramente exterior e que não participa activamente no processo de Desenvolvimento da criança nem o modifica. O Desenvolvimento precede a Aprendizagem. É o caso da teoria de Piaget que estuda o desenvolvimento da criança de modo absolutamente independente do seu processo de Aprendizagem. Dado que para este tipo de teoria a maturação precede a Aprendizagem, o processo educativo apenas se pode limitar a seguir a formação mental.

2ª) A Aprendizagem é Desenvolvimento: existe um desenvolvimento paralelo dos dois processos, correspondendo a cada etapa da Aprendizagem uma etapa do Desenvolvimento.

3ª) Teoria dualista que concilia as duas anteriores: por um lado o processo de Desenvolvimento é encarado como independente do da Aprendizagem, mas por outro considera-os coincidentes.

Para os três investigadores acima citados, uma vez que as teorias apresentadas apresentam diferentes interpretações interessou procurar uma nova reinterpretação sobre o assunto. Em primeiro lugar, o docente deve pensar e agir tendo por base que o espírito é um conjunto de capacidades de atenção, raciocínio, etc, e que melhorar qualquer uma delas implica melhorar todas as outras. Segundo Luria, Leontiev e Vygotsky (1988) nota-se que a

aprendizagem da criança começa muito antes da aprendizagem escolar e que portanto nunca parte do zero. Por isto mesmo, defendem que devemos tentar compreender a relação entre Aprendizagem e Desenvolvimento em geral tendo em conta as características específicas da idade escolar. Algumas pesquisas por eles levadas a cabo, permitiram a formulação de uma nova teoria, denominada por Teoria da Área de Desenvolvimento Potencial. É facilmente aceite que apenas em determinada idade se pode começar a ensinar gramática ou Álgebra tornando-se incontestável que existe uma relação entre certo nível de desenvolvimento e a capacidade potencial de aprendizagem da criança, no entanto não podemos limitar-nos a um único nível de desenvolvimento, pois não é suficientemente esclarecedor. Com esta teoria pode medir-se não só o processo de desenvolvimento até ao momento, mas também avaliar o nível de maturação da criança e os processos que ainda estão a decorrer e que só agora amadurecem e se desenvolvem. Aquilo que uma criança consegue fazer com a ajuda dos adultos, e que no futuro conseguirá por si denomina-se por Zona do seu Desenvolvimento Potencial. Estes autores explicam que os testes aplicados às crianças determinavam o seu nível de desenvolvimento psicointelectual o que implicava que os educadores identificassem determinados limites não superáveis pela crianças. Aquilo que esta nova teoria vem apresentar como absoluta novidade é a ideia de que o único bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento. Apesar do facto de que cada matéria escolar se relaciona directamente com o curso de desenvolvimento da criança, há que ter em conta a passagem de uma etapa de desenvolvimento para outra o que obriga a reexaminar o ensino de disciplinas formais, e o papel e importância de cada matéria no posterior desenvolvimento psicointelectual formal da criança.

Para Vygotsky, na opinião de Lara, Tanamachi e Junior (2006), existe uma relação entre determinado nível de Desenvolvimento e a capacidade potencial de Aprendizagem. Considera tanto aquilo que uma criança é capaz de realizar sozinha quanto o que é capaz de fazer com a ajuda de outras pessoas como elementos importantes para a compreensão do seu desenvolvimento e para o planeamento de novas situações de ensino-aprendizagem. Assim, Vygotsky propõe, a partir do conceito de Zona de Desenvolvimento Próximo, ou Potencial, uma nova maneira de conceber o desenvolvimento e a aprendizagem, Para ele, a aprendizagem não é em si mesma Desenvolvimento, mas antes uma sistematização da aprendizagem da criança que conduz ao seu desenvolvimento mental e activa processos de desenvolvimento. Esta activação não aconteceria sem a Aprendizagem e por isso mesmo a Aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se

desenvolvam na criança algumas características humanas não naturais, mas que se formam historicamente. Em resumo, para este investigador, o processo de desenvolvimento não coincide com o da aprendizagem, o processo de desenvolvimento segue o da aprendizagem.

Para Lara, Tanamachi e Junior:

(...) esta concepção de desenvolvimento tem implicações teóricas e práticas que superam as concepções anteriores, porque exigem um novo posicionamento da Psicologia como ciência e como área de actuação, lembrando que uma nova forma de se compreender o processo de aquisição de conhecimento exige a reestruturação do processo de ensino.

(2006, p.475)

Wertsch e Michael (2012) comparam as teorias apresentadas por Vygotsky e Piaget. Segundo eles, as discussões acerca das diferenças entre estes dois teóricos do Desenvolvimento têm-se centrado habitualmente no *locus* do Desenvolvimento Cognitivo. Segundo Piaget, as crianças constroem individualmente conhecimento através das suas acções sobre o mundo, embora não negue a importância do mundo social para a construção do conhecimento. Por contraste, Vygotsky considera que a compreensão tem origem no social, e contrariamente ao outro estereótipo insistiu na centralidade de uma construção activa do conhecimento. O que este autor quis enfatizar foi a presença de um factor no processo de co-construção: a cultura. Pode-se então dizer que a sua visão se caracteriza mais como sendo diferente do que propriamente contraditória com a de Piaget.

Na explicitação desta definição, Wertsch e Michael exploram alguns dos conceitos centrais de Vygotsky. A linguagem foi a forma de mediação que mais preocupou Vygotsky, mas quando se falava em signos ou ferramentas psicológicas ele tinha um conjunto mais extensivo de significados mediadores em mente, que incluía: vários sistemas de contagem, técnicas de mnemónicas, sistemas simbólicos algébricos, trabalhos de arte, escritas, esquemas, diagramas, mapas, desenhos mecânicos e todo o tipo de signos convencionais. Nesta perspectiva, o desenvolvimento da mente resulta do entrelace do desenvolvimento biológico do corpo humano com a herança cultural a que este é exposto. Perante esta posição surgem algumas implicações:

1^a) os artefactos culturais são reconhecidos como capazes de provocar transformações mentais em diferentes caminhos do pensamento;

2^a) todas as funções psicológicas começam e estendem-se largamente através da interacção do indivíduo com a cultura e situam-se institucionalmente num contexto específico;

3ª) o significado da acção e do contexto não são propriamente independentes um do outro;

4ª) a mente não é algo que esteja inteiramente dentro da cabeça, é um conjunto de funções psicológicas responsáveis pelas transacções que o individuo estabelece com o exterior através de artefactos de mediação cultural e de ambientes estruturados culturalmente dos quais as pessoas fazem parte.

Com as considerações anteriormente explanadas, Wertsch e Michael (2012) retomam a questão das origens sociais do desenvolvimento do pensamento e da relação de aproximação entre Piaget e Vygotsky. Para ambos é inegável a existência de uma relação entre o individual e o social. Contudo, colocando o foco da cognição do adulto e do processo de Desenvolvimento Cognitivo na mediação cultural, as origens sociais assumem uma especial importância na teoria de Vygotsky, por contraste com a noção de Piaget de equilíbrio social como sendo o resultado de um interjogo entre vários tipos de interacções. Para Vygotsky e para os teóricos histórico-culturais, mais geralmente, o mundo social tem primazia sobre o individual num sentido muito especial. Isto não significa que o processo de socialização possa ser reduzido a uma simples aprendizagem ou que não há espaço nele para uma construção activa, até porque, os processos sociais dão lugar aos processos individuais e ambos são essencialmente mediados pelos artefactos culturais. Na perspectiva de Vygotsky, os processos inter e intra mentais planeados são necessariamente mediados por artefactos culturais. De facto, a fronteira entre o social e o individual que tem definido muita da nossa psicologia do pensamento, é por ele abordada.

Para Wertsch e Michael (2012) todas estas considerações explicam porque é que a ideia de Zona de Desenvolvimento Próximo desempenha um papel tão central na tese de Vygotsky. Esta zona é definida como sendo a distância entre o actual nível de Desenvolvimento e um nível mais avançado de Desenvolvimento Potencial que será reduzido numa interacção entre participantes. Um aspecto essencial desta interacção é que participantes menos capazes podem conseguir interagir além das suas competências.

Na opinião dos investigadores acima referidos há ainda muito para aprendermos com Piaget e Vygotsky e realmente, em muitos casos, a força de alguns teóricos complementam as fraquezas de outros.

Wertsch e Michael (2012) consideram que as discussões sobre estas duas personalidades, acerca da mente e das suas fronteiras não têm sido bem servidas por debates excessivamente ensaiados sobre o individual ou o social. Em vez disso, tem-se argumentado

que o contraste mais interessante entre eles diz respeito ao papel dos artefactos culturais, que constituem os dois pólos do par individual-social. Na opinião de Wertsch e Michael (2012), para Vygotsky, esses artefactos têm um papel central na elaboração do que é e onde está a mente. Ao seguir essa linha de investigação, este autor concentrou-se num conjunto de questões e fenómenos que parecem não ter qualquer contrapartida clara no pensamento de Piaget e consequentemente, pode ser mais apropriadamente caracterizado como sendo diferente, do que entrando directamente em conflito com aqueles que estão no centro do projecto de Piaget.

Arcavi (1995) defende a sugestão de mudanças curriculares baseadas em resultados de pesquisas. Vejamos a seguinte ilustração de uma actividade de pré-álgebra realizada com os seus alunos: descobrirem padrões numéricos numa folha de calendário. Algumas das suas observações foram as seguintes: a soma dos números numa diagonal, de qualquer quadrado 2 por 2, é sempre igual à soma dos números na outra diagonal, a diferença entre as somas dos números em cada linha, de qualquer quadrado 2 por 2, é sempre 14 e a diferença entre os produtos dos dois números em cada diagonal é sempre 7. Quando os alunos foram convidados a justificar a generalidade das suas observações, a maioria deles habitualmente envolvidos em práticas desejáveis que sustentem uma boa preparação para a Álgebra procuraram características comuns e tentaram verbalmente estabelecer uma estrutura na sua percepção.

Este investigador sugere que a promoção de interacções deste tipo é uma oportunidade para expor os alunos ao uso de símbolos, para evidenciar a existência de uma estrutura e para valorizar o poder dos símbolos como um meio de descobrir e provar novas relações.

Em suma, tem-se que, para Piaget todas as formas de conhecimento são antecedidas pela concretização de alguma experiência e manipulação de objectos, dando lugar, mais tarde, a um sistema operacional puramente dedutivo. Segundo este autor, o desenvolvimento mental da criança é entendido como um processo de interacção e processa-se em etapas de desenvolvimento e tanto a natureza como a forma da inteligência se alteram profundamente ao longo do tempo.

São vários os autores que tecem algumas observações à teoria de Piaget. Para Sprinthall e Sprinthal (1993) as diferenças de um estágio para outro não são tão grandes assim nem as mudanças tão bruscas como originalmente foram descritas por Piaget. Gelman e

outros investigadores demonstraram que as crianças em idade pré-escolar possuem mais conhecimento e capacidades no domínio dos números que a pesquisa pioneira de Piaget sugeriu, de que o conhecimento do número fosse apenas projectado para medir. Acrescentaram ainda que apesar de o pensamento das crianças do pré-escolar ter sido muitas vezes caracterizado como pré-operacional ou até pré-conceptual, pesquisas posteriores a Piaget revelaram que competências anteriormente consideradas e integradas no estágio de desenvolvimento posterior, foram adquiridas no final deste período.

No fundo, para Piaget, o Desenvolvimento conduzia à Aprendizagem, uma vez que depois de identificado o estágio de Desenvolvimento da criança, se considerava que esta estava apta para aprender. Por oposição a este investigador, encontrou-se Vygotsky, para quem a Aprendizagem conduzia ao Desenvolvimento, ou seja, é aprendendo que a criança se desenvolvia. Ora, Luria, Leontiev e Vygotsky (1998) foram os autores de uma nova teoria, denominada Teoria da Área de Desenvolvimento Potencial que defendia que potencialmente a criança já detém as capacidades necessárias à aquisição de novas competências, bastando para tal que seja estimulada e orientada pelos adultos. Um aspecto essencial desta interacção é que participantes menos capazes podem conseguir interagir além das suas competências, tal como explicou Wertsch.

Para Campbell & Bickhard (1986), Piaget, já na fase final da sua vida, sentiu necessidade de explicar o desenvolvimento lógico à custa da abstracção reflexiva, embora não relevasse os pormenores deste processo de Desenvolvimento, preocupou-se realmente com outros processos construtivos e com a possibilidade de a abstracção reflexiva se tornar um processo por si próprio e entendia a abstracção reflexiva como um processo de desenvolvimento, o que entrou em confronto com a sua visão estrutural dos Estádios de Desenvolvimento. Todas estas observações revelam que Piaget deixou em aberto a possibilidade de a forma como ele entendia o desenvolvimento da criança se poder vir a alterar.

Numa perspectiva Pré-Piagetiana e mais centrada na aprendizagem da Álgebra, salientado-se a importância do adulto, mais especificamente do professor no processo de Ensino-Aprendizagem do aluno, Kieran salientou que os referenciais teóricos na análise de dados de pesquisa raramente iam além de Piaget. No entanto, desde há algum tempo que o PME tem pesquisado no campo da Álgebra com vista a recorrer a outras representações, ao

uso de ferramentas tecnológicas, a perspectivas diferentes sobre o conteúdo da Álgebra e a uma grande variedade de referenciais teóricos mais actuais para pensar o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

É precisamente com este tipo de interacções que o professor proporciona aos alunos a vivência de experiências algébricas, como explicarei no capítulo seguinte.

2. ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO

Álgebra é um modo de pensar um conjunto de conceitos e de desenvolver habilidades, que permite aos estudantes generalizar, modelar e analisar situações matemáticas.

NCTM (2008)

Neste capítulo, é primeiramente esclarecido o conceito actual do termo Álgebra, o qual, no decorrer das últimas décadas sofreu alterações. Na sua sequência surge o termo Álgebra Inicial, associado ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Por fim, tomar-se-á contacto e confrontar-se-ão as perspectivas de diversos investigadores desta área, relativamente ao que cada um considera ser o foco do desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

A investigação numa área que veio a ser conhecida como Álgebra Inicial ganhou especial destaque dado pelo PME em 2001. Alguns dos principais temas estudados na Álgebra Inicial, por membros investigadores desta comunidade incluíam, segundo Kieran (2006):

- pensar sobre igualdades numéricas;
- simbolizar relações entre quantidades;
- trabalhar com equações;
- desenvolver o pensamento funcional;
- promover e compreender propriedades matemáticas.

O conceito de Álgebra refere-se à manipulação e formalização de conceitos matemáticos e estruturas mediadas por sistemas notacionais explícitos e orientados por regras (Thomson e Smith III, n.d.). Por isto mesmo, o conteúdo da Álgebra depende de ideias de coerência, representação, generalização e abstracção.

A Álgebra é também identificada, segundo outros autores, como sendo um campo da Matemática, uma linguagem que recorre a símbolos e que juntamente com as propriedades da Aritmética consegue expressar ideias gerais na Matemática (Santos & Santos-Wagner, 2009).

Acontece, não raramente, muitas crianças e adultos identificarem a Matemática com a Aritmética, ou seja, no fundo com um conjunto de regras e procedimentos aritméticos e muitas pessoas vêem os matemáticos como pessoas excepcionalmente boas em Cálculo. Contudo, esta visão é demasiado redutora, como adiante se perceberá.

Por outro lado, a compreensão de conceitos matemáticos que passe pela sua manipulação e formalização, requereu e continua a requerer a criação e utilização de símbolos. Todavia a Matemática não é apenas sobre símbolos e contas, estas são apenas ferramentas do ofício. É sobre ideias, e em particular sobre a forma como diferentes ideias se relacionam entre si (Stewart, 2005). É certo que nos podemos questionar: porque não usarmos palavras em vez de símbolos se afinal a Matemática não é mais do que uma linguagem? A resposta é que de facto a Matemática não é apenas outra linguagem, é uma linguagem mais o raciocínio, é uma linguagem mais a lógica, é um instrumento para raciocinar (Feynman, 1989). Como tal, os símbolos e as contas funcionam como instrumentos necessários à linguagem.

Realmente, a linguagem algébrica, ou numa única palavra, a Álgebra, é uma linguagem da Matemática. Mas como tem sido definido esse termo por alguns dos autores e entidades que se têm dedicado ao estudo deste ramo da Matemática? É o que veremos em seguida.

Para Zazkis & Liljedahl (2002) o termo Álgebra abrange dois conceitos distintos: pensamento algébrico e simbolismo algébrico. Diversos investigadores não estão de acordo sobre a relação entre os dois. Enquanto uns vêem os símbolos algébricos como um componente necessário ao pensamento algébrico, outros consideram-nos como uma ferramenta de comunicação. Para os investigadores referidos, hoje em dia os pesquisadores tendem a separar simbolismo algébrico de pensamento algébrico por duas razões: por reconhecerem a possibilidade de manipulação de símbolos, sem sentido, e por se assistir a um movimento para a «Álgebra precoce», isto é, a uma concentração no estudo da estrutura, em vez de na computação do ensino fundamental.

Para Santos e Santos-Wagner (2009), Pensamento Algébrico é uma actividade intelectual que age em oposição aos sentidos e que se manifesta na habilidade em abstrair e generalizar situações concretas.

Voltemos à Álgebra Inicial e ao seu possível desenvolvimento ao nível dos primeiros anos de escolaridade.

A nível do Pré-Escolar e 1ºCiclo o conceito de Álgebra Inicial reduz-se ao de Pensamento Algébrico uma vez que para estas faixas etárias o simbolismo algébrico ainda não é consideravelmente formalizado, dada a sua forte componente abstracta pouco apropriada para crianças destas idades.

Para Cox (2003) nunca é demasiado cedo para se começar a pensar em termos de Álgebra. Claro que com isto não quer dizer que no Jardim de Infância se resolvam equações do tipo $3y - 6 = 45$, mas é necessário oferecer às crianças jovens uma base sólida de pensamento algébrico. É opinião deste autor que a Álgebra nos primeiros anos estabelece as bases necessárias para a Matemática em curso e futuras aprendizagens.

É importante que as crianças pequenas compreendam não só os conteúdos matemáticos, mas também que se envolvam nos procedimentos: procurando padrões, raciocinando sobre dados, resolvendo problemas e verbalizando as suas ideias e resultados (Baroody, 2002). Desta forma as crianças desenvolvem pensamento crítico e competências comunicativas essenciais.

Mas, queremos aqui salientar que a Matemática não se resume a um conjunto de procedimentos. Segundo Revuz “esta ciência não se traduz numa técnica rebarbativa, apenas utilizável num campo limitado, mas é antes uma das formas fundamentais do pensamento humano” (1969, pag.79).

Além da abstracção e da generalização, a outra grande ideia que suporta o Pensamento Algébrico é a análise da mudança, como por exemplo aquela que se observa nos padrões matemáticos (Cox, 2003). Devemos incentivar as crianças a observar e descrever diversas mudanças. Este investigador explica que a análise da mudança qualitativa implica

muitas experiências familiares que fazem parte da vida das crianças, como por exemplo, um par de sapatos que deixou de servir porque os pés da criança cresceram. As mudanças ocorrem ao longo do tempo e são bastante previsíveis, podendo por isso ser modeladas. Mas mudanças quantitativas também fazem parte da vida das crianças como as alterações ao tamanho do sapato, 22 para 23. A linguagem matemática para descrever as mudanças incorpora uma linguagem numérica mais precisa. As crianças pequenas precisam de perceber e pensar sobre estes dois tipos de mudança, qualitativa e quantitativa, e os jogos oferecem às crianças jovens muitas experiências nesse sentido.

A pertinência da questão de saber se o estudo da Álgebra deve ser transversal a todos os anos de escolaridade tem sido debatida desde 1960, e de facto, a pesquisa sobre o Pensamento Algébrico do aluno em tenra idade é relativamente recente (Kieran, 2006).

Não há um consenso claro sobre o que é o Pensamento Algébrico nos primeiros anos de escola. Contudo, há um consenso geral de que nessa fase o Pensamento Algébrico se estende para além da Aritmética Computacional atendendo à estrutura subjacente da Matemática (Cai & Moyer, 2008).

Já referimos que o Pensamento Algébrico pode ser visto como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de uma série de exemplos particulares e expressam essa generalização de uma forma simbólica adequada à sua idade. Neste processo, dá-se atenção não só aos objectos mas também às relações existentes entre eles, raciocinando-se progressivamente de forma cada vez mais geral e abstracta.

Para Carraher et al. (2006), a abordagem à Álgebra nos primeiros anos de escola deve ser orientada pela perspectiva de que a generalização é o coração do raciocínio algébrico, as operações aritméticas podem ser vistas como funções e a notação algébrica pode emprestar suporte ao raciocínio matemático, mesmo entre jovens estudantes. Estes investigadores argumentam que dar às funções um maior destaque no currículo da Matemática Elementar ajuda a facilitar a integração da Álgebra no currículo existente, em etapas escolares mais avançadas. A chave da sua proposta é que as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão sejam tratadas desde o início como funções.

Levaram a cabo um estudo, com alunos do 3ºano, que explorava estratégias para lidar com tabelas de funções e funções lineares, visando o carácter algébrico da Aritmética. Numa actividade orientada por Carraher e Schliemann (2007), foi proposto aos alunos que preenchessem lacunas numa tabela com duas colunas, uma dizendo respeito ao número de caixas de bolachas e a outra ao preço a pagar. A maioria dos alunos da turma começou por tratar cada coluna como se fossem problemas separados. Preencheram a 1ªcoluna contando de um em um e a 2ª de 3 em 3, conforme mostra a quadro nº.2.

QUADRO 2. QUADRO QUE RELACIONA O Nº DE CAIXAS DE BOLACHAS COM O PREÇO TOTAL A PAGAR

CAIXAS DE BOLACHAS	PREÇO
	3€
2	6€
3	
	12€
5	
6	
	21€
8	
9	
10	30€

FONTE: Carraher e Schliemann (2007)

A abordagem destas crianças não envolvia pensamento sobre as relações entre preço e número de caixas de bolachas. Depois de trabalhar com as crianças as relações, ao fim de umas semanas estes alunos já estavam a trabalhar com tabelas de multiplicação e a estudar as relações multiplicativas. Crianças de nove anos de idade foram capazes de procurar padrões e relações funcionais entre os números puros desprovidos de referências quantitativas. Eles não precisaram de materiais concretos para apoiar o seu raciocínio sobre relações numéricas e conseguiram até mesmo lidar com notação de natureza algébrica. Na verdade, a notação algébrica parecia ajudá-los a mudar de aspectos computacionais para generalizações sobre como dois conjuntos de valores estão interligados (Schliemann, Carraher, & Brizuela, n.d.).

Também Curcio (1997) concorda com esta perspectiva e vai mais além. Considera que a generalização ultrapassa o simples reconhecimento de padrões e muitas vezes envolve conceitos de multiplicação e também de proporção. Assim sendo, no Jardim de Infância, as crianças podem começar a perceber relações entre quantidades, através do conceito de

proporção, como na actividade seguinte, explorada por este investigador. Uma aluna dispunha de uma balança e de alguns ursos para pesar, uma mãe-urso e vários bebés-urso. Ela colocou a mãe-urso num prato da balança e um bebé-urso no outro prato e observou que a balança não estava equilibrada. Então, pegou noutro bebé-urso e colocou-o junto do primeiro, os dois no mesmo prato e a balança ficou em equilíbrio. Foi nesse momento que o professor a questionou: “Como farias para que a balança ficasse equilibrada com duas mães-urso num prato da balança? E com três?”. E a aluna conseguiu explicar perante a turma que havia descoberto as relações de 1-2, 2-4 e 3-6.

Através da exploração de actividades manipulativas, os educadores do ensino pré-escolar regularmente encorajam as crianças a reconhecerem padrões e a fazerem previsões, mas o desafio proposto por Curcio (1997) é olhar para formas de exploração que envolvam explicitamente as crianças em Pensamento Proporcional. Para planejar a emergência de Pensamento Algébrico nos alunos, os educadores precisam estar alertas para muitos exemplos de actividades que promovam tal Pensamento Pré-Algébrico como evidenciado na actividade exemplificada.

Dado que uma parte integrante do Pensamento Algébrico implica a utilização de símbolos para se poder generalizar certos tipos de operações aritméticas, os muitos adereços que as crianças usam para representar coisas apoiam a sua crescente capacidade de usar símbolos cada vez mais abstractos.

Segundo Kieran (2007a) a vantagem de incorporar um quadro de Pensamento Algébrico nos primeiros anos é que ele preenche uma desconexão que se tem observado por muito tempo entre os esforços de introduzir o Pensamento Algébrico desde cedo e o grande corpo de pesquisa da Álgebra que se tem dedicado a alunos mais velhos, de 12 ou 13 anos.

Os conceitos algébricos que podem ser enfatizados no ensino fundamental para estabelecer uma base para o posterior sucesso em Álgebra incluem-se, segundo Kieran (2007a) nas seguintes áreas: propriedades das operações com números, igualdades numéricas, mudanças, padrões e relações entre quantidades. A maior parte do trabalho não deve consistir em introduzir os jovens estudantes na notação algébrica convencional, mas sim basear-se no uso da linguagem e outras representações algébricas para expressar ideias tais como tabelas e

gráficos informais. Para Kieran (2007a), Álgebra é muito mais do que um conjunto de conhecimentos e técnicas, é uma maneira de pensar, e o sucesso da criança na Álgebra depende de pelo menos seis tipos de habilidades de Pensamento Matemático: generalização, abstracção, pensamento analítico, dinâmica de pensamento, modelagem e organização.

Em jeito de resumo, olhemos para o quadro nº.3, que sintetiza quais os focos do Pensamento Algébrico dos diferentes autores referidos até ao momento.

QUADRO 3. FOCO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, SEGUNDO VÁRIOS AUTORES

CAI, MOYER	CURCIO	SCHLIEMANN, CARRAHER, EARNEST BRIZUELA	KIERAN
Aritmética+estrutura subjacente	Generalização Conceitos de multiplicação e proporção Símbolos para representações	Generalização Operações como funções	Conceitos algébricos: -operações c números -igualdades numéricas -mudanças e padrões -relações entre quantidades Habilidades de pensamento - generalizar - abstrair - analisar - dinâmica - modelar - organizar

Como principal diferença destaca-se o estudo das operações, que é vista por Cai, Moyer e Kieran como operações de cálculo entre números em oposição a um olhar sobre as operações como funções, por Schliemann, Carraher, Earnest e Brizuela. A Generalização é referida por quase todos os investigadores como sendo fundamental ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Apesar de focos diferentes no Pensamento Algébrico, é partilhado por alguns autores que preparar os alunos para a Álgebra implica a alteração dos currículos escolares e que a forma de ensinar praticada conduz os alunos à utilização de notação simbólica para representar, comunicar e generalizar o seu pensamento (Thomson e Smith III (n.d.).

Para Kieran (2007a), actividades como resolver equações, analisar relações funcionais e determinar estruturas não são o objectivo da Álgebra, mas sim as

ferramentas para a modelação de fenómenos do mundo real e resolução de problemas relacionados com diversas situações.

Tal como acontece com o conceito de mudança, as crianças pequenas, dos 4 aos 10 anos, podem construir conhecimento sobre cada um dos componentes principais da Álgebra através da criação de situações de brincadeira. Podem descobrir padrões em roupas ou participar em rotinas de sala de aula, reconhecendo a Matemática, como quando comparam as quantidades de sumo em cada copo, por exemplo. Além disso, as crianças podem criar modelos de relações quantitativas quando brincam com uma caixa registadora. Muitas canções e brincadeiras com dedos são construídas em torno da repetição de padrões. As oportunidades de criar Pensamento Algébrico são mesmo muitas, e no capítulo seguinte tomaremos contacto com elas.

Em síntese, apesar de a pesquisa sobre Pensamento Algébrico de alunos nos primeiros anos de escolaridade, segundo Kieran, ser relativamente recente, a Álgebra deve ser introduzida desde cedo, conforme referem Carraher et al. (2006) e outros autores anteriormente citados, embora existam divergências quanto à forma de a implementar. A presença de uma estrutura algébrica na Aritmética permite trabalhar o Pensamento Algébrico dos alunos desde o início da escolaridade, e por isso mesmo, ver-se-á em seguida como abordar a Aritmética numa perspectiva algébrica.

3. DA ARITMÉTICA AO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Se alunos e professores rotineiramente passassem os primeiros seis anos do ensino a desenvolver, em simultâneo, a Aritmética e o Pensamento Algébrico, a Aritmética e a Álgebra passariam a ser vistas como indissoluvelmente ligadas. E assim, o estudo da Álgebra na Escola Secundária seria uma extensão natural e não ameaçadora da Matemática do currículo Pré-Escolar e do Ensino Básico.

Cai & Moyer (2008)

Pretende-se neste capítulo expor como o pensamento algébrico dos alunos pode ser estimulado e desenvolvido a partir da Aritmética, identificando também dificuldades que podem surgir nesta transição. Vários estudos que se destacaram pela sua importância, sobre esta temática, serão mencionados.

3.1. ESTRUTURA ALGÉBRICA DA ARITMÉTICA

3.1.1. DO PENSAMENTO ARITMÉTICO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO

O facto de a Álgebra ter surgido historicamente depois e como uma generalização da Aritmética sugere, para muita gente, que a Álgebra deva seguir-se à Aritmética no currículo (Carragher et al., 2006). Será que deve mesmo ser assim? Em seguida, apresentaremos as diferentes perspectivas de vários autores, acerca da passagem do Pensamento Aritmético para o Pensamento Algébrico e depois confrontá-las-emos.

Começamos com a perspectiva particular de que o Pensamento Algébrico, pode e deve não somente ser antecedido de pensamento aritmético mas, primeiro que tudo, de Pensamento Quantitativo. Segundo Thomson e Smith III (n.d.), as dificuldades manifestadas pelos alunos no estudo da Álgebra, não têm apenas que ver com o currículo do ano em causa, que frequentemente não tem sentido nem coerência, mas também com os currículos dos anos elementares que não conseguem desenvolver nos alunos capacidades de raciocínio sobre as operações de adição e multiplicação. Sem os conceitos matemáticos e relações para expressar e manipular, muitos dos estudantes encontram na Álgebra um exercício simbólico e sem sentido. Estes investigadores argumentam que um enfoque no raciocínio quantitativo pode desenvolver nos alunos capacidades para melhor compreenderem conceitos,

raciocinarem e operarem sobre quantidades em situações problemáticas. Para ilustrar a separação entre Pensamento Algébrico, que é pensamento formal, e Pensamento Quantitativo, que é pensamento informal, comparemos uma solução algébrica tradicional de um problema com outra que envolve directamente quantidades e relações.

O Problema é o seguinte: «Eu demoro no percurso a pé, de casa para a escola, 30 minutos e o meu irmão 40 minutos. O meu irmão saiu 6 minutos antes de mim. Em quantos minutos é que eu me irei encontrar com ele?»

Uma solução algébrica é dada pela resolução da seguinte equação:

$$(t+6) \frac{d}{40} = t \frac{d}{30}$$

em que t representa o número de minutos que eu já demorei e d o número de milhas de casa para a escola.

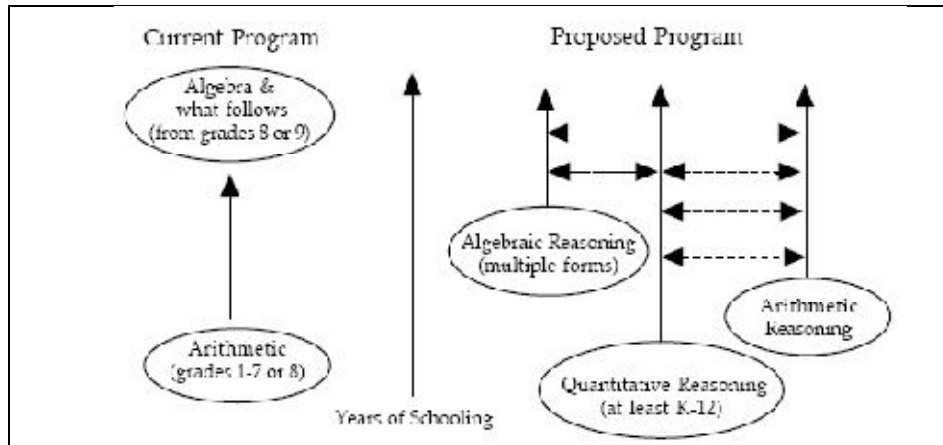
Vejamos agora uma resolução bem diferente, que apela ao pensamento quantitativo. «Eu imagino-me caminhando atrás do meu irmão, vendo-o à minha frente. O que interessa é perceber a que distância eu me encontro dele e quanto tempo é necessário para que essa distância se torne nula. A distância entre nós diminui a uma velocidade que é igual à diferença das nossas velocidades. Eu demoro $3/4$ do tempo do meu irmão a chegar à escola, por isso eu caminho $4/3$ mais depressa. Assim, a distância entre nós diminui a um rácio de $1/3$ da velocidade do meu irmão. O tempo necessário a que a distância entre nós se anule será 3 vezes maior, por isso eu irei ultrapassar o meu irmão em 18 minutos.»

Thomson e Smith III (n.d.) pretendem evidenciar com este exemplo que colocar a ênfase da resolução em expressões simbólicas, algébricas, constitui uma grande falha, em parte porque não consegue conectar os alunos para o seu mundo experiencial nem orienta os alunos no sentido de aprenderem uma Matemática poderosa e produtiva, por isso, deve ser dada mais atenção ao desenvolvimento do raciocínio quantitativo, que é nem mais nem menos que o desenvolvimento de habilidades de cálculo. Segundo estes investigadores, um Programa rico em raciocínio quantitativo estimula o desenvolvimento conceptual dos alunos, capacidades de representação e ainda a análise, articulação e representação de relações gerais e relações entre quantidades.

Se desenvolverem ideias matemáticas de complexidade suficiente entre quantidades e suas relações, a manipulação e abstracção da notação algébrica podem tornar-se uma actividade significativa e sensível.

O Pensamento Quantitativo pode iniciar-se desde muito cedo e mesmo antes da Aritmética, devendo manter-se ao longo de todo o percurso escolar, em paralelo com o Pensamento Aritmético e Algébrico depois de estes serem introduzidos. Os autores referidos propõem um novo Programa para os anos elementares, na figura nº.1, que antecede o Ensino da Álgebra e que tem em vista a sua introdução.

FIGURA 1. DIFERENTES VISÕES DE INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA



FONTE: Thomson e Smith III (n.d.)

Também Carraher et al. (2006) acreditam que há boas razões para pensarmos que o Pensamento Aritmético e Algébrico se interligam, embora não dêem destaque ao Pensamento Quantitativo. Assumamos, por momentos, que a Aritmética e a Álgebra são tópicos distintos, isto é, que a Aritmética trata as operações envolvendo números particulares enquanto a Álgebra trata números generalizados e funções. Tal distinção permite-nos uma determinada ordenação destes dois tópicos no currículo: primeiro os professores baseiam-se em factos numéricos, cálculos e problemas verbais envolvendo valores particulares e só mais tarde as letras são usadas para substituir qualquer número ou conjuntos de números. Desta forma, não será surpresa que tal demarcação conduza a uma tensão considerável ao longo da fronteira entre a Aritmética e a Álgebra. Por esta razão muitos educadores matemáticos têm dedicado tanta atenção à suposta transição entre a Aritmética e a Álgebra – uma transição pensada ocorrer durante um período no qual a Aritmética está a acabar e a Álgebra a começar. Os autores acima referidos são da opinião de que a Aritmética tem um carácter algébrico intrínseco pois as estruturas podem ser percebidas através de notação algébrica. Para eles, o significado algébrico das operações aritméticas não é opcional mas sim um ingrediente essencial que precisa ser olhado como parte integrante da Matemática Elementar.

É neste momento que nos ocorre pensar no desenvolvimento do Pensamento Algébrico das crianças nos primeiros anos de escolaridade.

O desenvolvimento de ideias algébricas em crianças pequenas, requer fundamentalmente uma reforma sobre como a Aritmética deve ser ensinada, além de uma melhor compreensão dos diversos factores que tornam a transição da Aritmética para a Álgebra difícil para os alunos.

Segundo Cai & Moyer (2008), se alunos e professores rotineiramente passassem os primeiros seis anos do ensino, a desenvolver em simultâneo, a Aritmética e o Pensamento Algébrico, com diferentes ênfases consoante os estádios de aprendizagem, a Aritmética e a Álgebra passariam a ser vistas como indissoluvelmente ligadas. E assim, o estudo da Álgebra na Escola Secundária seria uma extensão natural e não ameaçadora da Matemática do currículo Pré-Escolar e do Ensino Básico. Portanto, a transição entre a Aritmética e a Álgebra é um processo que deve ir sendo feito em paralelo.

Segundo Carraher et al. (2006) pouco é conhecido sobre as capacidades das crianças fazerem generalizações matemáticas e usarem notação algébrica. Tanto quanto se pode dizer, nenhum texto científico de língua inglesa oferece uma visão algebrificada coerente, do ensino inicial da Álgebra. Fala-se em Aritmética Algebrificada com entusiasmo, mas tal só será conhecido com clareza quando um número significativo de professores assumirem de forma sistemática experiências de aprendizagem e pesquisas, neste sentido. Irá levar bastante tempo para que os programas de Educação se ajustem ao facto de que os tempos mudaram, acrescentam estes investigadores.

Embora já aqui se tenham exposto as opiniões de vários investigadores quanto ao que se entende ser o Pensamento Algébrico, actualmente, não há uma visão ou perspectiva única e clara que tenha sido adoptada na comunidade internacional de educadores matemáticos em relação ao que se entende por Pensamento Algébrico nos anos escolares iniciais (Kieran, 2004).

Para encontrar e apoiar o raciocínio algébrico dos alunos dos 1º e 2º Ciclos, é necessário que os professores se concentrem no pensamento dos seus alunos, a fim de desenvolver os seus olhos e ouvidos para a Álgebra (Blanton & Kaput, 2003). Perguntas simples devem ser feitas, como por exemplo as seguintes: «O que está a pensar?», «Como é

que pode resolver isso de maneira diferente?», «Como é que sabe que isso é verdade?» ou «Isso funciona sempre?». Estas questões não só revelam o pensamento dos estudantes, mas também promovem a sua rapidez para justificarem, explicarem e construírem argumentos de processos que se encontram no cerne do raciocínio algébrico.

Para além disso é também importante para estes investigadores a criação de uma cultura de sala de aula e práticas que promovam o raciocínio algébrico, o que implica a incorporação de argumentação, conjecturas e generalizações propositadas para que os alunos considerem os argumentos formas de construir conhecimento confiável. Para Blanton e Kaput (2003) deve incentivar-se este tipo de actividades como práticas quotidianas e não como enriquecimento ocasional separado do trabalho regular de aprendizagem e da prática da Aritmética.

Quando os estudantes iniciam o estudo da Álgebra encaram sérias dificuldades tais como, atribuir significado a novos símbolos mas também atribuir novos significados a símbolos já conhecidos, que foram utilizados num contexto aritmético.

O Quadro seguinte, construído por Vosniadou, Vamvakoussi e Cristou (2007) ilustra as semelhanças e diferenças entre números, num contexto aritmético, e símbolos literais, num contexto algébrico.

QUADRO 4. SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENTRE NÚMEROS, NUM CONTEXTO ARITMÉTICO, E SÍMBOLOS LITERAIS, NUM CONTEXTO ALGÉBRICO

	NÚMEROS NATURAIS NA ARITMÉTICA	SÍMBOLOS LITERAIS COMO VARIÁVEIS NA ÁLGEBRA
FORMA SÍNAL	1,2,3,... Sinal positivo	a,b,x,y,... sinal positivo ou negativo
REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA	Cada número, no conjunto dos números naturais tem uma única representação simbólica, símbolos diferentes correspondem a números diferentes	Cada símbolo literal corresponde a uma série de números reais- símbolos diferentes podem representar o mesmo número
ORDENAÇÃO-DENSIDADE	Os números naturais podem ser ordenados através da sua posição na lista de contagem. Há sempre um antecessor e um sucessor. Não há números entre dois números consecutivos.	Os símbolos literais, em álgebra, não podem ser ordenados pela sua posição no alfabeto. Da mesma forma, um símbolo literal não tem antecessor nem sucessor
RELAÇÃO COM A	A unidade é o número natural	Não há nenhum número mais pequeno que

UNIDADE	mais pequeno.	possa substituir uma variável, a não ser que algo mais seja especificado

FONTE: Vosniadou, Vamvakoussi e Cristou (2007)

O Pensamento Algébrico desenvolve-se melhor a partir da contínua exposição a padrões e relações, começando-se desde logo no Jardim de Infância (Steen, 1998).

Para esta autora, a maior parte da Álgebra é uma extensão da Aritmética para um universo mais abstracto de quantidades representadas por letras. Não só a Álgebra, também a Aritmética tem um sentido lógico para uma aprendizagem eficaz e o Pensamento Algébrico deve ser cultivado em paralelo com a compreensão aritmética.

De facto, para muitos estudantes e professores, a Matemática começa por ser um mundo de números e procedimentos numéricos, com a Aritmética, e mais tarde transforma-se num mundo de símbolos e procedimentos simbólicos, com a Álgebra, o que muitas vezes falta é uma ligação entre os números e os símbolos e entre as situações-problema e as ideias acerca das quais nos fazem pensar (Thomson & Smith III, n.d.).

Sobre a evolução do raciocínio aritmético para um raciocínio algébrico ainda há algo importante a acrescentar. Segundo Vlassis & Demonty (2008) esta evolução foca-se na interpretação do significado da igualdade, de expressões algébricas e da letra, pois só assim se consegue que muitos alunos trabalhem em Álgebra sem conservarem um modo de pensar aritmético. Tratando-se de alunos entre os quatro e os seis anos, destaca-se o significado do sinal de igual que deverá ser abordado pelo educador por meio de uma linguagem informal. Nestas idades, a linguagem, isto é, as palavras, são o principal veículo de negociação de significados. Segundo Vygotsky, referido por Sprinthall & Sprinthall:

A associação entre a palavra e o seu significado pode tornar-se mais forte ou mais fraca, enriquecer-se pela ligação com outros objectos de um tipo semelhante, expandir-se por um campo mais vasto ou tornar-se mais limitada, isto é, pode passar por alterações quantitativas e externas, mas não pode alterar a sua natureza psicológica.

(1993, p.104)

A ineficácia da leitura ou da escrita pode gerar deficiência no processo mental de desenvolvimento da forma de pensar e de raciocinar da criança (Santos & Santos-Wagner, 2009). Estes autores, que bastante se têm dedicado ao estudo desta temática, acrescentam ainda que, em se tratando de linguagem algébrica é também importante que o aluno esteja familiarizado com a utilização de signos aplicados na Álgebra para que estes não constituam

um objecto de dificuldade. Pelo que foi dito, deve tratar-se a representação simbólica na Matemática com tanta prioridade como a leitura e a escrita.

A palavra é pois a via informal para trabalhar significados matemáticos com crianças de tão tenra idade. O formalismo de utilizar letras como variáveis não é adequado nestas idades, contudo, Kieran (2007a) esclarece que os estudantes de níveis elementares podem ser introduzidos ao Pensamento Algébrico, através de expressões numéricas, usando números como quase-variáveis, como por exemplo, através de afirmações como $87-39+39=87$, que são verdadeiras qualquer que seja o número que se some e se subtraia de volta. Estas actividades, que utilizam os números como quase-variáveis permitem aos professores ajudar os alunos a construir pontes entre o conhecimento existente e o conhecimento algébrico sem recorrer a símbolos algébricos. Trata-se do que se designa por algebrificação da Aritmética, ou seja, Aritmética generalizada.

Segundo Ameron (2003), a ruptura entre a Aritmética e Álgebra prende-se com o tipo de abordagem praticada durante a resolução de problemas, uma vez que, problemas aritméticos podem ser resolvidos directamente, através de respostas directas, enquanto problemas algébricos terão necessariamente que se traduzir para uma linguagem e representação formais, e só depois resolvidos. Diríamos que há que esbater esta diferença entre problemas aritméticos e algébricos, resolvendo-os como problemas aritmético-algébricos, ou seja, em que os números não são apenas entendidos como entidades mas são também entendidas as relações entre esses mesmos números e entre os números e as operações realizadas. Esta perspectiva vai também ao encontro da dita fase intermédia, sobressaindo a importância da suavidade da passagem do ensino da Aritmética para o ensino da Álgebra.

Para Kieran (2004) os alunos que operam numa estrutura aritmética de referência tendem a não ver os aspectos relacionais e as propriedades das operações, focam-se no cálculo. Assim, para uma transição bem sucedida da Aritmética para a Álgebra é necessário que:

1. o pensamento não se limite ao cálculo de uma resposta numérica mas que tenha o seu foco nas relações;

2. exista foco nas operações, bem como nas suas inversas, ou seja, na ideia de fazer e desfazer;
3. os alunos se concentrem na representação e não apenas na resolução de um problema;
4. se dê atenção aos números e letras e não apenas aos números, o que inclui:
 - (i) trabalhar com letras que às vezes podem ser incógnitas, variáveis ou parâmetros;
 - (ii) aceitar expressões literais como respostas;
 - (iii) comparar expressões equivalentes com base em propriedades, em vez de avaliações numéricas;
5. se reoriente o significado do sinal de igual.

O quadro nº.5 resume o que há em comum nas opiniões aqui apresentadas pelos diferentes investigadores, e também onde, para eles, reside o foco da evolução do raciocínio aritmético para o algébrico.

QUADRO 5. FOCO DA EVOLUÇÃO DO RACIOCÍNIO ARITMÉTICO PARA O ALGÉBRICO

	THOMSON E SMITH	CARRAHER E EARNEST	STEEN	VCLASSIS E DEMONTY	KIERAN
OPINIÃO COMUM	A Matemática começa por ser um mundo de números e procedimentos numéricos (Aritmética) e mais tarde transforma-se num mundo de símbolos e procedimentos simbólicos (Álgebra)				
QUANTO AO FOCO DA EVOLUÇÃO DO RACIOCÍNIO ARITMÉTICO PARA O PENSAMENTO ALGÉBRICO	Pensamento quantitativo	Significado algébrico das operações aritméticas (propriedades das operações)	Padrões e relações	Interpretação do sinal de igual	Expressões numéricas em que os números são utilizados como quase-variáveis

Carraher et al. (2006) relatam-nos que estudos em sala de aula, mostraram que as crianças russas que tinham treinado a representação algébrica de problemas verbais, do 1º ao 4º anos, registaram melhor *performance* do que os seus pares ao longo dos anos escolares e melhores resultados na resolução de problemas algébricos quando comparados com alunos do

6º e 7º anos dos programas tradicionais, que tinham tido cinco anos de Aritmética seguidos do ensino da Álgebra desde o 6ºano.

Uma pesquisa orientada por Kieran (2007a) concluiu que o desenvolvimento do raciocínio algébrico a um nível elementar da escolaridade enfatiza que a Aritmética pode ser conceptualizada sob formas algébricas e que construir um entendimento da Álgebra começa com a aprendizagem da Aritmética.

Vejamos então outros estudos que se têm debruçado sobre o mesmo problema.

3.1.2. ESTUDOS

Na Aritmética, a compreensão dos diferentes significados do sinal de igual tem uma enorme importância. Vários são os estudos publicados com o intuito de ajudar os professores a tomarem consciência de alguns equívocos relativamente ao significado do sinal de igual, sugerindo como estes podem ser evitados para não virem a prejudicar uma futura aprendizagem mais formal da Álgebra:

- (i) o sinal de igual pode surgir em situações aritméticas como $7 + 5 = 12$, sendo para os alunos, a primeira leitura de que se trata de um símbolo computacional e neste caso, os professores devem ler a equação acima como «7 mais 5 é equivalente a 12», enfatizando o sinal de igual como um símbolo de relação devendo os docentes ser incentivados a usar a frase «é o mesmo que» quando se lê o sinal de igual (Welder, 2008);
- (ii) pode trabalhar-se o sentido de equivalência do sinal de igual através de expressões numéricas como $8 + 4 = 7 + 5$, numa fase mais inicial da escolaridade, ou $8 = 3 + ?$ pedindo aos alunos que coloquem um número no local do ponto de interrogação que torne o texto verdadeiro (Welder, 2008);
- (iii) a utilização de frases numéricas como $78 - 49 + 49 = 78$ ajuda os alunos a desenvolverem um pensamento relacional sobre o sinal de igual. A um nível mais abstracto, utilizaram-se frases como $78 - a + a = 78$ que deixam transparecer algumas propriedades dos números e operações. Neste estudo conduzido por

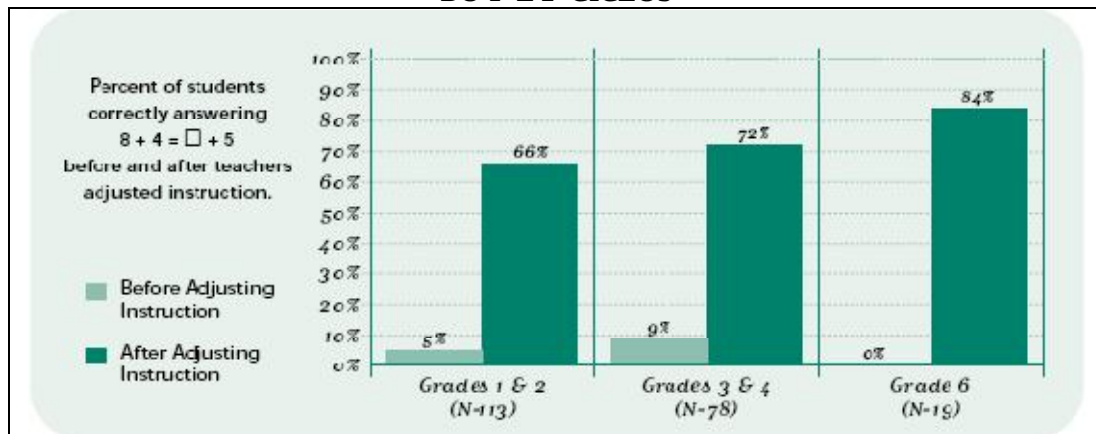
Welder (2008) os alunos foram capazes de construir, a partir da Aritmética, frases numéricas que eles conheciam ser verdade e frases algébricas em que utilizaram os símbolos $=$ e $\square$ para representar variáveis e relações entre as variáveis.

A natureza da relação algébrica em cada um dos casos indicados é bastante diferente devido à natureza dos objectos que se relacionam pelo sinal de igual. No item (i) é relevado o aspecto computacional do operador. Em (ii) trata-se de uma relação de equivalência e em (iii) do aspecto estrutural da adição e subtracção e da função relacional do sinal de igual.

O NCISLA (2000) tem-se dedicado nos últimos anos à pesquisa do desenvolvimento do Pensamento Algébrico de crianças, nos primeiros anos de escolaridade. Investigando sobre as diferentes concepções que as crianças têm do sinal de igual, concluiu que os professores que envolvem os seus estudantes em discussões matemáticas, ajudam-nos a esclarecer os seus mal-entendidos e a alcançar uma compreensão exacta do significado do sinal de igual.

É bastante interessante a informação do gráfico seguinte onde podemos observar a evolução do significado do sinal de igual ao longo da escolaridade, de alguns alunos do 1º e 2º Ciclos.

FIGURA 2. EVOLUÇÃO DO SIGNIFICADO DO SINAL DE IGUAL DE ALGUNS ALUNOS DO 1º E 2º CICLOS



FONTE: NCISLA (2000)

Depois de aplicado um programa de ajustamento às práticas lectivas, é absolutamente notória a evolução da compreensão dos alunos acerca do significado do sinal de igual.

Também para Cox (2003) representar e analisar situações matemáticas e estruturas é um componente importante do Pensamento Algébrico. Para construir conceitos a utilizar

posteriormente em propriedades tais como a comutatividade, a associatividade e formas equivalentes, as crianças precisam de vivenciar muitas experiências de situações matemáticas e estruturas através de representações e análises de igualdade. Se as crianças começarem a compreender a igualdade nos anos iniciais, poderão facilmente resolver igualdades para variáveis desconhecidas, mais tarde.

São vários os autores que referem que a investigação tem mostrado, e continua a mostrar, que o sinal de igual é muitas vezes mal interpretado pelos alunos em todos os níveis de ensino, que não compreendem o seu papel de equivalência. Nos primeiros anos de escolaridade, os estudantes são muitas vezes ensinados a olhar para o sinal de igual como um símbolo processual, que lhes diz para calcular algo, ou como um símbolo que separa o problema da sua resposta, em vez de o olharem também como um símbolo relacional ou de equivalência (Welder, 2008).

Devemos esperar que os alunos nos primeiros anos de escolaridade pensem algebricamente, pois efectivamente eles são capazes de tal, dizem-nos Cai e Moyer (2008). No entanto, os professores têm que apoiar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos nos anos iniciais, ajudando-os a fazer uma transição suave entre Aritmética e Álgebra, e a apreciarem a utilidade de abordagens generalizadas para resolver vários problemas.

Entre a aprendizagem dos números na Aritmética e a aprendizagem dos símbolos literais na Álgebra situa-se uma fase intermédia em que os números são utilizados como quase-variáveis, facto já referido anteriormente por Kieran.

Num estudo realizado por esta investigadora, alunos do 3º e do 5º anos conseguiram descobrir e justificar generalizações como «quando se adiciona zero a um número obtém-se o mesmo número com o qual se começou ou quando se subtrai um número a ele próprio obtém-se zero ou quando se multiplicam dois números pode-se trocar a ordem dos números». Esta descoberta indica que apesar de os alunos não usarem notação algébrica nas suas respostas eles conseguem expressar propriedades algébricas gerais sobre o sistema numérico.

Percebemos pois como a aprendizagem e o ensino da Álgebra é difícil, não só para os alunos, que devem alterar algumas das suas representações aritméticas, mas também para

os professores que devem encontrar meios de dar a compreender as novas noções e que nem sempre estão informados das concepções dos seus estudantes (Vlassis & Demonty, 2008).

É muitas vezes no Pré-Escolar e no 1ºCiclo do Ensino Básico que se encontram convicções e capacidades matemáticas nas crianças. É nestes níveis iniciais do ensino que é moldada a predisposição para a aprendizagem e para o uso da Matemática e em muitos casos fixada para sempre (Baroody, 2002).

Como dizem Schliemann e Carraher (2002), pensar sobre acções relativas a quantidades constitui uma base importante para muitos conceitos matemáticos, incluindo o conceito de número e cria alicerces para aprendizagens futuras.

Contactar-se-á em seguida com algumas sugestões concretas de actividades que promovem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

3.2.PADRÕES, GENERALIZAÇÃO, MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO

Vejamos de que forma o estudo dos padrões pode contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico e porque constitui um dos temas principais na abordagem da Álgebra Inicial.

O contacto com padrões tem início desde logo no conhecimento dos números. Ginsburg (2002), em entrevista¹, referiu que aos quatro anos de idade, as crianças realmente gostam de contar. Gostam de dizer as palavras de contagem. E há cerca de três níveis de contagem que eles podem aprender a fazer. O primeiro nível é quando eles têm que memorizar os números de 1 a 12. O próximo nível é a aprendizagem dos números de 13 a 19, e para as crianças estes são números estranhos. O terceiro nível é a contagem de 20 para cima, a qual é muito regular. Segundo Ginsburg, os investigadores acreditam que as crianças, quando contam, estão realmente a explorar o primeiro padrão regular que vêem na Matemática. As dezenas têm um padrão e depois de cada 10 o que se faz é adicionar 1, 2, 3,

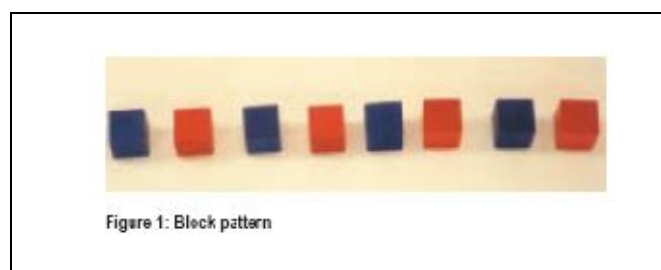
1 Entrevista intitulada Math Education for Young Children disponível para consulta em <http://www.scholastic.com/teachers/article/early-childhood-today-interviews-dr-herb-ginsburg-math-education-young-children>

4, 5, 6, 7, 8 e 9. Assim, os três níveis de contagem são muito diferentes: o primeiro é de memorização, o segundo nível além da memorização também envolve algumas regras estranhas e o terceiro é um verdadeiro padrão matemático, a base 10. Este especialista refere ainda que se deve encorajar as crianças até aos quatro anos de idade a contar até 100, porque isso os ajuda a perceber os padrões de forma profunda.

Quanto ao nosso sistema de numeração, Poulos (1998) explica que ele é construído sobre um sistema de padrões e de previsibilidade, e que os alunos devem ser capazes não apenas de identificar os padrões que vêm, mas também de encontrar razões e provas de que os padrões existem. Por exemplo, quando os alunos começam a olhar de perto para uma sequência de números, logo reconhecem que muitos padrões e relações são evidentes. Quando contam, aos cinco anos, rapidamente reconhecem um padrão na sequência 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... e que nesta sequência de contagem, o último dígito alterna entre 0 e 5. Mais tarde, estes estudantes podem então generalizar que qualquer número que é um múltiplo de 5 terminará em 0 ou 5. A partir deste conhecimento podem então prever os tipos de respostas que irão obter quando multiplicarem um número por 5.

Os padrões servem como pedra angular do Pensamento Algébrico, evidenciando-se não só no sistema numérico. Para Cox (2003), numa sala de aula, com crianças de quatro anos, pode começar-se com um padrão simples (ver Figura nº.3).

FIGURA 3. PADRÃO COM BLOCOS



FONTE: Cox (2003)

Para aumentar o nível de complexidade do padrão pode recorrer-se a atributos como a cor, a forma, tamanho, a posição ou até a textura.

Segundo Kieran (2007a), pesquisas realizadas sobre padrões sugerem que geralmente é mais proveitoso para jovens alunos permanecerem por longos períodos de tempo a explorar

aspectos das generalidades de padrões do que serem expostos, de modo demasiado rápido, à representação simbólica desta generalidade.

Os três últimos autores referidos, Ginsburg, Poulos e Kieran defendem o início do estudo de padrões a partir dos quatro e cinco anos de idade. São remetidas para mais tarde, a generalização de padrões, por Poulos, o aumento da complexidade de padrões simples, por Cox e a simbolização formal dos padrões, por Kieran. Há investigadores, como os que referimos em seguida, cuja opinião é de que nestas idades as crianças já desenvolveram capacidades de pensamento mais elaboradas do que antigamente.

A Matemática foi já considerada por muitos autores como a Ciência dos Padrões (Devlin, 1994), o que se deve ao facto de os padrões se encontrarem presentes no mundo que nos rodeia, ao longo de todo o percurso escolar e ainda por constituir um tema unificador das diferentes subáreas da Matemática.

A reiterar a ideia, de que os padrões unificam o universo Matemático, temos Steen (1998), que afirma que os padrões não só envolvem os alunos em todas as áreas da Matemática: Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade ou Estatística, como também em todos os tipos de actividades matemáticas, mais concretamente em actividades como:

- reconhecer - descobrir as oportunidades matemáticas em contextos diversos;
- visualizar - ver padrões nos dados e em situações não – matemáticas;
- verbalizar - expressar em palavras a natureza dos padrões vistos a olho;
- simbolizar - formalizar em símbolos matemáticos as relações encontradas em padrões;
- analisar - relacionar um padrão com outro, e prever novos padrões.

A prática destas actividades referidas por Steen parece ir ao encontro do sucesso dos modelos pedagógicos referidos por Papic e Mulligan (2007), facilitando a capacidade de modelação e generalização.

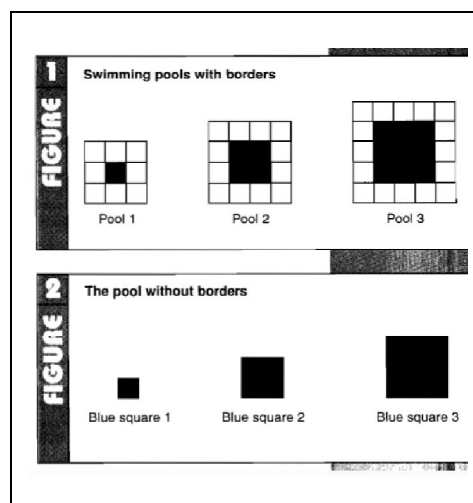
Os padrões ajudam os alunos a experimentar não só o poder de Matemática para resolver problemas, mas também o poder de Lógica, uma das áreas da Ciência Matemática, que valida afirmações matemáticas. A investigação de padrões, relações e funções dão assim continuidade à missão histórica da Álgebra nas escolas: ajudar os alunos a aprenderem a

pensar, e fornecer-lhes ferramentas para resolver problemas importantes, não só na sua vida escolar como na pessoal!

Crianças do Jardim de Infância, na opinião de Ferrini-Mundy, Lappan e Phillips (2000), interessam-se por assuntos como cores ou contagens, que integram as suas experiências de vida. Estes investigadores ilustram com o seguinte exemplo: considerem-se as seguintes piscinas, na figura nº.4, em que os azulejos pretos representam a água e os brancos a borda da piscina. Pode iniciar-se o estudo de relações entre o número de azulejos pretos e brancos colocando questões como: «Quantos azulejos estão em cada piscina?» ou «Existem mais azulejos pretos ou brancos?».

Em seguida pode alongar-se o problema um pouco mais, olhando para o padrão dos azulejos pretos isoladamente e então levantar outra série de questões como: «Quantos azulejos pretos estão em cada piscina?» ou «Construa o quadrado de azulejos pretos que apareceria na próxima piscina.», ou «O que é um quadrado?».

FIGURA 4. REPRESENTAÇÃO DE PISCINAS COM E SEM BORDAS



FONTE: Ferrini-Mundy, Lappan e Phillips (2000)

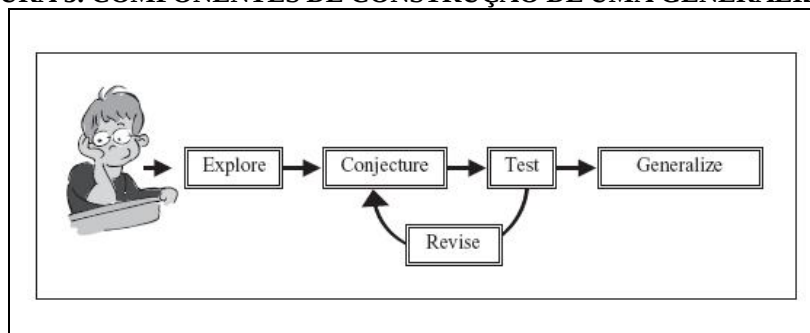
De facto, na sua opinião, muitas situações em Matemática, na Escola Elementar, podem dar aos professores uma oportunidade de generalizar, representar ideias e modelar processos matemáticos. Este foi um exemplo de uma configuração geométrica que ilustra como as ideias matemáticas podem ser desenvolvidas a partir da exploração de problemas e como a Álgebra surge sob a forma de modelação de situações-problema.

O objectivo primordial do Pensamento Algébrico é conseguir que as crianças pensem, descrevam e justifiquem o que está a acontecer, em relação a algumas situações matemáticas (Blanton, 2008). Dito de outra forma, é querer que as crianças desenvolvam a capacidade de generalizar uma proposição que descreve uma verdade matemática geral sobre um conjunto de dados. Segundo Blanton (2008), os três objectivos instrucionais implicados resumem-se a: representar, questionar e ouvir – são componentes que ajudam as crianças a construir as suas próprias generalizações.

Para que melhor entendamos como decorre o processo mental subjacente ao acto de generalizar, Blanton (2008) esclarece-nos quanto às diferentes etapas deste processo - figura nº.5. As crianças:

1. recebem uma situação matemática para explorar;
2. desenvolvem uma conjectura ou declaração matemática que seja verdadeira ou falsa;
3. testam a sua conjectura para ver se ela é verdadeira ou falsa;
4. se a conjectura não é verdade, podem revê-la e testar uma nova conjectura;
5. se a conjectura é confirmada, por ser verdade após evidências suficientes já reunidas, torna-se uma generalização.

FIGURA 5. COMPONENTES DE CONSTRUÇÃO DE UMA GENERALIZAÇÃO



FONTE: Blanton (2008)

Como referido anteriormente, é possível estimular o desenvolvimento da capacidade de generalizar das crianças, desde muito cedo. Segundo Kieran (2006), o Pensamento Algébrico pode ser introduzido em crianças muito novas através de experiências de generalização numérica de expressões usando números como quase-variáveis e através do estudo de padrões.

Num artigo do NCISLA (2000) foi publicado um estudo, conduzido pelos investigadores Thomas Carpenter and Linda Levi membros desse mesmo Centro de

Investigação, que revelava que o desenvolvimento inovador profissional do professor e a reorientação do ensino da Matemática abriu caminho para que alunos do 1º e 2º anos de escolaridade começassem a raciocinar algebricamente. Os resultados da investigação mostram ainda que estes alunos aprenderam a tecer e justificar generalizações sobre as propriedades e estrutura subjacentes da Aritmética, e ainda desenvolveram habilidades particulares de articulação e representação.

Em seguida apresenta-se alguns exemplos de actividades que foram dadas aos estudantes e que os conduziram a expressar generalizações do que acontecia quando se adicionava zero a qualquer número - figura nº.6.

FIGURA 6. CONJUNTO DE ACTIVIDADES QUE CONDUZEM OS ALUNOS A GENERALIZAÇÕES

**NUMBER SENTENCES USED
to Generate Generalizations**

Below are examples of number sentences that teachers used to help students articulate generalizations about zero and multiplication.

Examples: $78 + 0 = 78$; $23 + 7 = 23^*$

"When you add zero to a number, you get the number you started with."

Examples: $96 - 96 = 0$; $74 - \square = 74$

"When you subtract a number from itself, you get zero."

Examples: $96 \times 0 = 0$; $43 \times 0 = 43^*$

"When you multiply a number times zero, you get zero."

Examples: $65 \times 54 = 54 \times 65$; $94 \times 71 = 71 \times \square$

"When multiplying two numbers, you can change the order of the numbers."

* denotes a false number sentence

FONTE: NCISLA (2000)

O estudo mostrou inclusive que até as crianças destas idades são capazes de argumentar sobre conceitos matemáticos e operações, de modo que usualmente não se espera, ou não se esperava.

Num outro estudo, relatado por Papic e Mulligan (2007), com base em avaliações de competências das crianças, identificou-se que estas podem desenvolver conceitos de

padronização complexos antes da escolaridade formal. O programa de intervenção encorajou as crianças a verem a estrutura de repetição simples, usando uma unidade de repetição e a representarem padrões com diferentes formas espaciais, tais como frisos, grades, matrizes e padrões. Foi também revelador que o desenvolvimento de um padrão como uma unidade de repetição promovia outros processos matemáticos tais como o pensamento multiplicativo e capacidades de transformação, segundo os mesmos autores. Na opinião de Papic e Mulligan (2007), mais pesquisas são necessárias para explorar o impacto sobre o desenvolvimento matemático das crianças, alterações ao currículo e modelos pedagógicos que explicitamente incentivem a representação, a abstracção e a generalização de padrões de repetição, nos primeiros anos.

Se os conceitos de abstracção e generalização já foram aqui esclarecidos, o de representação precisa ser mais clarificado. Segundo Drouhard, Panizza, Puig e Radford (2005), é interessante notar que o uso das palavras *semiótica*, *linguística*, *história* ou *epistemologia* encerrava polémicas definições. Há uma imensa variedade de formas de representar objectos matemáticos, e estes sistemas de representação, incluindo a forma como as representações são interpretadas e transmitidas são descritos por uma ciência chamada Semiótica. Estes investigadores referem Charles Peirce como o fundador da Semiótica, e Umberto Eco como um dos cientistas contemporâneos que mais se evidenciou neste campo.

Dentro deste quadro, as expressões *representações semióticas* e *sistemas de representação semiótica* substituem as ambíguas expressões *representações* e *formas de representar*.

No entanto, alguns sistemas particulares de representação semiótica apresentam características adicionais: este é o caso das línguas naturais, como o Inglês, o Espanhol ou o Português - o número positivo cujo quadrado é dois, está escrito na linguagem natural Português - e de linguagens simbólicas - 2 está escrito na linguagem simbólica da Álgebra. Logo no Pré-Escolar as crianças deparam-se com representações semióticas, as dos números, que no fundo constituem símbolos. À medida que se avança na escolaridade as formas de representação vão-se diversificando e vão surgindo representações: pictóricas, verbais, de diferentes representações de um mesmo número, de representação da noção de variável através de uma letra ou um símbolo, gráficos, tabelas ou equações, conforme constataremos mais à frente, quando debruçarmos o nosso olhar sobre as orientações curriculares da Matemática.

Proposições e padrões podem ser generalizados. A generalização algébrica de um padrão reside na percepção de uma uniformização local que é depois generalizada para todos os termos da sequência e que alicerça a construção de expressões de elementos da sequência que permanecem fora do campo perceptivo (Radford, 2010). O nível de generalização que as crianças atingem dentro de uma tarefa, varia com a metodologia aplicada pelo professor e o nível de ensino. Muitas vezes as ideias complexas necessitam de períodos prolongados de tempo, de dias, semanas, meses, até anos para produzir pensamento nas crianças (Blanton, 2008). Por exemplo, no clássico Problema dos Apertos de Mão «5 amigos vão cumprimentar-se entre si com um aperto de mão. Quantos apertos de mão serão dados no final?», a capacidade do aluno descrever uma relação simbólica entre o número de pessoas no grupo e o número de apertos de mão entre os elementos do grupo pode levar algum tempo, como explica este investigador. Tempo esse que dependerá da idade e experiência desses alunos. Segundo a sua experiência, neste tipo de tarefas as crianças aprendem a usar ferramentas de representação como: tabelas de funções, interpretação de correspondências e relações nos dados, entendimento das quantidades que variam e desenvolvimento de linguagem matemática para simbolizar relações funcionais.

Vários foram os tópicos educativos abordados neste capítulo, que favorecem a construção dos alicerces do Pensamento Algébrico: padrões, generalizações, modelação e representações. Em seguida são apresentadas as perspectivas internacionais sobre Educação Matemática, primeiro de forma genérica e depois em particular sobre Educação Algébrica, nos primeiros anos de escola.

4. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - O QUE SE PENSA HOJE, A NÍVEL INTERNACIONAL

Estudos têm sugerido que o crescimento do cérebro é altamente dependente de experiências infantis precoces e que o sucesso a longo prazo na aprendizagem exige experiências de qualidade durante os primeiros anos.

Fox, 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (2007)

Para situar conceptualmente a Educação Matemática a nível internacional começa-se por revelar as principais perspectivas internacionais apresentadas na *30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, em 2007. Referem-se duas importantíssimas associações, NAEYC e a NCTM que elaboraram um documento conjunto onde definem quais as características duma Educação Matemática Pré-Escolar de alta qualidade. Mais adiante serão referidas directrizes curriculares para o ensino-aprendizagem da Matemática e em particular da Álgebra Inicial, destacando-se as de Kieran, Clements, Sarama e Ginsburg. No final diversos estudos internacionais são dados a conhecer acerca do desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

4.1. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PERSPECTIVAS INTERNACIONAIS

Foi apresentado numa conferência, por Fox (2007), um trabalho de investigação que revelou quais as principais perspectivas internacionais que influenciam a Educação Matemática nos primeiros anos, mais concretamente durante a infância, não só na Austrália mas também nos países que estão num estado similar de desenvolvimento tecnológico. São quatro os principais focos a considerar, a nível internacional, na Educação Matemática:

- (1) o desenvolvimento nos primeiros anos;
- (2) a proficiência matemática nos primeiros anos;

(3) a política educativa da Matemática e do seu currículo, projectado para crianças jovens;

(4) a pesquisa existente fundamentada.

Descobertas neurocientíficas desta pesquisa confirmam a ligação entre as experiências das crianças pequenas e realizações futuras na sua vida. Estes estudos têm sugerido que o crescimento do cérebro é altamente dependente de experiências infantis precoces e que o sucesso a longo prazo na aprendizagem exige experiências de qualidade durante os primeiros anos. Os resultados da investigação confirmaram ainda que o desenvolvimento matemático ocorre nos primeiros anos e é crítico para o sucesso e realização, tanto na escola como na vida. O crescimento matemático infantil precoce juntamente com o número crescente de crianças que passam muito tempo em programas de primeira infância impulsionou a criação de políticas e programas que suportam o desenvolvimento dos cuidados educativos de anos iniciais. Nesta conferência constatou-se que algumas áreas essenciais continuam a carecer de pesquisa. Por exemplo, a influência da tecnologia na vida humana, num novo mundo caracterizado por uma comunicação diversificada e enérgica, vastas quantidades de informação, mudanças rápidas e altos níveis de numeracia.

Grande parte do nosso Mundo pode ser melhor compreendido com a Matemática. O Pré-escolar é um bom momento para as crianças se tornarem interessadas em contar, separar, construir formas, encontrar padrões, medir ou estimar. A qualidade da Matemática Pré-Escolar não passa pela Aritmética Elementar empurrada para as crianças mais novas, conforme iremos constatar mais à frente. Em vez disso, ela deve convidar as crianças a experimentarem a Matemática nos seus jogos, descrições e reflexões sobre o Mundo.

Segundo Clements (2001) precisamos realmente da Matemática Pré-Escolar por várias razões:

- (1) o currículo do Pré-Escolar geralmente inclui uma pequena quantidade de Matemática e portanto o seu conteúdo apresenta-se bastante anémico;
- (2) recentes projectos de desenvolvimento curricular têm mostrado que existem diferenças entre crianças às quais alguns projectos são aplicados e as restantes. Assim sendo, esta diferença pode ser reduzida;

- (3) as crianças do Pré-Escolar possuem habilidades matemáticas informais e podemos desfrutar delas desenvolvendo o seu conhecimento matemático informal que é muitas vezes surpreendentemente complexo e sofisticado.

Este investigador acrescenta que o sucesso das Educadoras junto dos seus alunos passa pois por construírem actividades quotidianas com as crianças, incorporando as suas origens culturais, linguagens, ideias matemáticas e estratégias.

Devem também oferecer oportunidades de participação activa, para ajudar as crianças a desenvolverem ideias pré-matemáticas e crenças positivas sobre a Matemática.

Neste momento faz-se notar a importância do perfil do Educador/Professor.

Mais uma vez, as associações já referidas, NAEYC e NCTM, reflectiram sobre o papel do professor de Matemática, em se tratando de crianças de tenra idade (Stone-MacDonald, 2011).

Para elas, na Educação Matemática de alta qualidade, com crianças entre os três aos seis anos de idade, os professores, na sua prática docente devem:

- 1) aumentar o interesse natural das crianças em Matemática e a sua disposição para usá-lo para dar sentido ao seu mundo físico e social;
- 2) construir sobre as experiências das crianças e dos seus conhecimentos, incluindo vivências com as suas famílias, a sua língua, hábitos culturais e suportes comunitários, abordagens individuais para a aprendizagem e o seu conhecimento informal;
- 3) basear o currículo da Matemática e as suas práticas de ensino no conhecimento cognitivo, desenvolvimento linguístico, físico e sócio-emocional das crianças pequenas;
- 4) usar o currículo e práticas de ensino que fortaleçam os processos de resolução de problemas das crianças, bem como representar, comunicar e conectar ideias matemáticas;
- 5) assegurar que o currículo seja coerente e compatível em termos relacionais e sequenciais com importantes ideias matemáticas;
- 6) providenciar para que a interacção das crianças seja sustentada em ideias matemáticas chave;
- 7) integrar a Matemática noutras actividades e as outras actividades na Matemática;
- 8) proporcionar tempo suficiente, materiais e disponibilizar o seu apoio para que as crianças participem num jogo em contexto que possam explorar e manipular ideias matemáticas com grande interesse;

- 9) introduzir activamente conceitos matemáticos, métodos e linguagem através de uma série de apropriadas experiências e estratégias de ensino;
- 10) apoiar a aprendizagem das crianças através de uma avaliação continua da sua Matemática.

A NAYEC e o NCTM têm algo de muito importante a acrescentar sobre os programas curriculares construídos, ou melhor dizendo, a construir (Stone-MacDonald, 2011). Para apoiar a alta qualidade da Educação Matemática, as Instituições, os docentes que trabalham no desenvolvimento curricular e os decisores políticos devem, na opinião destas associações, ao nível das políticas educativas, de formação e de desenvolvimento curricular:

1. criar uma preparação mais eficaz dos educadores de infância bem como dar continuidade ao seu desenvolvimento profissional;
2. usar processos de colaboração para o desenvolvimento de sistemas alinhados com padrões de alta qualidade, currículo e avaliação;
3. projectar estruturas institucionais e políticas que suporte a continuação da aprendizagem dos professores, o trabalho em equipa e o planeamento;
4. providenciar os recursos necessários para superar as barreiras de proficiência das crianças pequenas em sala de aula, na comunidade, a nível institucional e a outros níveis sistémicos.

Apresentadas as razões porque o Pensamento Matemático deve ser desenvolvido nas crianças desde cedo, e escutado como tal pode e deve ser feito, quer a nível curricular quer a nível da formação dos docentes intervenientes, por peritos nesta área do conhecimento, questionemo-nos agora sobre quais as perspectivas internacionais acerca da iniciação dos alunos do 1ºCiclo ao Pensamento Algébrico, que é o foco deste trabalho de investigação.

Se por um lado é durante o Ensino Pré-Escolar que se constroem os alicerces do Pensamento Matemático das crianças, vejamos como a investigação internacional explica a construção de alicerces do Pensamento Algébrico na passagem para o 1ºCiclo do Ensino Básico.

Ultimamente a Álgebra tem sido vista como a ciência da resolução de equações. Como nos esclarece Kieran (2004) alguns onze séculos mais tarde, a visão não mudou em

grande extensão mas a idade dos alunos que estudam Álgebra, sim. Segundo Kieran (2004) os estudantes do final do século 20, não tiveram que esperar até atingirem a idade adulta para começarem o seu trabalho com os símbolos literais e respectiva manipulação, geralmente guardados para o estudo da Álgebra depois de terem concluído o estudo da Aritmética. No entanto, esta investigadora explica que, para muitos, a aprendizagem da Álgebra não foi o trabalho de amor que tinha sido para Al-Khowarizmi e seus colegas matemáticos. Pesquisas realizadas por estes investigadores durante os anos 1970 e 80, apontam para algumas das dificuldades que os alunos encontravam sobre esta temática. Na opinião de Kieran (2004) alguns estudiosos, no final de 1980, conjecturaram que se repensássemos sobre o que é fulcral no entendimento da Álgebra no âmbito do programa de Matemática da Escola Elementar, talvez a Álgebra se pudesse tornar mais acessível para a maioria dos alunos.

Como acima mencionámos, o ensino da Álgebra tem sido tradicionalmente adiado para a adolescência por razões históricas, sendo o aparecimento da Álgebra relativamente recente. O que, na opinião de Carraher et al. (2006) aconteceu devido a suposições da Psicologia do Desenvolvimento e por análise das dificuldades que os alunos adolescentes têm com a Álgebra. Um estudo conduzido por estes investigadores fornece evidências de que alunos entre os oito e os dez anos conseguem usar ideias algébricas e representações que tipicamente não estão presentes nos primeiros anos do currículo da Matemática.

Há já estudos, segundo Kieran (2006), que tornaram evidente que a descoberta de que alunos do jardim-de-infância conseguem compreender o pensamento covariacional, os do 1ºano conseguem descrever como é que as quantidades se correspondem e os do 3ºano conseguem usar letras como variáveis. Esta autora acrescenta ainda que é polémica a introdução de letras - símbolos desde muito cedo, o que tem sido motivo de discussão entre vários investigadores.

Apesar de esta investigadora ter vindo a salientar a competência de crianças pequenas, também admite que há muitas coisas que elas não conseguem fazer e aprender como acontece com o reduzido sucesso no ensino da ordinalidade e com as ideias de equivalência. As crianças pequenas não podem aprender tudo, mas a mensagem central é que elas podem aprender muita coisa e nós ainda não temos uma ideia clara dos limites de sua

aprendizagem quando estas crianças se encontram envolvidas num currículo interessante, com um bom professor!

Aliás, Santos & Santos-Wagner (2009) referem que a comunidade matemática tem expressado a necessidade de, desde bastante cedo, se proporcionar aos alunos o contacto com a simbolização matemática de forma a minimizar futuras dificuldades encontradas na Álgebra.

Um estudo levado a cabo por Ameron (2003) revelou que para alunos dos 5º, 6º e 7º anos de escolaridade, o raciocínio e a linguagem simbólica parecem desenvolver-se como capacidades independentes, por exemplo, estes alunos conseguem resolver equações, tanto a nível formal como informal, apesar de a nível formal lhes ser mais difícil. Neste estudo foram aplicados métodos pré-algébricos informais de raciocínio e de simbolismo como uma forma de facilitar a transição entre a Aritmética e a Álgebra, com a finalidade de resolver problemas, que consistiram em:

- comparar quantidades e igualá-las de formas diferentes;
- discutir divergências de notações e diferentes significados de símbolos;
- praticar as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão e inverter estas operações;
- resolver problemas raciocinando sob múltiplas condições;
- raciocinar sobre expressões em que se efectuem substituições ou inversões e interpretá-las de modo global.

Projectou-se assim uma vertente de aprendizagem na qual o lema das tarefas era reconhecer e descrever relações entre quantidades usando diferentes representações: tabelas, somas, descrições retóricas e equações, escritas com palavras.

Ora, tal como já foi referido anteriormente, deve-se procurar estabelecer uma ponte entre a Aritmética e a Álgebra pois, no fundo, esta ponte é o alicerce do nascimento do Pensamento Algébrico. Podemos de facto questionar-nos sobre a capacidade de utilização de simbologia algébrica por crianças de tenra idade: serão elas capazes de interpretar e utilizar os símbolos próprios desta linguagem que é a Álgebra?

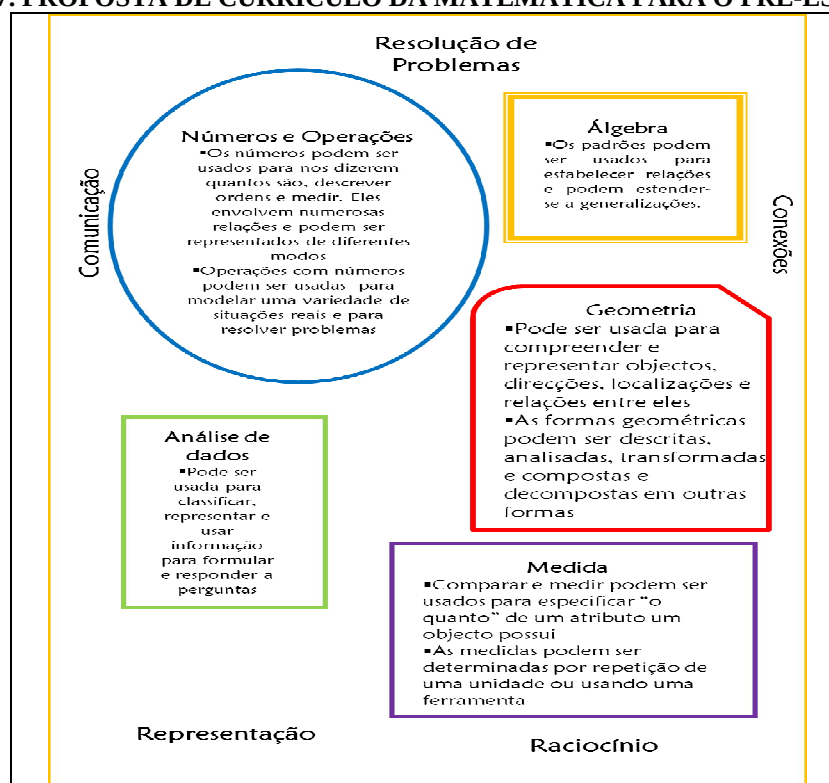
A este respeito, Kieran diz-nos que “Um estudo realizado com alunos do 3ºano revelou que estes conseguem aprender a utilizar símbolos algébricos e diagramas cheios de significado trabalhando com situações-problema de medida” (2006, p.26).

Kieran (2006) salienta que há estudos que resultaram de pesquisas efectuadas durante duas décadas que revelam que os alunos que operam com uma estrutura aritmética de referência tendem a não ver os aspectos relacionais das operações e focam-se no cálculo. É então necessário um ajuste considerável na aprendizagem para que os alunos aprendam a ler os símbolos algébricos, como por exemplo o sinal de igual, como outro que não um sinal para colocar uma resposta.

Segundo Welder “Muitos estudantes vêm igualdades como $5 + 2 = 3 + 4$ necessitarem de ser separadas em outras duas, nomeadamente $5 + 2 = 7$ e $3 + 4 = 7$ ” (2008, p.8). Uma pesquisa orientada por este investigador mostrou que os estudantes que tinham uma visão relacional do sinal de igual, mesmo sem experiência de Álgebra formal, foram melhor sucedidos na resolução de problemas e de equações do que aqueles que detinham uma visão operacional desse mesmo sinal.

Já no Enino Pré-Escolar, a conferência intitulada *Conference on Standards for Preschool and kindergarten Mathematics Education*, que teve lugar em Arlington, Virginia, em 2000, foi um evento histórico, por ter sido a primeira a reunir uma ampla gama de especialistas nas diversas áreas envolvidas com a criação de padrões educacionais (Clements, Sarama, & Bibiase, 2002). Sugeriu-se que o currículo da Matemática para o Pré-Escolar fosse estruturado como mostra a seguinte figura:

FIGURA 7. PROPOSTA DE CURRÍCULO DA MATEMÁTICA PARA O PRÉ-ESCOLAR



FONTE: Clements, Sarama, & Bibiase (2002)

Clements, Sarama e Bibiase (2002) acreditam que os padrões matemáticos curriculares para a Educação Infantil devem constituir directrizes flexíveis ao longo de caminhos de aprendizagem, para se conseguir compreensão da Matemática por crianças pequenas. Os critérios deverão ser os seguintes:

1. as orientações devem ser baseados em pesquisas disponíveis e práticas de especialistas;
2. as directrizes devem concentrar-se nas «grandes ideias» em Matemática para crianças;
3. as directrizes representam um intervalo de expectativas para os resultados que são adequadas ao desenvolvimento.

Ginsburg et al. (2004), conceituados investigadores desta área conceberam um *Programa Curricular de Matemática para o Pré-Escolar*, há cerca de seis anos, ao qual chamaram *Big Math for Little Kids*². Foi desenvolvido para crianças com quatro e cinco anos

² Disponível para consulta em <http://www.scholastic.com/teachers/article/early-childhood-today-interviews-dr-herb-ginsburg-math-education-young-children> uma entrevista concedida por Ginsburg, sobre este Programa.

de idade, estimulando e expandindo a Matemática que elas conhecem e aquela que elas serão capazes de fazer. Este Programa guiou-se por diversos princípios:

- ser construído com base nos interesses e conhecimentos das crianças;
- integrar a Matemática nas actividades de rotina de sala de aula;
- introduzir e enriquecer ideias de forma lúdica;
- desenvolver ideias matemáticas complexas;
- promover a reflexão e desenvolvimento da linguagem;
- encorajar o pensamento como se cada criança fosse um matemático;
- providenciar a repetição.

O seu curriculum encontra-se organizado em seis áreas principais: número, forma, medida, operações com números, padrões e lógica, conceitos espaciais e de navegação e histórias.

A ideia é que seja usado durante todo o ano, e incorpora actividades para fazer pelo menos uma vez por dia durante todo o ano, para as quais há um plano de ensino intencional. Um exemplo muito prático de como um professor pode apoiar o desenvolvimento de habilidades matemáticas, que consta deste Programa, é o seguinte: num saco colocamos círculos, triângulos, quadrados, rectângulos, e também figuras diferentes que chamamos de não-padrão, depois, as crianças fecham os olhos e têm que chegar ao saco e escolher um triângulo, e dizer por que é um triângulo, o que as força a pensar e a analisar propriedades.

Segundo os seus autores, *Big Math for Little Kids* é um dos primeiros Programas de Matemática para crianças pequenas, que permite tornar possível que as crianças mais desfavorecidas possam acompanhar de forma significativa a aprendizagem da Matemática.

Quanto a orientações curriculares sobre desenvolvimento do Pensamento Algébrico de alunos do 1ºCiclo do Ensino Básico, Cai e Moyer (2008) apresentam algumas das ideias do Currículo chinês que podem ajudar os alunos a fazer os ajustes necessários ao desenvolvimento de formas algébricas de pensar, nos níveis elementares de escolaridade. A primeira ideia é relacionar operações inversas para resolver equações. Nas escolas chinesas do 1ºCiclo, a adição e subtracção são introduzidas simultaneamente no primeiro ano, e a operação de subtracção é introduzida como o inverso da adição.

No segundo ano, são introduzidas a multiplicação e divisão com números inteiros, como o inverso da multiplicação: «Qual o número que multiplicado por 2 é igual a 8?», isto é,

«Se $() \times 2 = 8$, qual o número em $()$?». Abordagens semelhantes são tomadas em ambos os currículos de Singapura e Coreia do Sul.

O currículo de Matemática de Singapura não trata desenvolvidamente a Álgebra até ao último ano da escola de 1ºCiclo. A este nível, a ênfase está no desenvolvimento de conceitos algébricos e capacidades de manipulação algébrica como: usar letras para representar números desconhecidos, escrever expressões algébricas simples com uma variável envolvendo uma operação, encontrar o valor de uma expressão algébrica simples por substituição de uma variável, simplificar expressões algébricas que envolvem adição e subtração e resolver problemas com palavras que envolvem expressões algébricas, capacidades já evidenciadas por Kieran (2004).

A resistência à Álgebra nos Ensinos Básico e Secundário seria reduzida se pudéssemos remover o equívoco de que a Aritmética e a Álgebra são assuntos separados, como já aqui foi abordado. Tradicionalmente, a maioria dos currículos escolares de Matemática separam o estudo da Aritmética e da Álgebra, colocando o foco da Matemática no Ensino Básico da Aritmética e o da Álgebra no Ensino Secundário.

Kieran (2006) afirma que pesquisas anteriores tendiam a focar-se nos conceitos e procedimentos algébricos, na resolução de problemas e nas dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra. Actualmente, o desenvolvimento do Pensamento Algébrico vai mais além, conforme já constatámos e continuaremos a constatar.

Num contexto de perspectiva internacional, analisaremos em seguida as Normas definidas pelo NCTM, do Pré-Escolar ao 5º ano, que orientam o currículo neste sentido. Esta associação publicou os Princípios e as Normas para a Matemática Escolar, que constituem uma orientação científica de como os profissionais da educação devem educar matematicamente as suas crianças e o que estas podem e devem aprender, de acordo com a sua faixa etária. Temos então como Normas a serem seguidas no ensino da Álgebra, de forma transversal a todos os níveis de escolaridade:

Norma 1. Compreender padrões, relações e funções;

Norma 2. Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;

Norma 3. Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;

Norma 4. Analisar a variação em diversos contextos.

Estas Normas ajudam-nos a entender o conceito de Pensamento Algébrico, em termos da sua caracterização e deixam transparecer a existência e utilização de um simbolismo inerente a este tipo de pensamento, que poderá decerto ser mais ou menos formalizado.

Em particular, para as crianças do Pré-Escolar ao 2ºano de escolaridade, as referidas Normas publicadas pelo NCTM (2008) assumem a seguinte especificação, no quadro nº.6, indo ao encontro da concepção de Pensamento Algébrico apresentada.

QUADRO 6. ÁLGEBRA - NORMAS PARA OS ANOS PRÉ-2ºANO

COMPREENDER PADRÕES, RELAÇÕES E FUNÇÕES	▪ agrupar, classificar e ordenar objectos por tamanho, número e outras propriedades ▪ reconhecer, descrever e ampliar padrões, tais como: sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples e interpretá-los em diversas representações ▪ analisar a forma como são gerados tanto os padrões de repetição como os de crescimento
REPRESENTAR E ANALISAR SITUAÇÕES E ESTRUTURAS MATEMÁTICAS USANDO SÍMBOLOS ALGÉBRICOS	▪ ilustrar os princípios e as propriedades gerais das operações, como a comutatividade, através da utilização de números específicos ▪ usar representações concretas, pictóricas e verbais para desenvolver uma compreensão das notações simbólicas inventadas e convencionais
USAR MODELOS MATEMÁTICOS PARA REPRESENTAR E COMPREENDER RELAÇÕES QUANTITATIVAS	▪ modelar situações que envolvam a adição e a subtração de números inteiros através da utilização de objectos, figuras e símbolos
ANALISAR A VARIAÇÃO EM DIVERSOS CONTEXTOS	▪ descrever variações qualitativas, como o facto de um aluno ter crescido ▪ descrever variações quantitativas, como o facto de um aluno ter crescido 5 cm ao longo de um ano

FONTE: NCTM (2008)

E para as crianças do 3º ao 5º anos de escolaridade, encontramos-las no quadro nº.7.

QUADRO 7. ÁLGEBRA - NORMAS PARA OS 3º- 5ºANOS

COMPREENDER PADRÕES, RELAÇÕES E FUNÇÕES	▪ Descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos ▪ Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos
REPRESENTAR E ANALISAR SITUAÇÕES E ESTRUTURAS MATEMÁTICAS USANDO SÍMBOLOS ALGÉBRICOS	▪ Identificar propriedades, como a comutatividade, a associatividade e a distributividade, e aplicá-las ao cálculo com números inteiros ▪ Representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo ▪ Expressar relações matemáticas através de equações
USAR MODELOS MATEMÁTICOS PARA REPRESENTAR E COMPREENDER RELAÇÕES QUANTITATIVAS	▪ Modelar situações problemáticas, usando objectos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões
ANALISAR A VARIAÇÃO EM DIVERSOS CONTEXTOS	▪ Investigar a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável ▪ Identificar e descrever situações com taxas de variação constantes ou variáveis e compará-las

FONTE: NCTM (2008)

Existe um documento bastante recente, com data original de 2002 mas revisto em 2010, que resultou de uma tomada de posição conjunta entre a NAEYC e o NCTM intitulado *Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings* (Stone-MacDonald, 2011), no qual se encontram exemplos de habilidades que são adequadas desenvolver em crianças entre os três e os seis anos, na área curricular de Padrões/Pensamento Algébrico:

- cópias simples de padrões repetitivos, como uma parede de blocos de longo, curto, longo, curto, longo, curto, longo, ...;
- discutir padrões em Aritmética, por exemplo, adicionando um a um número qualquer resulta sempre no número de contagem seguinte.

Foram ainda exemplificados neste documento alguns tipos de estratégias que o professor pode adoptar: incentivar, modelar, e discutir padrões, colocando questões como por exemplo «O que está a faltar?» ou «Por que você acha que é um padrão?». Propor às crianças que encontrem padrões de cor e de forma no meio ambiente ou padrões de números nos calendários e gráfico, por exemplo, com os números 1-100, ou então que encontrem padrões

em Aritmética, como o reconhecimento de que quando o zero é adicionado a um número, a soma é sempre esse número, são mais algumas sugestões fornecidas.

Viu-se pois até ao momento quais as principais orientações internacionais do desenvolvimento do Pensamento Algébrico em crianças do Pré-escolar ao 5º ano de escolaridade.

Dada a tentativa de complementação actualmente existente entre a investigação científico-didáctica e a Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem, foque-se agora o olhar em alguns estudos internacionais nestes campos.

4.2. DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO - ESTUDOS INTERNACIONAIS

A investigação em Psicologia da Aprendizagem da Matemática tem produzido estudos com impacto directo nas práticas do ensino desta ciência. É Baroody (2002) quem nos diz que a Teoria Psicológica e de Investigação pode desempenhar pelo menos dois papéis importantes na reforma da Educação Matemática: mudar crenças sobre o ensino e aprendizagem das crianças e proporcionar uma ferramenta de trabalho poderosa para desenvolver e orientar melhores práticas instrucionais.

Depois de realizada alguma pesquisa, apresentamos em seguida uma síntese de resultados de alguns estudos no que respeita à investigação sobre desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

- (1) Zazkis e Liljedahl (2002) levaram a cabo um estudo que explorou as tentativas de um grupo de professores do 1ºCiclo do Ensino Básico para generalizar um padrão numérico visual repetitivo. Os resultados indicaram que a capacidade dos alunos se expressarem verbalmente, na generalidade, não foi acompanhada e não dependeu da notação algébrica. No entanto, os participantes muitas vezes percebiam as suas soluções completas e precisas sem se envolverem em simbolismo algébrico;
- (2) Warren e Cooper (2008) orientaram um estudo que explorou o papel de padrões e relações no desenvolvimento da compreensão matemática dos três aos cinco anos, em

especial do Pensamento Algébrico. O principal foco de abordagem desta temática assenta no papel de diferentes representações e discursos e em ajudar os alunos a ver relações dentro e através de padrões. Concluiu-se que algumas das questões - chave e de aprendizagem que podem ocorrer nos anos elementares, no âmbito do desenvolvimento do Pensamento Algébrico inicial são: compreender os padrões e sustentar um pensamento funcional, reconhecer a relação entre dois conjuntos de dados, expressar uma relação de maneiras diferentes mas equivalentes e escrever uma regra padrão;

(3) uma das conclusões a que Warren e Cooper (2008) chegaram nos seus estudos foi que a capacidade de conseguir generalizar não pode ser tão estreitamente alinhada com a maturidade, como pesquisas anteriores sugeriram;

(4) Livneh e Linchevski (1998) projectaram tarefas numéricas que eram estruturalmente análogas a tarefas que tinham sido encontradas em problemas com contexto algébrico e apresentaram aos alunos iniciantes de Álgebra. Sobre este estudo:

(4.1) confirmou-se a hipótese de que os obstáculos detectados em contextos algébricos existem também em contextos numéricos correspondentes, e que estes obstáculos são generalizados;

(4.2) depois de provas aplicadas a alunos de 15/16 anos para testar os seus conhecimentos algébricos, os resultados conduziram a pelo menos duas reflexões: as novas aprendizagens só serão verdadeiramente adquiridas se integrarem os conhecimentos anteriores dos alunos e o ensino através de situações - problema constitui uma abordagem interessante, segundo os mesmos autores;

(4.3) testou-se empiricamente o pressuposto de que ensinar Aritmética para fins algébricos impediria os estudantes de Álgebra de cometerem alguns erros estruturais. Começar cedo com contextos algébricos ajudaria os alunos em contextos algébricos mais avançados.

Em síntese, podemos então concluir destes estudos que o ensino da Aritmética com fins algébricos evita incompreensões futuras por parte dos alunos, ao longo do estudo da Álgebra, que a capacidade verbal de generalização surge desde logo no 1ºCiclo do Ensino Básico e que um dos principais focos de abordagem assenta no estudo dos padrões,

desenvolvendo-se assim Pensamento Algébrico a partir desta temática, como relacionar, modelar ou generalizar.

Com o objectivo de retratar a Educação Matemática em Portugal, actualmente, no capítulo que se segue serão apresentadas diversas fontes de orientação curricular no nosso país e comparadas com as internacionais, em particular no que diz respeito ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico desde o Pré-Escolar ao 5ºano de escolaridade.

5. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM PORTUGAL

Os alunos no 1.º Ciclo desenvolvem o Pensamento Algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos. Ao chegarem ao 2º Ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e encontrando uma lei de formação através do estudo da relação entre os termos.

Ponte et al (2010)

Reúnem-se neste capítulo as principais fontes de orientação curricular para o ensino da Matemática. Primeiro, o Programa de Matemática do Ensino Básico para o 1ºCiclo, que data de 2010, sendo o mais recente, seguido duma breve referência à transição deste para o 2ºCiclo assim como do 1º Ciclo para o Pré-Escolar, através da análise das Metas de Aprendizagem da Matemática para o ensino Pré-Escolar, co-temporais com o Programa, também datadas de 2010. O Programa do 1ºCiclo será analisado comparativamente com as Normas Internacionais estabelecidas pelo NCTM, apresentadas no Capítulo 4, sob o foco do incentivo ao Desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos e ainda com algumas outras orientações curriculares internacionais. As Metas para o Pré-Escolar serão comparadas às Normas definidas pelo NCTM para uma melhor compreensão da continuidade pedagógica do Pré-Escolar para o 1ºCiclo.

Na segunda metade deste capítulo o olhar será debruçado sob as vertentes fundamentais do Pensamento Algébrico através de alguns trabalhos de investigação realizados em Portugal.

5.1. ORIENTAÇÕES CURRICULARES E RESPECTIVA COMPARAÇÃO COM ORIENTAÇÕES CURRICULARES INTERNACIONAIS

O mais recente Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al, 2010), assume que o processo de ensino-aprendizagem se desenvolve em torno de quatro pilares fundamentais, sendo um deles o Pensamento Algébrico:

- números e operações;

- Pensamento Algébrico;
- pensamento geométrico;
- organização e tratamento de dados.

Assim sendo, a Álgebra é introduzida como tema programático no 2.º e 3.º Ciclos, embora no 1.º Ciclo exista já uma iniciação ao Pensamento Algébrico. Este programa divide-se, ao longo do 2.º e 3.º Ciclos, em quatro grandes temas: Números e operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de dados. Contudo, no 1.º Ciclo do Ensino Básico não vemos surgir o tema Álgebra, embora existam objectivos de natureza algébrica nos outros temas deste ciclo, conforme a seguir evidenciaremos no quadro nº.8. No 2.º Ciclo, a Álgebra já aparece como um tema matemático individualizado, aprofundando-se o estudo de relações e regularidades e da proporcionalidade directa como igualdade entre duas razões.

É perfeitamente inovador neste Programa, a preocupação com o desenvolvimento do Pensamento Algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. A maior alteração em relação ao Programa anterior é o estabelecimento de um percurso de aprendizagem no 1º e 2º Ciclos que possibilite um maior sucesso na aprendizagem das crianças, considerando a Álgebra como forma de Pensamento Matemático, desde os primeiros anos.

No 1.º Ciclo, os tópicos e objectivos específicos estão distribuídos em duas etapas, a primeira durante os 1.º e 2.º anos e a segunda durante os 3.º e 4.º anos.

Os alunos necessitam pois de adquirir desembaraço perante diversos tipos de representação matemática, simbolismo algébrico e outros tipos de gráficos, tabelas, diagramas e esquemas. Este Programa não deixa de sublinhar que, em se tratando de crianças pequenas, antes das representações simbólicas, muitas vezes é apropriado usar representações icónicas. Estes alunos podem sentir necessidade de começar por representar objectos e relações matemáticas através das suas próprias representações não convencionais. Depois, à medida que o trabalho prossegue, o professor deve fazer sentir a necessidade de uma linguagem partilhada, comum, introduzindo progressivamente as representações matemáticas convencionais.

A exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números continua a ser importante. Os alunos devem procurar regularidades em sequências de números, finitas ou infinitas, e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geometricamente como numericamente, estabelecendo conexões entre a Geometria e a Aritmética. Este trabalho com regularidades generalizáveis, em que os alunos podem descobrir e formular as regras por si próprios, ajuda a

desenvolver a sua capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico desde cedo.

Apesar de a principal referência dos conteúdos programáticos em Portugal serem as Normas definidas pelo NCTM, considerou-se interessante apresentar também uma comparação com os currículos de outros países, dada a relevância científica das suas publicações nesta área do conhecimento.

Veja-se então agora como se relacionam os princípios orientadores do Programa de Matemática para o 1º e 2º Anos do Ensino Básico³ com as orientações estabelecidas pelo NCTM e também pela Coreia (Lew, 2004) e pelo Novo México⁴, que tratam a aprendizagem da Álgebra Inicial e o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Para tal, vejamos o quadro nº.8 que em seguida se apresenta, organizado por temas.

³ Optei por comparar com o Programa de Matemática para o 1ºCiclo do Ensino Básico, apesar de também existirem as Metas da Matemática para o 1ºCiclo, mais recentemente publicadas em 2012, dado o primeiro ser mais específico. Contudo, ambos convergem para os mesmos princípios orientadores.

⁴ Os padrões curriculares do Novo Mexico, para o 1ºCiclo, encontram-se disponíveis para consulta em <http://mc2.nmsu.edu/>

QUADRO 8. RELAÇÃO DO PROGRAMA NACIONAL DE MATEMÁTICA DO 1º E 2º ANOS DO 1º CICLO COM O DE OUTROS PAÍSES

1º/2º ANO	PROGRAMA/METAS	NCTM (PRÉ-ESCOLAR-2º ANO)	COREIA	NOVO MÉXICO
NÚMEROS	Classificar e ordenar de acordo com um dado critério. Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números Utilizar a simbologia $<$, $>$ e $=$ Identificar e dar exemplos de diferentes representações para o mesmo número Representar números na recta numérica. Usar os sinais $+$, $-$, $\times$ e $:$ na representação horizontal do cálculo Resolver problemas envolvendo relações numérica	Agrupar, classificar e ordenar objectos Reconhecer, descrever e ampliar padrões Analisar a forma como são gerados os padrões de repetição e os de crescimento	Decompôr todos os números até 10, inclusivé, usando diferentes métodos	Reconhecer, reproduzir, descobrir, estender e criar padrões de repetição (p.e. cor, forma, tamanho, som, movimento e números simples e traduzir de uma representação para outra) Contar com um gráfico de centenas (de 2 em 2 até 20, de 5 em 5 e de 10 em 10 até cem) Identificar padrões numéricos num gráfico de centenas Escrever frases numéricas que usem objectos concretos, pictóricos e representações verbais para expressar situações matemáticas usando símbolos convencionais e inventados (p.e. $+$, $-$, $=$) Representar formas equivalentes do mesmo número através do uso de modelos físicos, diagramas e expressões de números até 20 (p.e., $3+5=8$, $2+6=8$)
OPERAÇÕES	Identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção Resolver problemas envolvendo adições, subtracções, multiplicações e divisões	Ilustrar os princípios e as propriedades gerais das operações, como a comutatividade Modelar situações que envolvam a adição e a subtracção de números inteiros através da utilização de objectos, figuras e símbolos	Encontrar várias regras na tabela da multiplicação Fazer a tabela da multiplicação 12×12 com base em regras para a tabela da multiplicação de 9×9 Compreender a propriedade comutativa da adição Compreender a relação entre adição e subtracção Criar uma história que combine com uma expressão que envolva as operações de adição e subtracção	Demonstrar e descrever o conceito de igual usando objectos e escalas de equilíbrio Resolver frases numéricas abertas Descrever situações que envolvam adição e subtracção de números inteiros que incluam objectos, desenhos e símbolos (p.e. o Roberto tem 4 maçãs, a Maria tem mais 5)

			Colocar um problema a partir de expressões dadas que envolva as operações de adição e subtração	
GEOMETRIA	Comparar, transformar e descrever objectos, fazendo classificações e justificando os critérios utilizados Reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações Realizar, representar e comparar diferentes itinerários ligando os mesmos pontos (inicial e final) e utilizando pontos de referência. Ler e desenhar plantas simples Comparar e descrever sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças	Agrupar, classificar e ordenar objectos Reconhecer, descrever e ampliar padrões Analisar a forma como são gerados os padrões de repetição e os de crescimento	Desenhar figuras apropriadas que identifiquem um padrão que as crianças reconheçam Pintar desenhos coloridos com base num padrão	
MEDIDA	Comparar e ordenar comprimentos, massas, capacidades e áreas Resolver problemas envolvendo dinheiro.			
ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS	Classificar dados utilizando diagramas de Venn e de Carroll Ler, explorar e interpretar informação (apresentada em listas, tabelas de frequências, gráficos de pontos e pictogramas) respondendo a questões e formulando novas questões	Usar representações concretas, pictóricas e verbais para desenvolver uma compreensão das notações simbólicas inventadas e convencionais		
VARIAÇÃO/ VARIÁVEIS/INCÓGNITAS E EQUAÇÕES		Descrever variações qualitativas, como o facto de um aluno ter crescido e também quantitativas	Modelar uma situação usando uma expressão com $\square$	Descrever mudanças qualitativas (p.e., um estudante vai crescendo em altura, as árvores tornam-se maiores, o gelo derrete) Usar o símbolo $\square$ para representar valores desconhecidos Resolver uma equação encontrando condições necessárias

Várias são as observações que podemos tecer decorrentes da análise e procura de conexões a partir da observação do quadro anterior:

- No tema Números:
 - Investigar regularidades, só não se encontra explicitado no Programa coreano, e representar de formas equivalentes um mesmo número só não se encontra presente nas Normas do NCTM;
 - A utilização de simbologia como $<$, $>$, $=$, $+$ é referida apenas no Programa português e do Novo México;
- No tema Operações:
 - a modelação de situações problemáticas que envolvam as operações de adição e subtracção é comum aos quatro países, sendo apenas referenciadas adicionalmente as operações de multiplicação e divisão pelo currículo nacional;
 - Os princípios e as propriedades gerais das operações, como a comutatividade, apenas são evidenciados pelo NCTM;
- No tema Geometria:
 - O trabalho com padrões geométricos é evidenciado pelo NCTM e pela Coreia;
 - Apenas é dada relevância pelo currículo português a reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações, ler e desenhar plantas simples e comparar e descrever sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças;
- No tema Organização e Tratamento de dados: a utilização de representações concretas e pictóricas, como por exemplo, diagramas, tabelas de frequências ou pictogramas, são referidas no Programa nacional e pelo NCTM, sendo ausentes nas orientações coreanas e do Novo México;
- No tema Variação/Variáveis/Incógnitas e Equações:
 - A descrição de variações qualitativas está presente nas normas do NCTM e no Novo México mas ausente no currículo português e também no coreano;
 - A modelação de situações usando uma expressão com o símbolo $\square$ para representar valores desconhecidos, não é referida pelo NCTM nem no Programa curricular nacional, mas apenas pelos outros dois países, a Coreia e o Novo México. E, apenas este último, salienta a resolução de equações nestes anos de escolaridade.

Dado os tópicos e objectivos específicos do Programa de Matemática do Ensino Básico se encontrarem distribuídos por duas etapas, organizamos no quadro nº.9, que se segue, as Normas do NCTM do 3º ao 5º anos e os princípios orientadores do Programa de Matemática para o 3º e 4º anos do Ensino Básico no sentido de tentar perceber como essas Normas se encontram aplicadas no Programa nacional. Mais uma vez se comparam com as orientações do currículo Coreano e do Novo México.

QUADRO 9. RELAÇÃO DO PROGRAMA NACIONAL DE MATEMÁTICA DO 3º E 4º ANOS DO 1º CICLO COM O DE OUTROS PAÍSES

3º/4º ANO	PROGRAMA/METAS	NCTM (3º-5º ANOS)	COREIA	NOVO MÉXICO
NÚMEROS	Investigar regularidades numéricas Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos Resolver problemas envolvendo números na sua representação decimal	Descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos	Fazer figuras até ao 5º número triangular e 5º número quadrangular Determinar a 13ª figura de um padrão descoberto Determinar o valor de alguns dígitos representados por $\square$ ou de símbolos alfabéticos na multiplicação vertical Reconhecer a idade relacional entre dois irmãos Resolver um problema usando a proporcionalidade directa	Criar e estender padrões numéricos e geométricos incluindo padrões da multiplicação Resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade incluindo as de preço unitário (p.e., se 4 maçãs custam 80 centavos então uma maçã custa 20 centavos) Criar e descrever padrões numéricos e geométricos incluindo padrões de multiplicação e divisão Interpretar e avaliar expressões matemáticas usando parêntesis Desenvolver fórmulas simples explorando quantidades e as suas relações Resolver problemas que envolvam relações proporcionais (incluindo preço unitário e interpretações de mapas, p.e., se 1 polegada=5 milhas, então 5 polegadas=$\square$ milhas)
OPERAÇÕES	Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades. Resolver problemas que envolvam as operações em contextos diversos.	Identificar propriedades, como a comutatividade, a associatividade e a distributividade, e aplicá-las ao cálculo com números inteiros	Compreender a relação inversa entre as operações de multiplicação e divisão Determinar o valor de alguns dígitos representados por $\square$ ou de símbolos alfabéticos na multiplicação vertical Resolver uma equação usando a relação inversa entre as operações de multiplicação e divisão Colocar um problema que envolva uma expressão numérica sobre divisão	Reconhecer e usar a propriedade comutativa da multiplicação (p.e., se $5 \times 7 = 35$ então $7 \times 5 = ?$) Reconhecer e usar as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação (p.e., se $5 \times 7 = 35$, então quanto é 7×5?, se $5 \times 7 \times 3 = 15$, então quanto é $7 \times 3 \times 5$?) Explorar a utilidade das propriedades de comutatividade, distributividade, elemento identidade e elemento neutro quando se opera com números Explorar o uso de propriedades (comutativa, distributiva, associativa) nas operações com números inteiros

			Colocar um problema que envolva uma expressão numérica com cálculos mistos	
GEOMETRIA	Ler e utilizar mapas e plantas, e construir maquetas simples Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais	Descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos	Encontrar o número de triângulos equiláteros numa figura através de uma estratégia de simplificação	Criar, estender e descrever padrões numéricos e geométricos incluindo padrões da multiplicação e divisão
MEDIDA	Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais Resolver problemas respeitantes a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida SI			Usar modelos de pés e polegadas para expressar conversões simples da unidade em formas simbólicas (p.e., 36 polegadas = $\square$ pés $\times$ 12) que desenvolvam a compreensão conceptual versus as habilidades procedimentais Usar e interpretar fórmulas (p.e., Área = comp $\times$ largura) para responder a questões sobre quantidades e as suas relações Usar e interpretar fórmulas para responder a questões sobre quantidades e as suas relações
TEMPO	Ler e interpretar calendários e horários Resolver problemas envolvendo situações temporais Identificar intervalos de tempo e comparar a duração de algumas actividades			
ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS	Ler, explorar, interpretar e descrever tabelas e gráficos, e, responder e formular questões relacionadas com a informação apresentada Construir e interpretar gráficos de barras.	Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos Modelar situações problemáticas, usando objectos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões	Modelar situações usando um diagrama Organizar uma situação problemática sistematicamente recorrendo a uma tabela de uma dimensão para representar as condições do problema	Representar relações funcionais simples: a) resolver problemas simples envolvendo uma relação funcional entre duas quantidades (p.e., encontrar o custo total de múltiplos itens dado o custo/unidade) b) estender e reconhecer um padrão linear pelas suas regras (p.e., o nº de pernas de um certo n. de cavalos pode ser calculado: contando de 4 em 4, multiplicando o n. de cavalos por 4 ou usando tabelas) Modelar situações problemáticas com objectos e usar representações tais como: figuras, gráficos, tabelas e equações para desenhar conclusões Demonstrar como é que a variação de uma variável pode estar relacionada com a variação de outra variável (p.e., através de tabelas de valores)

				Representar e analisar padrões e funções simples, usando palavras, tabelas e gráficos Modelar situações problemáticas e usar gráficos, tabelas, desenhos e equações para desenhar conclusões (p.e., diferentes padrões de variação)
VARIÁVEIS/ INCÓGNITAS E EQUAÇÕES		Representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo. Expressar relações matemáticas através de equações Investigar a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável	Determinar o valor de alguns dígitos representados por $\square$ ou de símbolos alfabéticos na multiplicação vertical Resolver uma equação usando a relação inversa entre as operações de multiplicação e divisão Representar a relação entre dois conjuntos de números em termos de $\square$ e O Modelar situações usando uma expressão com $\square$	Representar relações entre quantidades sob a forma de expressões matemáticas, equações ou desigualdades Seleccionar símbolos operacionais e relacionais apropriados para tornar uma expressão verdadeira (p.e., completar $4\square3=12$, qual o símbolo operacional que falta?) Determinar o valor de lacunas (p.e., $139+\square=189$) Descrever relações entre quantidades sob a forma de expressões matemáticas, equações e inequações Usar e interpretar variáveis, símbolos matemáticos e propriedades para escrever e simplificar expressões e frases Usar letras, caixas ou outros símbolos que suportem números em expressões simples ou equações (p.e., demonstrar compreensão do conceito de variável) Identificar símbolos e letras que representem o conceito de variável como uma quantidade desconhecida Determinar o valor de variáveis em equações simples (p.e., $80 \times 15 = 40 \times \square$) Demonstrar e descrever taxas de variação de mudança que se relacionem com situações do mundo real (p.e., crescimento de plantas, idades dos alunos)

Da observação atenta deste quadro, resultam as seguintes conclusões:

- No tema Números:
 - A investigação de regularidades numéricas está presente nos quatro países;
 - O recurso a tabelas como forma de representação ou exploração de regularidades é referido apenas por Portugal e pelo NCTM;
 - A resolução de problemas que envolvam raciocínio proporcional só não é evidenciada pelo NCTM;
 - A interpretação e avaliação de expressões matemáticas usando parêntesis, só se encontra presente nas orientações curriculares do Novo México;
- No tema Operações:
 - As quatro operações básicas, adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como as suas propriedades são destacadas por qualquer um dos países referidos neste estudo;
 - A determinação do valor de alguns dígitos representados por $\square$ só está presente no currículo coreano;
- No tema Geometria:
 - A utilização de mapas e plantas apenas consta do Programa nacional;
 - A investigação de padrões geométricos é referida pelo NCTM e pelo Novo México;
- No tema Medida:
 - A resolução de situações problemáticas respeitantes a grandezas e quantidades é preocupação do Programa português e do Novo México;
 - Apenas é explícito no Programa nacional, sendo ausente nos restantes países, a resolução de problemas que envolvam visualização e compreensão de relações espaciais;
- No tema Organização e Tratamento de Dados:
 - é comum a todos os países a referência a formas de representação como tabelas, gráficos ou diagramas para encontrar soluções;
 - Apenas o currículo do Novo México refere explicitamente a compreensão de relações funcionais simples entre quantidades;
- No tema Variáveis/Incógnitas e Equações:
 - A expressão de relações matemáticas através de equações ou desigualdades só está presente nas Normas do NCTM e no Novo México;

- Com excepção de Portugal, os outros três países referem a utilização de letras ou símbolos para representar uma quantidade desconhecida,
- A investigação da variação de uma variável em função de outra está presente apenas nas Normas do NCTM e do Novo México.

O Programa de Matemática do Ensino Básico evidencia bastante atenção no que concerne à transição das competências algébricas que se pretendem desenvolver nos alunos do 1ºCiclo e do 2ºCiclo de estudos. Neste documento, Ponte et al (2010) referem que os alunos no 1.º Ciclo desenvolvem Pensamento Algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos.

Não sendo o 2ºCiclo o principal foco deste estudo não se lhe pode deixar de fazer uma breve referência dada a importância do modo como se pretende que seja feita a transição do 1º para o 2ºCiclo. Ao chegarem ao 2ºCiclo, os alunos ampliam e aprofundam o trabalho algébrico explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e encontrando uma lei de formação através do estudo da relação entre os termos. Os alunos desenvolvem ainda capacidades de identificar relações e de usar linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. No 1.º Ciclo trabalha-se com estruturas multiplicativas e com os números racionais, o que constitui uma base para o desenvolvimento da noção de proporção, tão importante no que diz respeito ao Pensamento Algébrico. No 2.º Ciclo, este conceito de proporção é aprofundado através da exploração de diversas situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade directa, razão e proporção.

No 5º e 6ºanos, o propósito principal do ensino é desenvolver nos alunos Pensamento Algébrico: a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos. As indicações metodológicas sobre esta temática variam:

- investigar regularidades, tanto em sequências numéricas finitas ou infinitas como em representações geométricas;
- privilegiar situações familiares aos alunos em contextos matemáticos simples no estudo da relação de proporcionalidade directa;
- generalizar propriedades das operações aritméticas como forma de desenvolver o Pensamento Algébrico, representando uma diferença substancial relativamente ao ciclo anterior;

- utilizar terminologia e simbologia matemáticas em situações variadas;
- relacionar diferentes formas de representação;
- relacionar a linguagem matemática com a linguagem natural;
- elaborar relatórios e pequenos textos sobre as tarefas realizadas e sobre assuntos matemáticos.

Quando o processo de ensino da Álgebra decorre sem o auxílio de ilustrações, de forma descontextualizada e relacionado com um conjunto de actividades mecânicas associadas a uma série de regras, a sua aprendizagem revela-se pouco significativa.

Consequentemente surgem algumas dificuldades no desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos. Num documento intitulado *Materiais de Apoio ao Novo Programa de Matemática, Álgebra: sequências e regularidades* (Dâmaso, 2010) são referidas duas dessas principais dificuldades. A primeira refere-se à capacidade de abstracção:

São imensos os alunos que sentem dificuldade em passar da fase concreta para a fase da abstracção, que pode ser associada à capacidade de criar categorias e exprimi-las, quer por meio de uma linguagem, ou quer por meio de qualquer outro sistema simbólico.

(2010, p.7)

Quando se exige aos alunos um pensamento abstracto, sem que anteriormente lhes tenha sido permitido desenvolverem a capacidade de imaginar a partir do concreto, eles recordarão a Matemática como um conjunto de procedimentos sem significado. É dito neste Programa que não se pode abstrair do nada e pretender o desenvolvimento dessa capacidade sem ser dada ao aluno a hipótese de imaginar.

Em Álgebra, além de ser necessária a utilização de operações para resolver um problema, é fundamental que o aluno o consiga representar através de um sistema simbólico adequado, facto que requer pensamento abstracto.

Outra das dificuldades prende-se com a passagem da Aritmética para a Álgebra, assunto já aqui referido por estudos internacionais. Esta passagem arrasta consigo uma simbologia própria e repleta de significados de difícil adopção pelas crianças. A resolução de problemas, recomendada pelo ME [Ministério da Educação], facilita a aprendizagem dos alunos em utilizar notação, simbologia e vocabulário próprios da Matemática, pois permite que os alunos associem a linguagem corrente à linguagem matemática. Estudos já revelaram que relativamente à linguagem empregue nas resoluções, os alunos que se valem de uma

forma sincopada por meio da qual a linguagem natural se alia à linguagem algébrica simbólica para expressar o seu pensamento, geralmente apresentam resoluções mais concisas e claras (Castro & Rodrigues, 2008).

Porque é importante também contextualizar o que é feito ao nível do Pré-Escolar sobre desenvolvimento do Pensamento Algébrico estendeu-se ainda o olhar sobre o Pré-Escolar, assim como se fez para o 2ºCiclo. Desta forma percebe-se como se efectua a transição tanto do Pré-Escolar para o 1ºCiclo como do 1º para o 2ºCiclo.

Uma vez que os padrões no Ensino Básico são transversais aos vários níveis de escolaridade e servem diferentes conteúdos, podem ser explorados desde o Jardim de Infância, como sugerem Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2007). Para estes autores há um longo caminho ainda a percorrer junto de alunos e professores, sobre as potencialidades dos padrões no desenvolvimento do conhecimento matemático. Na sua opinião, estas potencialidades:

(...) vão muito mais além do que a exploração de padrões de repetição e além do campo da Geometria. A sua riqueza reside na sua transversalidade, tanto ao nível de conteúdos como das capacidades que promove nos estudantes de qualquer nível, e também na forte ligação que tem com a resolução de problemas, como uma estratégia riquíssima que é a procura de padrões.

(2007, p.11)

O estudo dos padrões, como já vimos, é um dos itens do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, embora outros estejam implicados.

As Metas de Aprendizagem da Matemática, para a Educação Pré-Escolar, estabelecidas pelo ME⁵ definem as competências que se espera desenvolver nos alunos, no final da Educação Pré-Escolar. Constituem assim uma referência, quer para os Educadores de Infância, quer para os Professores do 1.º Ciclo que dão continuidade ao trabalho desenvolvido pelos educadores do ensino Pré-Escolar. É desde logo nesta fase que as crianças começam a construir uma relação com a Matemática, que se irá repercutir no desenvolvimento de aprendizagens futuras. Cabe ao educador: fomentar o questionamento, incentivar a resolução de problemas com encorajamento e persistência, proporcionar acesso a livros e histórias com números e padrões, propor tarefas de natureza investigativa, organizar jogos com regras e

⁵ podem ser consultadas em <http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt/educacao-pre-escolar/metas-de-aprendizagem/metas/?area=7&level=1>

combinar experiências formais com informais utilizando uma linguagem própria da Matemática, conforme se lê nesse documento.

Estas Metas não fazem referência ao termo Álgebra ou Pensamento Algébrico, ao contrário do que acontece com as Normas definidas pelo NCTM.

Em ordem a uma compreensão mais profunda do desenvolvimento de competências implicadas na Educação Pré-Escolar e tendo em vista estabelecer relações entre estas Metas, organizadas por Temas, e estas Normas, organizou-se o seguinte quadro:

QUADRO 10. RELAÇÃO METAS DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA/NORMAS (NCTM) PRÉ-ESCOLAR-2ºANO

TEMAS e METAS DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA (ENSINO PRÉ-ESCOLAR)	NORMAS PRÉ-ESCOLAR-2ºANO
Números Operações Meta1 - Classificação de objectos Meta2 - Contar objectos com uma dada propriedade Geometria e Medida Meta15- Identificar semelhanças e diferenças entre objectos e agrupá-los de acordo com diferentes critérios (previamente estabelecidos ou não), justificando as respectivas escolhas. Meta 16 - Reconhecer e explicar padrões simples. Meta 17- Utilizar objectos familiares e formas comuns para criar e recriar padrões e construir modelos	Norma 1. Compreender padrões, relações e funções Agrupar, classificar e ordenar objectos Reconhecer, descrever e ampliar padrões Analisar a forma como são gerados os padrões de repetição e os de crescimento
Números e Operações Meta 6 - Utilizar uma linguagem “mais” ou “menos” para comparar dois números Meta12 - Relacionar a adição com o combinar dois grupos de objectos e a subtracção com o retirar uma dada quantidade de objectos de um grupo de objectos Organização e Tratamento de Dados Meta 27 - Evidenciar os atributos dos objectos utilizando linguagens ou representações adequadas Meta 28 - Colocar questões e participar na recolha dados acerca de si próprio e do seu meio circundante, e na sua organização em tabelas ou pictogramas simples.	Norma 2. Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos Ilustrar os princípios e as propriedades gerais das operações, como a comutatividade Usar representações concretas, pictóricas e verbais para desenvolver uma compreensão das notações simbólicas inventadas e convencionais
Números e Operações Meta 11- Estabelecer relações numéricas entre números até 10 Geometria e Medida Meta 21- Usar expressões como maior do que, menor do que, mais pesado que, ou mais leve que para comparar	Norma3. Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas Modelar situações que envolvam a adição e a subtracção de números inteiros através da utilização de objectos,

quantidades e grandezas	figuras e símbolos
Números e Operações Meta 14- Expressar as suas ideias sobre como resolver problemas específicos oralmente ou por desenhos Geometria e Medida Meta 26- Expressar as suas ideias sobre como resolver problemas específicos oralmente ou por desenhos. Organização e Tratamento de Dados Meta 30 - Expressar as suas ideias sobre como resolver problemas específicos oralmente ou por desenhos.	Norma 4. Analisar a variação em diversos contextos Descrever variações qualitativas, como o facto de um aluno ter crescido e também quantitativas

Através de uma observação atenta do quadro anterior, podemos concluir que:

- no que diz respeito à Norma 1, todos os seus subitens se apresentam contemplados de forma muito clara nas Metas identificadas como correspondentes;
- sobre a Norma 2, a utilização de representações surge mais do que uma vez nas Metas identificadas como correspondentes, contudo, não se encontra referência à ilustração dos princípios e propriedades gerais das operações, como a comutatividade;
- a modelação de situações que envolvam a adição e a subtracção de números inteiros através da utilização de objectos, figuras e símbolos, estabelecida pela Norma 3, embora pouco clara nas Metas, pode ser trabalhada na Meta 11 através de relações que se estabeleçam de adição e subtracção;
- igualmente com pouco detalhe na definição das Metas, temos a Norma 4 que trata da descrição de variações de qualidade e quantidade. A expressão de ideias, oralmente ou por desenhos pode ser dirigida a situações de análise de variação qualitativa sendo desta forma trabalhada.

Encontra-se em revistas da especialidade (Roa & Questa, 2007) muitos exercícios que promovem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico em crianças de tenra idade. Trata-se de tarefas que estimulam o raciocínio abstracto, como puzzles, detectar erros em ilustrações, semelhanças e diferenças, matrizes, labirintos e actividades que envolvem correspondências e associações em que a criança é conduzida a classificar objectos de forma livre ou com critério, estabelecer relações quantitativas ou qualitativas e correspondências consideradas como associações básicas.

Como já vimos, as Metas de Aprendizagem da Matemática para o Pré-Escolar apontam a resolução de problemas como o alicerce do processo de ensino-aprendizagem. A proposta de situações problemáticas que gerem no aluno a necessidade de elaborar pensamento e utilizar linguagem matemática deve ser uma constante preocupação do professor.

A compreensão da especificidade da linguagem algébrica, rica em símbolos que se traduzem em verdadeiros conceitos, justifica a importância de trabalhar em sala de aula com vários tipos de pensamento: de generalização, de abstracção e de formação de conceitos inter-relacionados com a linguagem.

Na Brochura de Geometria do ME, denominada *Textos de Apoio para Educadores de Infância* (Mendes & Delgado, n.d.), cuja publicação é anterior à data de publicação das Metas de Aprendizagem da Matemática para o Pré-Escolar (2010), já haviam sido definidas orientações acerca de como trabalhar padrões com os alunos mais pequenos. No Jardim-de-Infância, tendo em conta a necessidade de concretização das crianças, e a sua ainda dificuldade em pensar de forma abstracta, as experiências com padrões devem ser alicerçadas em materiais diversos, tais como: cubos, blocos lógicos, fichas coloridas, palhinhas, utensílios do dia-a-dia e materiais de desperdício como tampas de garrafas, pacotes, caixas de fósforos, papel de embrulho, paus de gelado, etc. Por outro lado, o facto de se poder usar materiais diferentes para representar o mesmo padrão, ajuda à generalização do mesmo.

Em termos de orientações curriculares, o desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação de Infância dá especial destaque ao trabalho com padrões geométricos. Ao transitarmos para o 1ºCiclo, as regularidades a estudar deverão ser maioritariamente numéricas.

É importante referir que a leitura dos quadros anteriores não pode deixar de ser feita na perspectiva de que as Metas do Pré-Escolar e o Programa nacional para o 1º e 2º anos têm que ser olhados como um todo, para que faça sentido a comparação dos mesmos com as Normas do NCTM, estabelecidas para o Pré-Escolar ao 2ºano.

Neste sentido e de forma sucinta, depois de analisados os três quadros anteriores, podemos formular diversas conclusões. Relativamente às Normas, a classificação de objectos é referenciada também nas Metas do Pré-Escolar e seguida da ordenação dos mesmos no

Programa do 1º e 2º anos. As representações pictóricas surgem tanto nas Metas como no Programa. O estudo das propriedades gerais das operações nunca aparece nas orientações curriculares nacionais, de forma explícita, bem como a análise de variações qualitativas e quantitativas mencionadas nas Normas. A modelação de situações problemáticas através das operações soma e subtração surgem no Programa do 1º e 2º anos, acrescidas das operações de multiplicação e divisão que não se regista nas Normas.

Relativamente ao 3º e 4º anos, delineemos a seguinte síntese:

- nas Normas, a generalização de padrões geométricos e numéricos e a representação e análise de padrões e funções, não se encontram espelhadas no Programa;
- o conceito de proporcionalidade evidenciado no Programa não surge nas Normas;
- a identificação das propriedades gerais das operações já aparece em ambos, facto que anteriormente não se verificou;
- a representação da noção de variável e as equações são dois conteúdos completamente inexistentes nas nossas linhas curriculares até ao final do 1ºCiclo;
- a modelação de situações problemáticas e o recurso a representações de diferentes naturezas têm igual destaque e importância tanto nas Normas quanto no Programa;
- mais uma vez, a análise de variações qualitativas e quantitativas mencionadas nas Normas não têm reflexo no Programa.

Vejamos em seguida, quais as principais vertentes do Pensamento Algébrico, que incluem os Padrões mas não só, sobre as quais foram desenvolvidos alguns estudos, desde há alguns anos até à publicação do actual Programa de Matemática do Ensino Básico.

5.1.1. VERTENTES FUNDAMENTAIS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

A Álgebra pode começar desde cedo pelo estudo de padrões, no Jardim de Infância. Acontece que, o modo natural da criança pensar, no sentido em que pensar é uma actividade que está na sua natureza humana, perde-se com o avanço na escolaridade, ao longo do ensino tradicional. Tal acontece pois este tipo de ensino privilegia os procedimentos e as rotinas que é aquilo que as pessoas mais recordam dos tempos que passaram na escola (Vale et al., 2007). Em vez de se forçar os alunos para a aprendizagem de uma Álgebra simbólica e formal, deve-

se estimular os alunos a comunicarem os seus pensamentos, recorrendo às suas próprias palavras ou aos seus próprios símbolos. É pois possível, segundo os autores acima citados, que os alunos comecem a aprendizagem da Álgebra de modo intuitivo e motivador, por exemplo através do estudo dos padrões, presentes no mundo que os rodeia, esforçando-se por analisá-los e descrevê-los.

O estudo dos padrões também foi realçado por Almeida (2008) na sua dissertação de mestrado. Esta investigação assentou na seguinte questão: *Como é que as Educadoras de Infância, em Formação Inicial, colocam em prática os seus conhecimentos matemáticos sobre padrões, dando resposta ao desenvolvimento das crianças?*

Recorreu-se à observação, *in loco*, do estágio de um grupo de alunas. O palco de investigação foi o próprio Jardim-de-Infância onde estas realizaram o estágio, muito embora a investigação tenha sido primeiramente delineada com base nos dados recolhidos durante a análise dos relatórios de estágio e de uma entrevista exploratória.

No que respeita às conclusões, por um lado constatou-se a necessidade de uma maior clarificação nas Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar quanto à abordagem dos padrões, por outro lado, a necessidade de uma abordagem mais significativa sobre o tema Padrões no plano curricular da disciplina de Matemática do curso de Educação de Infância. Foi igualmente possível constatar que a prática das alunas se foi alterando durante esta experiência, conseguindo trabalhar padrões com crianças em idade Pré-Escolar de forma mais confiante e ajustada às capacidades destas. Também o conhecimento didático sobre o tema padrões foi gradualmente evoluindo em consequência das reflexões realizadas no grupo de estágio bem como das leituras feitas pelas alunas sobre a referida temática.

Em suma, a criação de momentos de reflexão e de pesquisa que possibilitem a partilha de ideias e a realização de leituras complementares revelou ser um aspecto fundamental na promoção da qualidade das práticas pedagógicas no âmbito da abordagem dos padrões.

Aliado a esta conclusão, sugere-se a criação de um espaço de apoio à prática profissional, com materiais e com alguém especializado que esteja mais próximo das dificuldades manifestadas pelas educadoras na Formação Inicial, revelando ser um contributo para a qualidade pedagógica relativamente ao domínio da Matemática no início da actividade profissional.

Ponte, Branco e Matos (2009) referem-se ao Pensamento Algébrico incluindo três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas. Veja-se o quadro seguinte, nº.11.

QUADRO 11. VERTENTES FUNDAMENTAIS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

REPRESENTAR	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar o sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
RACIOCINAR	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
RESOLVER PROBLEMAS E MODELAR SITUAÇÕES	▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

FONTE: Ponte, Branco e Matos (2009)

De facto, estas vertentes do Pensamento Algébrico convergem para as Metas e Normas referidas pelo ME e pelo NCTM, respectivamente, bem como para o Programa de Matemática do ME, notando-se assim uma partilha das características estruturantes deste tipo de pensamento. A *representação* é contemplada pela Norma 2, a *resolução de problemas e modelação* pelas Normas 3 e 4 e o *raciocínio* é de forma transversal abrangido por todas as Normas.

Embora não muita, alguma investigação já foi desenvolvida no nosso país sobre a temática do Pensamento Algébrico. No ano em foi publicado o mais recente Programa de Matemática para o Ensino Básico, Cardoso (2010) tentou, na sua tese de doutoramento, compreender a influência de um programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico lançado em Portugal a partir de 2005, na dinâmica da formação de quatro professores participantes. Em particular, pretendia-se investigar o impacto deste programa no conhecimento matemático e didáctico dos professores, com incidência no Pensamento Algébrico e no ensino e aprendizagens dos alunos envolvidos. O programa teve como objectivo fundamental a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática que contemplassem a planificação, condução e reflexão sobre as aulas, por parte dos professores envolvidos. De modo a cumprir estes objectivos foram

delineadas as seguintes vertentes fundamentais: sessões conjuntas de formação, prática de sala de aula acompanhada pelo formador e reflexão sobre a prática.

Para concretizar o estudo foram considerados quatro professores do 1.º Ciclo que frequentaram este programa de formação. Foram delineadas duas fases distintas neste estudo. Na primeira fase recolheram-se dados sobre aspectos genéricos do percurso profissional destes quatro professores: a relação do professor com a Matemática enquanto aluno e depois como professor, a forma como encara o seu ensino, as expectativas em relação ao progresso dos seus alunos e a forma como ia reagindo aos repto da formação. Na segunda fase, que correspondeu ao segundo ano de acompanhamento, procurou-se ganhar algum distanciamento entre a formação e a prática, observando e acompanhando do mesmo modo os professores mas dando-lhes agora uma maior dose de autonomia no seu trabalho. A selecção e organização de tarefas a propor aos alunos e outros materiais de ensino esteve agora mais a cargo de cada professor. Em relação aos conteúdos matemáticos a trabalhar nas aulas em que se fez o acompanhamento optou-se nesta segunda fase por afunilar os temas a trabalhar focando-os no desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Neste domínio, revelou-se muito positiva para estes quatro professores a focalização desse trabalho autónomo no tema do Pensamento Algébrico. Este resultou numa experiência curricular rica e inovadora para professores e alunos, tendo dado aos professores o ensejo de desenvolver o seu conhecimento matemático e didáctico num tópico que não lhes era familiar e, propondo a organização de aulas à volta de ideias motivadoras e acessíveis para os alunos. Estes professores em formação tentaram criar um ambiente de sala de aula no qual as crianças se envolvessem em actividades muito próximas da prática dos matemáticos – formular, testar e provar afirmações de generalidade. Nesta perspectiva Cardoso (2010) é da opinião que é possível e vantajosa a abordagem precoce de ideias algébricas.

A análise dos dados revelou que a proximidade da formação com a prática de sala de aula, nomeadamente o acompanhamento em sala de aula por parte da formadora, foi de facto um aspecto crucial. O estudo permitiu concluir que houve uma real necessidade de mudança das práticas, provocada pelo programa de formação, e ainda destacar a importância da descoberta de padrões e da generalização como processos matemáticos que, partindo da relação dialógica entre o desenvolvimento do sentido do número e do cálculo mental, é possível atingir verdadeiramente o cerne do Pensamento Algébrico.

Realmente, alguns autores são da opinião de que todos os alunos devem aprender Álgebra, mas para tal é necessário que compreendam os conceitos algébricos, as estruturas e

os princípios que sustentam as manipulações simbólicas e ainda como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas (Borrvalho & Barbosa, n.d.). É essencial para que os alunos aprendam Álgebra, que desenvolvam o seu Pensamento Algébrico, e percebam o significado dos símbolos.

Na secção seguinte aborda-se com alguma especificidade o desenvolvimento do sentido do número e fundamenta-se sobre o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Como adiante se verá, nesta construção vai-se favorecendo uma primeira percepção da estrutura da Aritmética que proporcione uma visão algébrica.

5.1.2. SENTIDO DO NÚMERO

No início da escolaridade, ou melhor, durante o Pré-Escolar, a primeira atenção na área da Matemática vai para o sentido do número. Pode ser entendido como um processo durante o qual as crianças vão aprendendo a compreender os diferentes significados e utilizações dos números e a forma como estes estão interligados (Castro & Rodrigues, 2008). Percebemos então que o conceito de sentido de número é mais abrangente que o conceito de conhecimento do número, apresentado nas Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar, em 1997, e portanto vai além das actividades aí subentendidas implicando uma abordagem que pressupõe a construção de relações entre números (Castro & Rodrigues, 2008).

Mas afinal o que se entende por sentido de número? De uma forma genérica, e segundo os autores anteriores podemos dizer que o sentido de número diz respeito à compreensão global e flexível dos números e das operações, com a finalidade de compreender os números e as suas relações e desenvolver estratégias úteis e eficazes para cada um os utilizar no seu dia-a-dia, na sua vida profissional ou enquanto cidadão activo. Inclui ainda a capacidade de compreender o facto de que os números podem ter diferentes significados e podem ser usados em contextos muito diversificados (Castro & Rodrigues, 2008).

Esta definição é partilhada por Silva (2010) para quem o sentido de número diz respeito não só à compreensão global dos números e operações com o objectivo de

compreender os números mas também as suas relações e ainda de desenvolver estratégias úteis e eficazes a utilizar no dia-a-dia, tratando-se de construir relações e modelos numéricos que vamos realizando ao longo da vida e não apenas na escola. Deste modo, desenvolve-se a capacidade de compreender que os números podem ter diferentes significados e podem ser usados em diversos contextos.

Com vista a especificar o conceito do sentido de número, apresentamos agora os vários aspectos chave do desenvolvimento desse sentido, apresentados por Gonçalves (2008), isto é, da operacionalização do sentido de número, no quadro nº.12:

QUADRO 12. ASPECTOS CHAVE NO DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE NÚMERO

ASPECTOS CHAVE NO DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE NÚMERO
▪ Compreensão da noção de correspondência biunívoca ▪ Construção de um sistema de números de referência ▪ Compreensão da noção de cardinal ▪ Conhecimento da sequência numérica ▪ Contagem para identificação da quantidade de elementos de um grupo ▪ Contagem a partir de um certo número ▪ Contagem de objectos de forma sincronizada ▪ Conhecimento de múltiplas relações dos números ▪ Compreensão da noção de inclusão hierárquica ▪ Compreensão das noções de compensação e de relação parte/todo ▪ Compreensão do significado de valor de posição ▪ Compreensão e aplicação das operações ▪ Compreensão das propriedades das operações ▪ Desenvolvimento de estratégias de cálculo ▪ Desenvolvimento do raciocínio dedutivo

FONTE: Gonçalves (2008)

Adquirir o sentido de número implica perceber as diferentes utilizações dos números quer na contagem, quer na ordenação, localização, estimação numérica, cálculos, ou ainda nas medidas e estimação de medidas de comprimento, de área, de volume, de capacidade, de massa, etc. (Silva, 2010).

Esta forma de olhar os números implica que estes não sejam tratados de modo isolado mas que sejam relacionados com situações do dia-a-dia ou com outras áreas da Matemática como a geometria ou a medida. Assim sendo, torna-se pertinente trabalhar com as crianças o sentido de número por meio de tarefas de natureza investigativa, pois estas proporcionam diferentes contextualizações.

Quando as crianças expandem o seu universo numérico até 100, alargam-se as situações do quotidiano nas quais esses números surgem: preços, idades, número de páginas, tamanhos de roupa e de sapatos, quantidades, distâncias, medidas de peso e de comprimento (Brocardo, Delgado, Mendes, Castro, Serrazina, & Rodrigues, n.d.). O significado atribuído aos números num determinado contexto constitui uma componente da literacia quantitativa que envolve a Matemática com o Mundo que nos rodeia.

As competências de cálculo das crianças em idade Pré-Escolar desenvolvem-se em simultâneo com as suas competências de contagem e mesmo quando o conhecimento dos números é ainda muito rudimentar, conseguem efectuar cálculos elementares (Castro & Rodrigues, 2008).

As crianças compreendem que se tiverem duas bolas e lhes dermos mais três ficam com cinco bolas - concretizando a acção com as bolas, representando-as com os dedos, desenhando-as ou calculando mentalmente sem qualquer apoio físico.

Estima-se que a maioria das crianças de cinco anos consiga identificar o número de pontos, entre dois e seis, por reconhecimento da mancha sem necessitar de contagem, fenómeno que dá pelo nome de *subitizing*, ou seja, por percepção visual simples, em especial se estas se parecerem com as pintas dos dados. Castro e Rodrigues (2008) ainda acrescentam que não é apenas a tomada de consciência das relações numéricas que facilita o cálculo mental, o desenvolvimento desta percepção simples de contagem também o facilita. E, com o tempo ocorre uma evolução para a percepção composta, ou seja, para o reconhecimento de quantidades superiores a seis por composição de percepções simples.

A percepção de valores pequenos sem recorrer à contagem de elementos é bastante importante no desenvolvimento do sentido de número pois permite a construção de relações mentais entre os números. Contudo, o processo de *subitizing* nem sempre acontece com facilidade para as crianças. Algumas crianças do Pré-Escolar e mesmo do 1.º Ciclo têm grande dificuldade em distinguir e perceber estas relações elementares. Precisam dum trabalho continuado e persistente do educador, com recurso a materiais apelativos e estruturantes como cartas de pontos, pratos de pontos ou cartões para percepção rápida, de modo a poderem verbalizar e confrontar as suas pequenas descobertas (Castro & Rodrigues, 2008).

Num estudo realizado por Silva (2010) os alunos do 2º ano de escolaridade entrevistados, revelaram que a sua visualização pictórica de um número surge inevitavelmente associada à contagem, só depois emerge a visualização numérica e por fim a decomposição. Para este autor, o desenvolvimento do sentido de número e das operações surge associado ao cálculo mental, isto porque os métodos e destrezas que se adquirem com o cálculo mental revelam conhecimento, compreensão dos números e entendimento das relações numéricas que se estabelecem entre eles.

Também Brocardo et al. partilham desta mesma opinião ao afirmar que “O desenvolvimento do sentido do número surge muito associado à aquisição de destrezas de cálculo mental, porque essas destrezas requerem um bom conhecimento e compreensão dos números e das relações entre eles.” (n.d., p.18).

Há diversas formas de representar os números: por palavras, por diagramas, pelo sistema indo-árabe, etc. Ora, com os números fazem-se diversas operações, como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. Estas operações podem ser feitas mentalmente ou com recurso a instrumentos, como o ábaco, a calculadora, ou os algoritmos de papel e lápis (Ponte, Barbosa, Fonseca, Santos, & Canavarro, 2006).

Relativamente às operações com os números, Brocardo et al. (n.d.) acrescentam que não só os números mas também as operações de adição e subtracção devem surgir inseridas na resolução de problemas da vida real. Estes problemas, ao relacionarem-se com a vivência dos alunos ajudam-nos a direccionar os seus conhecimentos e métodos informais para a resolução e atribuindo assim um significado real a tais operações, a adição surgirá associada a situações de acrescentar, e a subtracção a situações de retirar ou separar.

A subtil embora forte relação que deve existir entre a Aritmética e a Álgebra começa a fazer-se notar quando reparamos que alguns autores como Ponte et al. (2006) salientam que os números e as operações com números constituem conjuntos dotados de uma certa estrutura, dita algébrica, nos quais é possível estabelecer relações, como a relação de ordem e estudar propriedades como a densidade.

De facto, como já foi referido, os números e as operações com números são dotados de uma determinada estrutura dentro da qual se relacionam. O estabelecimento destas relações

numéricas é benéfico não só para o desenvolvimento do cálculo mental como também para a compreensão do sentido das operações.

Duas das características das estratégias de cálculo mental são a sua flexibilidade e variabilidade. Por exemplo, ao ter que calcular $12+15$ as crianças podem pensar em $12+15=10+2+10+5=10+10+2+5=20+7=27$ ou em fazer $12+15=15-3+15=15+15-3=30-3=27$. Os alunos têm de perceber que são várias as estratégias disponíveis ajustáveis aos números em causa e que não se trata de existir uma estratégia melhor que as outras (Brocardo et al., n.d.). Tomando esta consciência, ganham confiança em usar aquela que resultou da sua própria forma de pensar.

As relações entre os números e entre os números e as operações podem ser numéricas ou de outros tipos, como por exemplo resultantes da análise de padrões. As relações numéricas do tipo *o dobro de* - o dobro de 4 são 8 - ou *quase o dobro de* - 7 é quase o dobro de 4 - podem ser exploradas em sala de aula com as crianças, através do desenho dos dobros de alguns números.

O Projecto de Investigação *Desenvolvendo o Sentido de Número: perspectivas e exigências curriculares*, referido por Rodrigues (2010) e desenvolvido por investigadores das Escolas Superiores de Educação dos Institutos Politécnicos de Leiria, Lisboa e Setúbal, com o apoio da FCT entre 2004 e 2007, ao estudar o desenvolvimento do sentido de número em crianças do Pré-Escolar ao 6º ano de escolaridade, foi, em Portugal, pioneiro na investigação Matemática Pré-Escolar. Foi por ele referida a necessidade de mais investigação nesta área, procurando-se evidências que reforcem as ideias emergentes desse projecto e que “raros têm sido os estudos em Educação Matemática que se têm dedicado, no todo ou em parte, ao Pré-Escolar” (2010, p.22).

O estudo desenvolvido teve como objectivo identificar as características mais significativas do desenvolvimento do sentido de número em crianças do Pré-Escolar, tentando incentivar esse desenvolvimento através do raciocínio, da comunicação e da resolução de problemas. As competências a desenvolver com as tarefas aplicadas foram as seguintes: dar significado aos números, compreender a importância dos números no quotidiano, desenvolver competências de contagem e desenvolver a capacidade de estabelecer relações numéricas.

Os dois primeiros relacionam-se com o sentido de número e com o modo como as ideias que as crianças têm dos números se relacionam entre si e com outras ideias. A maioria das crianças evidenciou competências no que respeita ao cálculo mental, tanto em relação à adição como à subtração, quando o seu universo numérico terminava em cinco. Ao ser alargado para dez, surgiram algumas dificuldades que foram ultrapassadas com a ajuda do adulto e através de estratégias de representação das situações apresentadas. Esta investigação apresentou evidências de que as crianças mesmo que ainda não tenham adquirido determinadas estruturas lógicas, como as de conservação e de relação assimétrica, conseguem desenvolver as suas competências numéricas.

Ver-se-á em seguida com mais detalhe a importância da construção de diversos significados do sinal de igual no desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

5.1.3. SINAL DE IGUAL

Uma das relações numéricas que mais destaque tem tido quer como foco curricular quer como objecto de investigação é a relação de igualdade. Em Matemática, a relação de igualdade desempenha um papel essencial, tendo um significado muito mais próximo de equivalência do que de identidade.

Esta relação define-se como uma relação de equivalência, querendo tal dizer que goza das propriedades de equivalência: simetria, reflexividade e transitividade (Ponte et al, 2009). Pouco a pouco os alunos devem conseguir reconhecer e usar estas propriedades. Na expressão numérica $5 + 2 = 7$, os termos à direita, 7, e à esquerda, $5+2$, do sinal de igual, são diferentes, não existe identidade entre eles, mas representam o mesmo número, são equivalentes.

Estes investigadores chamam ainda a atenção para o facto de que em anos de escolaridade mais avançados:

- (i) o sinal de igual pode assumir ainda outros significados. Por exemplo, pode surgir em equações do tipo $8 + x = 18$ na qual este sinal identifica uma possível equivalência entre expressões, para certos casos. No fundo, coloca

a seguinte pergunta: *Será que as expressões dadas nos dois membros podem ser equivalentes, para algum valor de x ?*

- (ii) o sinal de igual pode ainda ser usado para definir uma relação do tipo funcional, como por exemplo: $y = 2x + 1$, sendo x um número natural entre 1 e 10. O sinal de igual assinala aqui a relação de dependência entre duas variáveis. Digamos que a pergunta que agora se coloca é: *Que relação deverá estabelecer-se entre os números x e y de tal forma que y seja o dobro de x mais uma unidade? Haverá apenas uma resposta possível?*

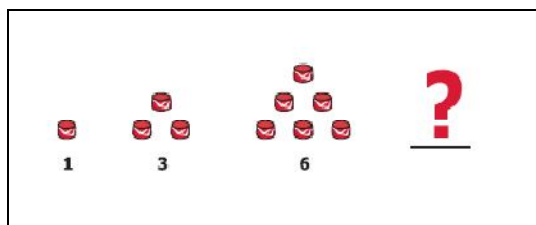
No item (i) estabelece-se uma pergunta acerca dos objectos que satisfazem uma relação de equivalência e por fim, no item (ii) está implícita uma função estabelecendo-se uma correspondência entre dois conjuntos, o que caracteriza o sinal de igual como uma relação funcional.

5.1.4. PADRÕES

Outras relações interessantes resultam da análise de padrões, que tanto fascinam as crianças. Na *Brochura de Geometria do ME* (Mendes e Delgado, n.d.) encontram-se dois exemplos de tarefas de continuidade de padrões ilustrados pelas figuras nº.8 e nº.9, a respeito do desenvolvimento do sentido relacional.

O Pedro tinha a construção que se segue.

FIGURA 8. PADRÃO DO PEDRO



FONTE: Mendes e Delgado (n.d.)

E o João tinha outra construção.

FIGURA 9. PADRÃO DO JOÃO

FONTE: Mendes e Delgado (n.d.)

Não se trata de contar mas de compreender o processo lógico de construção e conseguir deduzir sobre a sua continuação, ou seja, de compreender a relação entre as várias construções.

Nestes exemplos os padrões evidenciam relações numéricas e geométricas.

Mais facilmente identificáveis por crianças pequenas serão os padrões numéricos como 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2,... - padrão repetitivo 1, 2 - ou 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5,... - padrão repetitivo com parte crescente - que com o avançar no nível de escolaridade podem progredir para padrões mais difíceis como 2, 4, 6, 8, 10,... - padrão crescente de números pares - ou 1, 4, 7, 10, 13,... - padrão crescente, iniciado em 1 e adicionando-se 3 de cada vez.

Nesta linha de pensamento, Palhares e Mamede (2002) definem tais padrões como disposições que têm subjacentes regras lógicas de formação, que se apresentam estritamente repetitivas ou não como ilustraremos em seguida. Estes autores referem ainda podermos ter padrões em que exista:

- uma componente de repetição com alternância: ABABAB...;
- uma componente de progressão aritmética: ABAABAAAB...;
- uma componente de simetria: ABABBABA...;
- ou o acrescentar de uma segunda dimensão: ABABAB, BABABA, ABABAB,... cuja base se estabelece pela articulação entres diferenças e semelhanças.

Borralho e Barbosa (n.d.) defendem que a interacção dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado pois irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na aprendizagem e permite pensar no estudo da Álgebra desde o Pré-Escolar.

Os padrões podem ser uma excelente via para uma abordagem poderosa à Álgebra, sobretudo nos primeiros anos, servindo de suporte ao Pensamento Pré-Algébrico. Para tal, é necessário que os alunos sejam colocados em contacto com experiências algébricas informais que impliquem a análise de padrões e a busca de relações numéricas. Também a representação e generalização dessas mesmas relações deve ser fomentada, por meio de diferentes processos, como em seguida se fundamentará.

A procura de relações próximas, recursivas e distantes, envolvendo a generalização e a modelação entre os termos de uma sequência numérica gerada por um padrão exige a mobilização de um tipo de pensamento que é algébrico, promovendo-o e desenvolvendo-o (Borrallho & Barbosa, n.d.).

Tarefas que envolvam o estudo de padrões ajudam ainda os alunos a perceber a *verdadeira* noção de variável, que para a maioria é apenas vista como um número desconhecido em anos de escolaridade posteriores. A ideia de variável começa a formar-se ao longo da exploração de situações associadas à identificação de regularidades. A oportunidade da criança estabelecer generalizações, ainda que de uma forma intuitiva, partindo da identificação de padrões, contribui para o desenvolvimento do seu Pensamento Algébrico (Mendes & Delgado, n.d.).

Se colocarmos a nós próprios o desafio de pensarmos num exemplo de um padrão, podem ocorrer várias ideias, isto é, diferentes tipos de padrões. Quando nos confrontamos com o termo padrão, talvez pensemos de imediato em padrões visuais como os dos tecidos, papel de parede ou peças de arte mas o conceito de padrão não se encerra nestes exemplos. Para Vale et al. “Mais genericamente, padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, ou sons onde se detectam regularidades” (2007, p.1).

Em muitos momentos da nossa vida somos atraídos para as regularidades e frequentemente tentamos interpretar situações procurando, ou mesmo impondo, padrões. A importância do estudo de padrões é referida desde logo no Jardim-de-Infância, onde as crianças devem ser incentivadas a reconhecer, descrever, continuar, completar e inventar padrões (Mendes & Delgado, n.d.).

Canavarro (2007) introduz o conceito de Pensamento Algébrico recorrendo à apresentação e análise de um episódio ocorrido em sala de aula, numa turma mista com

alunos de 2.º e 3.º anos. A professora propôs uma tarefa designada por *Quantos telefonemas?* apresentando aos alunos as seguintes propostas de trabalho: «Cinco alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia, telefonaram uns aos outros a felicitar-se. Descobre quantas chamadas tiveram que fazer os cinco amigos para se felicitarem todos entre si... E se fossem seis amigos, quantas chamadas fariam? E se fossem sete amigos, quantas chamadas fariam? Consegues descobrir alguma regra para qualquer número de amigos?».

As suas produções escritas e conclusões enunciadas permitiram observar que as crianças:

- identificaram a estrutura matemática da situação em análise;
- estabeleceram relações numéricas entre as duas variáveis em causa;
- generalizaram uma regra para a determinação de qualquer termo da sequência, em linguagem natural, justificando-a;
- expressaram a generalização de duas formas distintas, por recorrência e através do termo geral.

Segundo esta investigadora trata-se de aspectos bastante sofisticados do raciocínio matemático, que nem sempre se têm reconhecido como próprios de crianças de sete ou oito anos de idade. Na realidade, são aspectos que revelam a possibilidade de os alunos muito jovens se envolverem em Pensamento Algébrico.

Num outro estudo conduzido por Mestre e Oliveira (2011a) pretendeu-se desenvolver o Pensamento Algébrico de alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade: explorando estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares, contribuindo para a mobilização da capacidade de generalização e para a sua expressão em linguagem natural, e ainda, iniciando-se um percurso em direcção à simbolização.

Os resultados preliminares indicaram que os alunos reconheceram relações numéricas, propriedades das operações envolvidas em expressões numéricas particulares, conseguiram descrever a generalização numa linguagem natural, e que estavam ainda numa fase inicial de um percurso em direcção à linguagem simbólica.

No fundo, reconhecem a estrutura subjacente às estratégias de cálculo de cada uma das tarefas, identificando relações numéricas de dobro e metade e as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição envolvidas nas expressões numéricas apresentadas. Usaram ainda essas relações numéricas e as propriedades das operações para justificar estratégias e representaram-nas por esquemas e diagramas de setas. De forma clara,

esses alunos referiram que podiam construir a tabuada do oito a partir do dobro da tabuada do quadro e a tabuada do cinco fazendo metade da tabuada do 10.

A exploração de padrões funciona como um contexto muito rico para desenvolver a capacidade de generalização das crianças na medida em que promove o reconhecimento das características comuns aos diferentes termos do padrão e possibilita a construção de uma regra geral. Para Mestre e Oliveira (2011b), ao explorarem padrões repetitivos, os alunos poderão reconhecer o motivo que se repete e ao explorarem padrões de crescimento, os alunos poderão também atender à mudança e à forma como umas variáveis dependem das outras. O envolvimento da generalização no estudo de padrões permitirá que os alunos passem de estratégias recursivas para estratégias que possibilitem obter qualquer termo da sequência sem necessitarem conhecer o termo anterior, conseguindo assim construir a regra geral de formação do padrão.

É de facto muito importante proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que envolvam o reconhecimento de regularidades matemáticas de forma a estimular a descoberta da continuidade de um padrão ou de uma sequência numérica ou até de uma propriedade numérica. A generalização é uma ferramenta essencial no Pensamento Algébrico.

Os padrões, no Pré-Escolar, assentam fundamentalmente no desenvolvimento do raciocínio lógico como atrás já se referiu, em particular, a representação é um aspecto importante na descoberta e no trabalho sobre os próprios padrões.

5.1.5. REPRESENTAÇÕES

As representações das crianças elucidam-nos sobre a sua compreensão das situações trabalhadas em aula pelo professor ou educador. Mas, de que tipo se espera que sejam as representações utilizadas por crianças entre os três e os cinco ou seis anos? As representações das crianças no Jardim-de-Infância são maioritariamente pictográficas, estão ligadas ao real. Algumas crianças utilizam registos iconográficos substituindo os elementos por riscos ou bolas como seus representantes. Outras ainda recorrem às representações simbólicas utilizando os numerais (Castro & Rodrigues, 2008). As representações escritas feitas pelas

crianças constituem um importante meio de registo e comunicação de ideias, estratégias e raciocínios.

Num estudo levado a cabo por Ponte e Velez (2011) no âmbito de um Projecto sobre Práticas Profissionais dos Professores de Matemática foram analisadas representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. Neste estudo analisou-se o modo como dois alunos de sete anos lidaram com representações em diversas tarefas. Os resultados mostraram que:

- os alunos compreenderam os aspectos fundamentais do sistema de representação de uma sequência e que são capazes de o usar para responder a questões sobre termos próximos;
- os alunos conseguiram também usar representações que lhes permitem, em certos casos, responder a questões envolvendo termos distantes;
- se sugere aos professores darem uma atenção particular à criação, em suma, à aprendizagem das representações.

Uma das tarefas, designada por *Combinações de roupa – O roupeiro da Joana* consistia no seguinte:

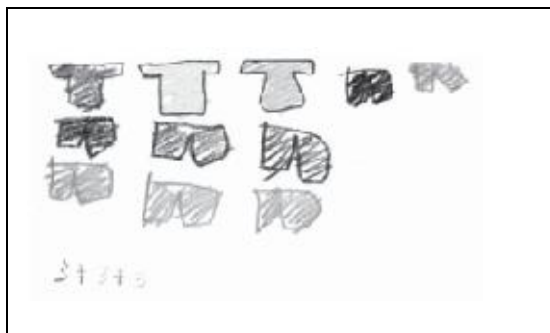
1. A Joana tem três camisolas e dois calções - Durante quantos dias consegue fazer combinações diferentes?
2. A mãe da Joana comprou-lhe uma saia nova - Quantas combinações a Joana passa a conseguir fazer?
3. Os calções da Joana ficaram muito pequenos e deixaram de lhe servir - Quantas combinações a Joana passa a conseguir fazer?

Trata-se pois de um problema de análise combinatória sendo o seu enunciado apresentado em linguagem verbal, e não sendo indicada qualquer representação matemática, pictórica ou simbólica. Para a resolver, os alunos têm que produzir a sua própria representação. Umas serão adequadas e outras há que não servem tão bem a resolução do problema.

Uma das alunas que já tinha tido experiências com tarefas semelhantes, na questão 1, começou por colocar as cinco peças de roupa numa só fila, primeiro as três camisolas que pinta de cores diferentes – rosa, amarelo, verde - e depois os dois calções que pinta de azul e laranja. De seguida, tomou cada camisola como âncora e representou por debaixo os 2

calções, produzindo assim uma possível representação de todos os casos possíveis – veja-se a figura nº.10.

FIGURA 10. REPRESENTAÇÃO DE UMA ALUNA NA SUA RESPOSTA À QUESTÃO1



FONTE: Ponte e Velez (2011)

Ao contar, primeiramente a aluna deixa de ter em atenção as combinações de peças de roupa e faz a contagem simples dos objectos que tinha representado – três na primeira coluna, três na segunda e três na terceira. Depois, só com a intervenção da professora é que retoma a ideia que não tem que contar peças de roupa isoladas mas as suas diferentes combinações, algo que a sua representação permite identificar mas não de modo evidente. É de salientar que a aluna, em vez de contar directamente os objectos representados na figura, estabeleceu uma relação entre estes objectos e os dedos da mão, contando a partir deles. Deste modo a aluna teve que coordenar três representações: a pictórica, através do esquema que desenhou, a activa, utilizando a contagem pelos dedos, e a simbólica recorrendo a designações dos numerais. Na sua resposta às questões 2 e 3 voltou a confundir o número de peças com o número de combinações. Desta forma, a representação pictórica que produziu não a ajuda a interpretar correctamente a situação.

Perante esta e outras tarefas propostas aos alunos, Ponte e Velez (2011) consideraram-nas um grande desafio para os dois alunos que sendo do 2.ºano, têm ainda dificuldade em expressar o seu raciocínio e necessitam de alguma ajuda para se fazer entender.

Segundo estes autores, muitos professores consideram que as representações matemáticas são aprendidas naturalmente pelos alunos com a realização das tarefas. No entanto, o desempenho dos alunos nestas tarefas evidencia a complexidade da aprendizagem das representações. A compreensão dos padrões visuais das sequências pictóricas permite aos dois alunos responderem correctamente a questões mais simples.

Por outro lado, o desempenho dos alunos nesta tarefa revelou que podem permanecer dificuldades na compreensão de certas representações aparentemente aprendidas. É o caso da aluna mencionada, que mostra muito desembaraço a construir um sistema de representação para combinações mas que rapidamente encara como constituído por objectos individuais. Isto sugere que o modo como os professores acompanham as representações dos alunos precisa de especial atenção. Há ainda a referir que na opinião dos alunos envolvidos neste estudo, as tarefas propostas «foram muito difíceis, mas fixes e divertidas», revelando como os alunos deste nível de ensino podem ser sensíveis ao desafio de tarefas matemáticas que achem interessantes.

Em todas as vertentes já abordadas, é sempre fundamental o apelo à expressão oral do raciocínio das crianças.

A maioria das crianças gosta de comunicar: umas com as outras, com quem as rodeia ou com amigos imaginários do seu mundo de faz de conta. A forma de comunicação privilegiada por quase todas é a oralidade. A comunicação oral é um excelente meio de desenvolvimento da linguagem, da criatividade, da organização reflexiva de ideias e dos vários tipos de raciocínio e é uma competência essencial no desenvolvimento matemático das crianças (Castro & Rodrigues, 2008).

No que toca ao desenvolvimento da capacidade de verbalização, o educador tem neste processo um papel fundamental, não só através da natureza das tarefas que propõe, mas também através do tipo de interacção que estabelece com as crianças durante a sua realização. O educador deve incentivá-las a verbalizarem as suas acções e desafiá-las com questões que as ajudem a explicar o que vão observando nas suas experiências e a relacioná-las com outras experiências (Mendes e Delgado, n.d.).

Claro que as interacções que se estabelecem entre as crianças também são importantes neste processo. Tarefas realizadas em pequenos grupos podem aumentar a necessidade de verbalização e explicação das acções de cada uma das crianças para com os colegas.

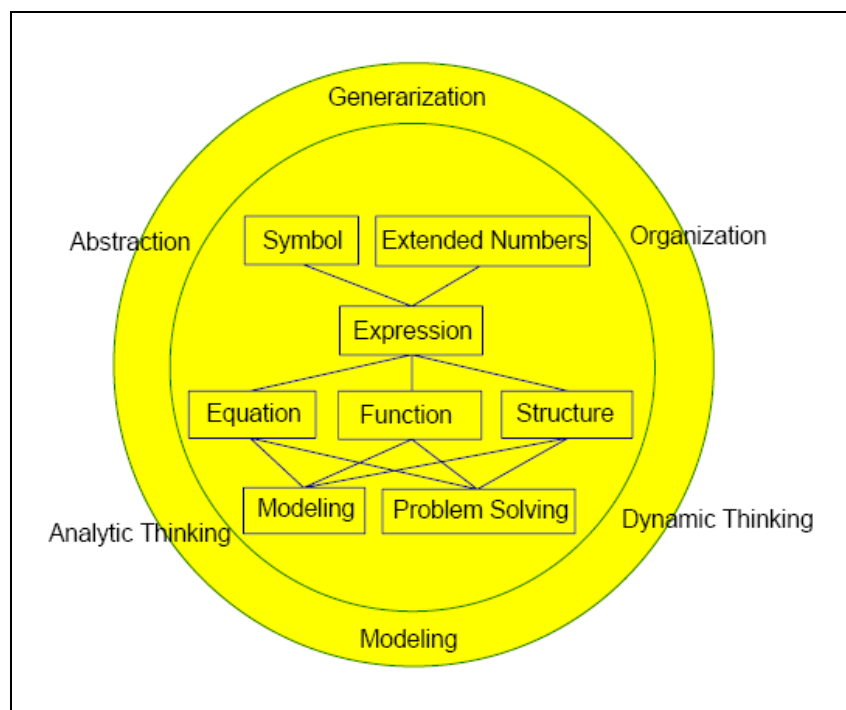
Segundo Rodrigues (2010), nos últimos anos, em Portugal, tem vindo a verificar-se maior interesse da investigação em Educação Matemática ao nível do 1º Ciclo tanto no que respeita à aprendizagem como no que respeita ao ensino. O mesmo não tem acontecido ao

nível do Ensino Pré-Escolar, mas, na opinião do referido autor parece ser chegado o momento de alargar esse interesse ao Pré-Escolar porque de facto as competências que as crianças desenvolvem durante o Pré-Escolar e o modo como esse desenvolvimento pode ser potenciado relativamente à Matemática e às suas capacidades matemáticas, devem merecer um cuidado especial da investigação uma vez que se crê que podem condicionar decisivamente o futuro matemático dessas crianças. Até há bem pouco tempo era muito escassa a investigação feita sobre Padrões.

Esclarecemos até ao momento o conceito de Pensamento Algébrico, o qual se revela distinto do conceito de Álgebra. Este tipo de pensamento pode ser desenvolvido desde cedo, iniciando-se em crianças do ensino Pré-Escolar, envolvendo o desenvolvimento do sentido de número, o estudo de padrões, o exercício do cálculo mental e a compreensão e descoberta de relações numéricas, em particular do significado do sinal de igual.

Terá que ser a investigação a orientar a construção do currículo e as práticas docentes. Afinal, como argumenta Baroody (2002) aqueles que se esforçam por reformar e ensinar Matemática no currículo da Educação de Infância precisam estar informados acerca da natureza da Matemática, do processo de aprendizagem das crianças e dos métodos de ensino mais adequados ao seu desenvolvimento.

Em resumo, Álgebra é muito mais que um conjunto de técnicas, é um modo de generalizar, abstrair, ter pensamento analítico e dinâmico, modelar e organizar (Lew, 2004). No fundo estas são habilidades de um pensamento do tipo algébrico. A figura nº.11, que a seguir se apresenta, esquematiza bastante bem a estrutura do Pensamento Algébrico, espelhando a sua transversalidade.

FIGURA 11. ESTUTURA DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

FONTE: (Lew, 2004)

Apesar das várias definições de Álgebra de muitos investigadores, Lew (2004) define Álgebra como um assunto que lida com expressões, com símbolos, que estende os números para além dos números inteiros de modo a conseguir resolver equações, analisa relações funcionais e determina a estrutura do sistema de representação através de expressões e relações. No entanto, para este investigador, actividades como resolver equações, analisar relações funcionais e determinar estruturas não são o propósito de Álgebra, mas as ferramentas para a modelagem de fenómenos do mundo real e resolução de problemas relacionados com as diversas situações.

Os objectivos principais do trabalho empírico a desenvolver são os de aferir concepções que os professores do 1ºCiclo têm sobre Pensamento Algébrico dos seus alunos e como é que os manuais escolares sustentam a prática dos professores e a preparação dos alunos para este tipo de pensamento. Uma vez que a formação de professores se encontra directamente relacionada com esta temática, e que o recurso didáctico em que os docentes mais apoiam a sua prática lectiva é o manual escolar, no capítulo que se segue aborda-se não só a formação de professores como também a temática dos Manuais Escolares de Matemática por eles utilizados.

6. FORMAÇÃO DE PROFESSORES E MANUAIS ESCOLARES

A perspectiva de iniciar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos primeiros anos exige um aprofundamento da compreensão da Álgebra, do que esta envolve e de onde está presente e, também, das suas relações com outros temas matemáticos, de modo a fomentar o estabelecimento de conexões da Álgebra com toda a Matemática, fundamental para o desenvolvimento do Pensamento Matemático dos alunos.

Branco & Ponte (2011)

Importa enquadrar e compreender como se tem perfilado a Formação de Professores do Ensino Básico, com especial destaque para a Formação Inicial. Esse enquadramento será agora feito através da explanação da Legislação, das perspectivas de Associações de relevo e de propostas de investigadores. Também algumas experiências com unidades curriculares algébricas, de cursos de Licenciatura de Educação Básica serão exemplificadas.

A abordagem aos Manuais Escolares de Matemática justifica-se pela importância que lhes é atribuída por estes professores, enquanto principal recurso didático em sala de aula.

6.1. O PENSAMENTO ALGÉBRICO NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO – PERSPECTIVAS INTERNACIONAIS E NACIONAIS

PERFIS DA FORMAÇÃO INICIAL E PRÁTICAS DE SALA DE AULA

Segundo Ponte (2008) a Educação Matemática é constituída por três campos:

- um campo de práticas sociais, designado por Ensino - Aprendizagem, cujo núcleo são as práticas de ensino e de aprendizagem de professores e alunos, mas que inclui igualmente outras vertentes como as práticas de apoio à aprendizagem extra-escolar e a produção de materiais didáticos;
- um campo de estudos académicos, Didáctica da Matemática, onde se produz conhecimento sobre o que se passa no campo anterior;

- um campo de Formação Inicial e Contínua, onde se transmite esse conhecimento a novas gerações de professores e de investigadores e também aos professores em serviço. Aqui salienta-se o surgimento de um campo de investigação em Educação Matemática, que tem procurado afirmar-se como um domínio científico de pleno direito, nomeadamente na área da Educação.

Dos três primeiros, o mais antigo é o campo das práticas sociais de ensino aprendizagem da Matemática, que existe em Portugal desde há vários séculos, depois com o nascimento de cursos de Formação de Professores, a Educação Matemática foi-se constituindo aos poucos, principalmente a partir da década de 1980, como Campo de Formação, esclarece este investigador.

A dinâmica da aquisição do conhecimento matemático é importante para o desenvolvimento consistente de metodologias, apropriadas a um melhor desempenho profissional (Fernandes, Queirós, Valente, & Ferreira, 2002). Neste sentido, a Formação Inicial dos professores de Educação Básica para o ensino da Matemática deverá, segundo estes mesmos autores, ser problematizada do ponto de vista da construção individual e estruturante do conhecimento matemático.

Para Monteiro (2002) são três os princípios que fundamentam a Formação Matemática dos futuros professores e educadores:

- a experimentação: através de situações concretas de aprendizagem de Matemática ou de Didáctica;
- a respectiva reflexão, na perspectiva de consciencializar para os processos vividos e para os próprios conteúdos;
- a transferência, feita individualmente ou em grupo, para as situações de ensino na sala de aula com os alunos.

Começando por procurar uma definição de Formação Inicial, encontrou-se a de Estrela, citada por Duarte:

(...) entendemos por Formação Inicial de Professores o início, institucionalmente enquadrado e formal, de um processo de preparação e desenvolvimento da pessoa,

em ordem ao desempenho e realização profissional numa escola ao serviço de uma sociedade historicamente situada.

(2009, p. 22)

A Formação de Professores em Portugal registou um grande avanço no início dos anos 70, quando se reconheceu serem necessários programas de Formação Inicial específicos para a docência.

Foi debatido, durante um Encontro de Professores de Matemática [Profmat] que:

(...) um professor era um licenciado que optava por “dar aulas”. Os programas de Formação Inicial, nas suas diversas variantes (formação sequencial, integrada, bi-etápica) configuram o perfil fundamental das competências profissionais do professor da disciplina.

(1998, p. 12)

Segundo o Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS] (2001) é durante os anos elementares que as crianças começam a estabelecer hábitos de raciocínio dos quais dependerão mais tarde muitas conquistas na aprendizagem da Matemática. Assim, por exemplo, não é realista esperar que alunos que não conseguiram desenvolver um entendimento inicial de como manipular expressões aritméticas, mais tarde, venham a ser capazes de manipular expressões algébricas com confiança. Ora, o objectivo desafiante da instrução deverá ser o de ajudar as crianças a atingirem tanto proficiência computacional como compreensão conceptual, na opinião deste quadro de investigadores.

Embora o estudo daquilo que se entende comumente por Álgebra e Funções geralmente só se inicie no 2ºCiclo e prossiga no 3ºCiclo e Ensino Secundário, muitos conceitos e práticas são acessíveis desde muito mais cedo. A *American Mathematical Society* e a *Mathematical Association of America*, revelam, nesta sua obra do CBMS, que dado os professores deverem cultivar o desenvolvimento destas ideias nas suas salas de aula de níveis de escolaridade elementares, eles mesmos devem compreender conceitos e práticas como:

- representar e justificar evidências aritméticas: compreender as diferentes formas de argumentação e aprender a elaborar argumentos dedutivos;
- usar uma variedade de representações;
- usar notação algébrica: desenvolver habilidade em usar a notação algébrica para representar cálculos, identidades expressas e resolver problemas;
- reconhecer propriedades das operações: comutatividade, associatividade, distributividade, identidades e inversos;

- saber usar algoritmos computacionais como aplicações de axiomas particulares;
- ser capaz de ler e criar gráficos de funções e fórmulas, em formas fechadas e recursivas.

Para os investigadores que constituem o CBMS, a notação algébrica é um meio eficaz para representar propriedades das operações e relações entre elas. No início do Ensino Básico, bem antes de as crianças se depararem com notação, deverão ser incentivadas a reconhecer e articular generalizações, para que se vão familiarizando com ideias que, mais tarde, expressam algebricamente. A fim de apoiar a aprendizagem das crianças neste campo, os primeiros professores devem cumprir com este tipo de trabalho. Assim, devem também reconhecer a centralidade da generalização como uma actividade Matemática. No contexto de explorações acerca da Teoria dos Números, como números pares e ímpares ou números quadrados, podem procurar padrões, conjecturas e desenvolver argumentos para as generalizações que identificarem. E esses argumentos que propõem, podem proporcionar ocasiões para investigar as diferentes formas de justificação. Se neste modo de trabalho os formandos aprenderem a usar uma variedade de modos de representação convencionais incluindo símbolos algébricos, a Álgebra, em vez de ser experimentada como a manipulação de símbolos opacos pode ser ensinada com significado para os seus alunos.

É ainda sublinhado no seu compêndio, que especialmente importante para os professores é o reconhecimento de como o trabalho de crianças pequenas com padrões pode ser relacionado com o conceito de função, por exemplo, que a rotulagem dos termos ou unidades de um padrão com os números naturais, cria uma função. Prosseguindo o estudo de funções, os professores aprendem a estabelecer um movimento fluido entre as descrições de situações-problema, tabelas de valores, gráficos e fórmulas. E, durante esta exploração, os alunos familiarizam-se com certas funções elementares sobre inteiros: linear, quadrática e exponencial. Podem também aprender a trabalhar com funções definidas por fenómenos físicos, por exemplo, a distância percorrida por um corredor ao longo do tempo, o crescimento de uma planta ao longo do tempo, ou as horas do nascer e pôr-do-sol ao longo de um ano.

Segundo Moraes:

(...) uma Formação Inicial de Professores, justifica-se pela necessidade de uma qualificação profissional para o exercício da função docente, devendo estar no entanto, adequada às exigências educativas e de ensino-aprendizagem dos educandos nos vários níveis de ensino.

(2005, p. 52)

Do ponto de vista legislativo, os princípios orientadores da Formação de Professores e Educadores de Infância é regulamentada pelo Decreto-Lei 344/89 de 11 de Outubro, sendo os perfis específicos dos Educadores e Professores estabelecidos pelo Decreto-Lei n.º 241/2001 de 30 de Agosto. O referido diploma estabelece o ordenamento jurídico da Formação dos Educadores de Infância e dos Professores dos Ensinos Básico e Secundário. Aqui encontramos orientações para a Formação Inicial, Contínua e Especializada: os docentes a formarem, os objectivos fundamentais, as entidades que promovem a Formação, a Estrutura Curricular dos Cursos de Formação e dos Cursos de Especialização e a organização e as formas de planeamento e coordenação da Formação.

No Capítulo II, Artigo 7.º define-se Formação Inicial de Educadores de Infância e de Professores dos Ensinos Básico e Secundário explicitando-se que é aquela formação que confere qualificação profissional para a docência. Terá como objectivos fundamentais:

- a) a formação pessoal e social dos futuros docentes, favorecendo a adopção de atitudes de reflexão, autonomia, cooperação e participação, bem como a interiorização de valores deontológicos e a capacidade de percepção de princípios;
- b) a formação científica, tecnológica, técnica ou artística na respectiva especialidade;
- c) a formação científica no domínio pedagógico - didáctico;
- d) o desenvolvimento progressivo das competências docentes a integrar no exercício da prática pedagógica;
- e) o desenvolvimento de capacidades e atitudes de análise crítica, de inovação e investigação pedagógica.

Este diploma, no mesmo capítulo, Artigo 15.º menciona a estrutura curricular dos cursos de Formação Inicial de Educadores de Infância e dos professores dos diferentes ciclos e graus de ensino não superior. Refere pois que esta estrutura deverá incluir de forma equilibrada: uma componente de Formação Pessoal, Social, Cultural, Científica, Tecnológica, Técnica ou Artística ajustada à futura docência, uma componente de Ciências da Educação e uma componente de Prática Pedagógica orientada pela instituição formadora, com a colaboração do estabelecimento de ensino em que essa prática é realizada. Por seu lado, os cursos de Licenciatura em Educação Básica estruturam-se em duas componentes: uma componente teórica, constituída por diversas unidades curriculares e uma componente de prática pedagógica, que contempla um vasto número de horas de exercício de funções docentes e permite aos alunos uma constante reflexão entre teoria e prática.

Investigou-se de forma mais detalhada sobre os objectivos que se devem estabelecer na Formação Inicial de Professores que favoreçam o seu desenvolvimento, no exercício da profissão e estimulem positivamente as características relacionais da mesma. Visando a aquisição de competências profissionais para a actividade profissional, Ponte (2002) detalha as cinco metas a atingir na Formação Inicial, referidas na página anterior pelo Decreto-Lei 344/89 de 11 de Outubro:

1. a Formação Pessoal, Social e Cultural dos futuros docentes - muitas vezes não é dada a devida importância a esta formação porque se parte do princípio que todo o futuro professor enquanto estudante universitário teve oportunidade de se desenvolver como pessoa e cidadão o suficiente para poder vir a ser um bom professor. Pois, tal nem sempre acontece. Estamos a falar de um tipo formação que pode favorecer o desenvolvimento de capacidades como a reflexão, autonomia, cooperação, interiorização de valores deontológicos, percepção de princípios, relacionamento interpessoal e abertura às diversas formas da cultura, todos eles capacidades e valores essenciais ao exercício da profissão;
2. a formação Científica, Tecnológica, Técnica ou Artística na respectiva especialidade - sem dominar os conteúdos que é suposto ensinar, o professor não pode exercer de modo eficiente a sua actividade profissional. Procura-se por isso definir nos cursos de Formação Inicial quais os conhecimentos e competências que o professor precisa realmente de ter;
3. a formação no Domínio Educacional - os contributos das Ciências da Educação e da investigação realizada pela Didáctica são , naturalmente, elementos essenciais na constituição da profissionalidade docente. Isso é tanto mais inquestionável quanto mais verificamos que, hoje em dia, um professor é cada vez mais um educador e cada vez menos um instrutor;
4. as competências de ordem prática - não é suficiente para o professor conhecer teorias e resultados de investigação. Ele tem de ser capaz de construir soluções adequadas para os diversos desafios com que se depara na sua actividade profissional, o que requer não só capacidade de mobilização e articulação de conhecimentos teóricos, mas também capacidade de lidar com situações concretas;
5. as capacidades e atitudes de análise crítica, de inovação e de investigação pedagógica - o professor não é um mero técnico nem um simples transmissor de conhecimento, mas um profissional que tem de ser capaz de identificar os problemas que surgem na sua

actividade, procurando solucioná-los adequadamente. Para tal, é necessário que desenvolva competências significativas no domínio da análise crítica de situações e da produção de novos conhecimentos.

Os professores precisam de conhecimentos científicos e pedagógicos de Matemática, para ensinar. Num encontro nacional de Professores de Matemática [Profmat] que se realizou falou-se que:

Falar de Formação é um terrível desafio. Em primeiro lugar, porque a Formação é um mundo onde se inclui a Formação Inicial, Contínua e Especializada, onde é preciso considerar os modelos, teorias e investigação empírica sobre a Formação, analisar a legislação e a regulamentação e, o que não é de menor importância, estudar as práticas reais dos actores e das instituições no terreno e as suas experiências inovadoras.

(1998, p.1)

Se por um lado já se esclareceu sobre quais os objectivos da Formação Inicial, por outro importa esclarecer quais as características dessa mesma formação. No pertinente tema da Formação de Professores, poucos autores são tão citados como António Nóvoa que muito tem escrito e pesquisado. Nóvoa apresenta cinco propostas sobre a Formação de Professores⁶, desde a Formação Inicial até à valorização dos profissionais mais experientes. Segundo ele, a formação deve:

1. assumir uma forte componente prática, centrada na aprendizagem dos alunos e no estudo de casos concretos;
2. passar *para dentro* da profissão, isto é, basear-se na aquisição de uma cultura profissional, concedendo aos professores mais experientes um papel central na formação dos mais jovens;
3. dedicar uma atenção especial às dimensões pessoais, trabalhando a relação e comunicação que define o acto pedagógico;
4. valorizar o trabalho em equipa e o exercício colectivo da profissão;
5. estar marcada por um princípio de responsabilidade social, favorecendo a comunicação pública e a participação dos professores no espaço público da educação.

⁶ Em entrevista publicada on line sob consulta no site
<http://revistaeducacao.uol.com.br/textos/154/artigo234711-1.asp>

Importa discutir como se deve desenrolar a Formação de Professores e analisar condições institucionais, recursos humanos e recursos materiais (Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas [CRUP], 2001). Só assim se consegue que a Formação seja de qualidade.

O INAFOP ⁷, criado em 1998 e extinto em 2002, revela quais os padrões de qualidade da Formação Inicial de Professores deixando contudo uma ampla margem de liberdade às instituições para decidir como os concretizar. As actividades de iniciação à prática profissional são concebidas numa perspectiva de desenvolvimento profissional dos formandos como futuros professores, para que estes possam vir a adoptar uma atitude reflexiva em relação aos desafios do quotidiano profissional, devendo integrar uma componente de investigação. Concretizam-se ao longo do curso em grupos ou turmas de diferentes níveis conforme as áreas curriculares a que a Formação se destina. Estas actividades permitem aos formandos o contacto com outras instituições e proporcionam experiências de planificação, ensino e avaliação, incluindo trabalho de equipa, dentro e fora da sala de aula.

Para esses formandos o estágio é realizado na leccionação de uma ou mais turmas num sistema de co-responsabilização dos formandos com o orientador da escola e a supervisão da Instituição Formadora. Tem a duração de um ano lectivo e envolve a realização de seminários científico-pedagógicos e teórico-práticos, bem como trabalho de análise e reflexão com os orientadores e com o grupo de estágio.

Para Formosinho, citado por Antunes e Menino:

A Prática Pedagógica é mais do que um processo de Formação Pessoal e Profissional; é um processo de avaliação das aprendizagens imediatas e das potencialidades dos futuros professores.

(2005, p. 101)

Finalizamos esta abordagem teórica da Formação Inicial com as recomendações deixadas pelo CRUP (2001) para este tipo de Formação:

- a Formação Inicial constitui a componente base da Formação do professor e, como tal, precisa ser articulada com a formação Pós-Inicial;

⁷ Decreto-Lei nº 290/98, de 17 de Setembro

- a Formação Inicial deve proporcionar um conjunto coerente de saberes estruturados de uma forma progressiva, apoiados em actividades de campo e de iniciação à prática profissional, de modo a desenvolver competências profissionais;
- a Formação Inicial tem de saber partir das crenças, concepções e conhecimentos dos jovens candidatos a professores;
- a Formação Inicial tem a responsabilidade de promover a imagem do professor como profissional reflexivo, empenhado em investigar sobre a sua prática profissional de modo a melhorar o seu ensino e as Instituições Educativas;
- a Formação Inicial deve contemplar uma diversidade de metodologias de ensino, aprendizagem e avaliação do desempenho do formando.

Ensinar a ser professor implica, não só a aprendizagem das matérias disciplinares, isto é, a Formação na Especialidade, como também a aprendizagem dos aspectos didácticos do Processo Ensino/Aprendizagem e de como se inserir no espaço educativo escolar, por outras palavras, a Formação Educacional.

O NCISLA (2000), Centro de Investigação já anteriormente referido, sumariza um conjunto de ideias que um professor dos primeiros anos de escolaridade pode aplicar na sua sala de aula e que conduzem os seus alunos a pensar em Aritmética de forma a providenciarem um alicerce para a aprendizagem da Álgebra:

- colocar questões que constituam uma janela aberta para a compreensão das ideias matemáticas por parte das crianças, como por exemplo «A proposta do exercício $9+6 = \square+8$ », deixa o professor perceber qual o entendimento que as crianças têm do sinal de igual. Deve-lhes ser perguntado porque foi aquela a sua resposta;
- proporcionar momentos de discussão para abordar diferentes concepções de ideias matemáticas - o exercício anterior também se presta a tal;
- proporcionar a resolução de equações que ajudem a compreender que o sinal de igual representa uma relação entre números, não se tratando apenas de um símbolo de cálculo como por exemplo propor exercícios do tipo « $\square = 8+9$, $8+6 = 6+\square$ ou $9+6 = \square +8$ », em que a resposta não vem logo à direita do sinal de igual.
- colocar questões de verdadeiro e falso, que desafiem os alunos sobre as suas concepções do sinal de igual, por exemplo: « $8 = 5+3$, $9 = 9$ ou $7-4 = 7-4$ ».

- colocar problemas que incentivem os alunos a fazerem generalizações sobre as propriedades básicas dos números, como por exemplo perguntar-lhes: «O que acontece quando subtraem um número dele próprio? Será essa resposta verdadeira para todos os números?»;
- solicitar justificações das generalizações. Ao escrever-se « $8 \times 5 = 5 \times 8$ » mais do que dar outros exemplos que evidenciem a propriedade em causa é importante perguntar-lhes «Será verdade para todos? Como é que sabem que é verdadeiro?» para encorajar sistematicamente os alunos a reconhecerem a necessidade de justificarem as suas afirmações.

Mais recentemente, o NCTM (2012) publicou os *Standards Revision Draft – Elementary Mathematics Specialist*, isto é, os Padrões dos Especialistas de Matemática dos anos Elementares. Segundo esta organização, todos os docentes certificados como especialistas matemáticos dos anos elementares devem conhecer, compreender e ensinar nos seguintes domínios: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Medida e Probabilidades e Estatística. Em particular, no que diz respeito à Álgebra, devem preparar a proficiência dos alunos através de:

- notação algébrica, símbolos, expressões, equações, desigualdades, relações proporcionais e seu uso na descrição, interpretação e modelação de relações;
- funções do tipo constantes, lineares, quadráticas, polinomiais, exponenciais e módulo e da sua utilização na modelação de situações reais;
- representações funcionais como tabelas, gráficos, equações, descrições, definições recursivas e notação como um meio para descrever o raciocínio, a interpretação, analisar relações e construir novas funções;
- padrões de mudança de funções lineares, quadráticas, polinomiais e exponenciais, de proporcionalidade directiva e inversa e relações reais que estas funções podem modelar;
- utilização de ferramentas tecnológicas para explorar ideias algébricas, funções e classes de funções, com o objectivo de resolver problemas;
- referências históricas e perspectivas da Álgebra que incluam contribuições de individualidades reconhecidas e diversas culturas.

Para Canário (1993) as novas realidades do mundo do trabalho assim com os novos modos de pensar, têm conduzido à construção de novas metodologias e novas práticas de formação, em alternativa às acções pontuais estruturadas em função do paradigma escolar, isto é, nomeadamente respeitante às práticas em sala de aula que se têm alterado nas últimas décadas.

EXPERIÊNCIAS INVESTIGATIVAS

Depois de revistas aqui as recomendações para a Formação Inicial de Professores, tome-se agora contacto com algumas experiências investigativas, relativas a unidades curriculares de Álgebra, de Cursos de Licenciatura em Educação Básica.

Branco e Ponte (2011) publicaram um estudo que teve por base a concretização de uma experiência de formação que decorreu no âmbito da unidade curricular de Álgebra e Funções do curso de Licenciatura em Educação Básica, na qual são abordados temas como relações, sequências e regularidades, sucessões, funções e modelação matemática. Foi pertinente investigar o modo de promover o ensino da Álgebra junto dos formandos, proporcionando-lhes o desenvolvimento do conhecimento matemático e didáctico adequado ao ensino deste tema, a alunos dos primeiros anos.

Segundo estes investigadores,

A perspectiva de iniciar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos primeiros anos exige um aprofundamento da compreensão da Álgebra, do que esta envolve e de onde está presente e, também, das suas relações com outros temas matemáticos, de modo a fomentar o estabelecimento de conexões da Álgebra com toda a Matemática, fundamental para o desenvolvimento do Pensamento Matemático dos alunos.

(2011, p.4)

Branco e Ponte (2011) sublinham que a Formação Inicial de futuros Professores e Educadores constitui um alicerce muito importante para o posterior desempenho da sua actividade docente. Este tipo de formação foi recentemente reestruturado, passando a Licenciatura em Educação Básica a dar acesso a Mestrados que habilitam para a docência desde a Educação Pré-Escolar até ao ensino do 2.º Ciclo do Ensino Básico. As actuais orientações nacionais e internacionais para a Formação de Professores na área da Matemática,

já aqui abordadas anteriormente, sugerem que é necessário estudar o modo de preparar os professores para ensinar Números e Operações, Geometria e Medida, Álgebra e Organização e Tratamento de Dados. O artigo em causa, nesta última referência bibliográfica, surge no âmbito de uma investigação centrada na Formação Inicial de futuros professores e educadores que estuda o desenvolvimento do seu Pensamento Algébrico e da sua perspectiva sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

Os autores acima citados investigaram sobre desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos formandos e a sua compreensão do ensino e da aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos, no âmbito da experiência de formação, quando estes professores analisaram produções de alunos do 6.º ano e reflectiram sobre a abordagem de ensino seguida pela professora para desenvolver nos seus alunos a capacidade de resolver situações de modelação.

Os participantes foram quatro formandos de uma turma da unidade curricular Álgebra e Funções da Licenciatura em Educação Básica, leccionada pela primeira autora. Os dados foram recolhidos por dois questionários realizados aos 20 formandos da turma antes e depois da realização da experiência de Formação. Foram ainda realizadas três entrevistas individuais em diferentes momentos da experiência de formação aos quatro formandos, tendo por base tarefas matemáticas que abordam diferentes tópicos da Álgebra. São ainda fontes de dados a observação participante e os documentos produzidos pelos formandos. Os resultados referem-se ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos formandos e à sua compreensão do ensino e da aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos, no âmbito da experiência de Formação, quando analisam produções de alunos do 6.º ano e reflectem sobre a abordagem de ensino seguida pela professora para desenvolver nos seus alunos a capacidade de resolver situações problemáticas através da sua modelação. Os formandos identificaram aspectos fundamentais que visam o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos.

Este desafio teve importantes implicações práticas, permitindo perceber como se pode levar os formandos a compreender profundamente os conceitos, a desenvolver e a conhecer os aspectos respeitantes ao seu ensino e a mobilizá-los na sua prática futura.

Nas conclusões do seu estudo, Branco e Ponte relatam que,

(...) a exploração e discussão, na experiência de formação, de situações que envolvem quantidades desconhecidas possibilita a utilização de linguagem de modelação matemática e a análise de estratégias informais nas quais os formandos estabelecem relações lineares e atribuem significado, de acordo com o problema, às diferentes operações que efectuem, associando o processo que seguem à determinação das quantidades desconhecidas. A diferença entre o número de

formandos que respondem à questão matemática no questionário inicial e final é muito significativa.

(2011, p.12)

Terminam o seu artigo dizendo que o seu estudo sugere que realmente este tipo de experiência de análise e reflexão sobre situações de ensino - aprendizagem contribui para incentivar o envolvimento de futuros alunos destes formandos de Educação Básica, em situações que promovam o desenvolvimento do seu Pensamento Algébrico.

Para Murray (2010), se os professores dos primeiros anos de escolaridade não possuem conhecimento científico pedagógico necessário para ministrar uma instrução focada no desenvolvimento do raciocínio algébrico desde cedo, então é claro que esta é uma área onde se deve investir, em prole do seu desenvolvimento profissional.

Segundo este autor, foi realizada uma experiência de formação na qual vários grupos de formadores especialistas desenvolveram trabalho com professores, efectivando esforços para que estes comessem a implementar o currículo da matemática dos primeiros anos, através de um olhar algébrico. Estes especialistas trabalharam regularmente com os professores na planificação de aulas diárias e do currículo global, trabalho esse que incluiu a modificação dos actuais recursos instrucionais. Nas escolas onde os especialistas intervieram, os professores revelaram tornar-se mais hábeis em ouvir e explorar o raciocínio dos alunos e a ajudar os alunos a construir o seu próprio raciocínio. Como resultado dos seus esforços, mais professores dão agora aos seus alunos a oportunidade de explorarem e aprofundarem o seu envolvimento em explorações matemáticas, e as culturas de sala de aula direccionaram-se para o respeito pelo raciocínio individual de cada aluno. A estratégia destes formadores consistiu em promover a mudança da atitude do professor em sala de aula, a três níveis:

- 1) na algebrificação de materiais didácticos;
- 2) no apoio do pensamento algébrico dos alunos;
- 3) na criação de uma cultura de sala de aula e de práticas de ensino apoiadas no raciocínio algébrico.

De facto, segundo o investigador acima citado, os especialistas que ministram Formação a futuros ou actuais professores devem:

- oferecer oportunidades aos professores formandos de explorarem conceitos algébricos para si próprios, a fim de ganharem alguma profundidade da compreensão da Álgebra Inicial;

- trabalhar com os professores sobre as aulas e o currículo, por exemplo, destacando os conceitos algébricos subjacentes a determinada questão e analisando como estes podem conduzir a generalizações;
- ajudar os professores a reconhecerem oportunidades que surgem, permitindo proporcionar às crianças efectuarem generalizações, estimulando e valorizando assim o raciocínio algébrico dos alunos, ao criar uma comunidade onde o raciocínio é esperado e valorizado.

Segundo Murray (2010) muito do trabalho feito com Números nos cursos de Educação foca-se no raciocínio algébrico. Uma das primeiras actividades que é proposta aos alunos da unidade curricular de Números e Operações consiste em pedir-lhes que resolvam « $57+36$ » através de cálculo mental. Depois de um minuto ou mais de reflexão, os participantes propõem uma série de estratégias. A linguagem utilizada na actividade inclui palavras como decomposição e recombinação e quanto aos conceitos envolvidos que estão na base desses cálculos, tratou-se das propriedades comutativa e associativa de números reais. O raciocínio algébrico é um componente essencial ao estudo dos números racionais e do raciocínio proporcional. O trabalho com fracções equivalentes, explica este autor, pode ser perspectivado do ponto de vista do estudo de funções, e por outro lado, a multiplicação de fracções pode ser olhada como o resultado de um operador agindo numa quantidade, constituindo novamente a abordagem de uma função.

No artigo elaborado por este autor, é mencionada a unidade curricular de Padrões, Funções e Álgebra, como sendo de entre todas a que detém o foco do Pensamento Algébrico. Nesta unidade, os formandos: generalizam padrões, desenvolvem habilidades necessárias para descrever padrões com símbolos, desenvolvem fluência com notação simbólica, justificam e provam conjecturas, primeiro com modelos e em seguida simbolicamente, e exploram diversas funções, através de actividades, com ênfase nas conexões entre múltiplas representações. Frequentar um Curso de Educação Básica inclui ser-se sensível ao desenvolvimento da compreensão das crianças, acrescenta Murray (2010).

Serrazina e Monteiro (2000) levaram a cabo uma investigação que pretendeu ser um contributo para a Formação Inicial de Professores de Matemática. Este estudo analisou dificuldades que os futuros Professores de Matemática dos 1º e 2º Ciclos apresentaram com os conceitos de razão e proporção nomeadamente quando resolvem problemas com

procedimentos algorítmicos. Foram feitas, pelos próprios alunos, a análise e reflexão dessas dificuldades, comparando-as com as suas estratégias informais de resolução. A partir desta análise, os formandos estudaram as diferentes relações: $y = kx$, $y = k+x$ e $y = k/x$, do ponto de vista gráfico e analítico, a fim de perceberem que estas podem ser consideradas situações de proporcionalidade directa, inversa ou nem uma nem outra. Foram discutidas possíveis dificuldades das crianças, hipoteticamente seus futuros alunos e preparadas lições para alunos do 6.º ano. Algumas destas lições foram depois implementadas durante a prática pedagógica. Constatou-se que as dificuldades com que os formandos se defrontaram na resolução de problemas de proporcionalidade podem estar relacionadas com as experiências que tiveram no ensino básico e secundário onde a maior importância era dada ao algoritmo e não à oportunidade de usar o algoritmo em situações apropriadas. Segundo estas investigadoras o trabalho feito na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática parece ter sido importante não só para o desenvolvimento de competências dos alunos do Curso, a nível dos seus conhecimentos matemáticos mas também como futuros professores que terão de ensinar este tema a crianças.

Em Setembro de 2005 iniciou-se o PFCM que contou com os contributos dos responsáveis pela formação em Matemática e/ou Didáctica da Matemática nos diferentes IES [Institutos de Ensino Superior], com cobertura nacional. Teve como documentos de referência, inicialmente o Currículo Nacional do Ensino Básico editado pelo ME em 2001 e o Programa do 1.º Ciclo do Ensino Básico, editado pela Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário [DGEBS] em 1990 e mais recentemente o novo Programa do Ensino Básico editado pela Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular [DGIDC] em 2007. Segundo Serrazina (2009) os professores precisam de experiências de desenvolvimento profissional que articulem, de modo adequado, o conhecimento científico dos conteúdos a ensinar com o conhecimento didáctico e com os recursos disponíveis para utilizar na sala de aula.

O objectivo foi o de centrar a formação na escola, nas salas de aula dos professores e de promover o trabalho colaborativo entre os diferentes intervenientes. Assim sendo foi definido que o PFCM devia desenvolver-se de modo continuado ao longo do ano lectivo, podendo o mesmo professor frequentar o PFCM por um período de um ou dois anos lectivos. Este programa contemplava sessões de formação em grupo, com periodicidade quinzenal, sessões de acompanhamento em sala de aula, visando a concretização e a análise das

experiências de aprendizagem proporcionadas aos alunos, sessões de reflexão em grupo e reflexões individuais.

A maior ênfase na formação foi dada aos temas considerados novos no Programa de Matemática do Ensino Básico, como os relativos ao sentido de número e à compreensão das operações, a aspectos da geometria, nomeadamente às transformações geométricas, e ao Pensamento Algébrico.

Com este programa veio exigir-se uma nova atitude ao professor, como explica Serrazina (2009), passando-se de uma prática de ensino directo da Matemática para um ensino exploratório tendo por base a resolução de problemas e actividades de natureza investigativa. Para os professores que participaram neste programa, em especial os que o fizeram durante dois anos, é visível, segundo esta investigadora responsável pelo Programa de Formação referido, uma atitude profissional de maior empenhamento e investimento no ensino da Matemática, com maior consciência dos desafios que se colocam, maior sensibilidade para os problemas da aprendizagem da Matemática, maior conhecimento da Matemática a ensinar e de como o fazer, maior predisposição para planificar aprofundadamente a aula e maior conhecimento dos recursos a mobilizar.

Não restam dúvidas de que de facto a Formação Inicial de Professores constitui a base para o Ensino da Matemática (NCTM, 2008) e por isso mesmo esta é uma área investigativa onde se justifica investir.

Com o objectivo de se perceber como é que os professores do 1ºCiclo desenvolvem o seu trabalho em torno do Pensamento Algébrico dos alunos, construiu-se um Guião de Entrevista a aplicar, suportado no enquadramento teórico explanado até ao momento. Este Guião encontra-se no Apêndice B e a fundamentação teórica de cada grupo de questões encontra-se especificada no Apêndice C. No capítulo 7, a propósito do método a aplicar neste trabalho de investigação, apresenta-se uma síntese deste mesmo Guião e respectiva fundamentação.

Porque é objectivo desta investigação compreender de que modo os Manuais Escolares de Matemática do 1ºCiclo se revelam promotores do Pensamento Algébrico dos alunos, mais especificamente os mais utilizados na amostra de professores recolhida neste estudo, segue-se o suporte teórico pesquisado sobre Manuais Escolares de Matemática.

6.2. O MANUAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA

(...) sublinhou a necessidade de se continuar e aprofundar o trabalho de investigação e desenvolvimento de instrumentos e metodologias de avaliação de Manuais Escolares de Matemática de modo a dotar os professores dos meios necessários à realização de decisões informadas no momento da adopção e apoiá-los no efectivo uso destes importantes instrumentos de trabalho no seu dia-a-dia profissional.

Ponte, Pires, Nunes (2006)

O Manual Escolar desempenha importantes funções pedagógicas uma vez que, não só reflecte os conteúdos programáticos estabelecidos pelo ME, como também constitui o recurso didáctico mais utilizado pelos docentes. Assim sendo, e dado que neste trabalho um dos objectivos é o de aferir as concepções que os professores do 1ºCiclo têm do desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos seus alunos, faz todo o sentido analisar o modo como os Manuais Escolares de Matemática utilizados por estes professores evidenciam ou não, a promoção do desenvolvimento deste tipo de pensamento. Para tal, foi necessária a construção de um quadro de análise desses Manuais, explicando este capítulo como se iniciou o estudo acerca dos manuais e de que forma culminou nessa construção.

6.2.1. ENQUADRAMENTO LEGAL EM PORTUGAL

Este capítulo traz a si, com referência legais, a definição de Manual Escolar bem como as suas funções, o seu papel no processo educativo, o seu regime de avaliação, certificação e adopção de manuais e o enquadramento legal da sua adopção e da acreditação das entidades suas avaliadoras. É ainda referida a grelha de registo de apreciação de Manuais disponibilizada pelo DGIDC, de manuais de todas as áreas disciplinares, não existindo nenhuma que avalie Manuais Escolares especificamente de Matemática.

Segundo Moreira, Ponte, Pires e Teixeira (2006) ao longo da História da Educação em Portugal assistimos a períodos de livro único e ainda a períodos onde a escolha do Manual Escolar era da responsabilidade dos professores e das direcções das instituições escolares. Estes investigadores explicam que, de uma experiência de Manual Escolar único ao longo de cinco décadas, no período do Estado Novo, assiste-se, com o 25 de Abril, a uma imensa proliferação de Manuais Escolares de todas as disciplinas, a par da liberdade editorial para a

sua concepção e à passagem da responsabilidade da sua escolha para os professores e instituições escolares, como aliás acontece na generalidade dos países europeus.

A legislação acerca desta temática foi-se alterando, pelo que considero relevante neste momento efectuar um ponto de situação.

A Lei N.º47/2006 de 28 de Agosto, na alínea b, artigo 3º, define Manual Escolar do seguinte modo:

«Manual Escolar» o recurso didáctico-pedagógico relevante, ainda que não exclusivo, do processo de ensino e aprendizagem, concebido por ano ou ciclo, de apoio ao trabalho autónomo do aluno que visa contribuir para o desenvolvimento das competências e das aprendizagens definidas no currículo nacional para o Ensino Básico e para o Ensino Secundário, apresentando informação correspondente aos conteúdos nucleares dos programas em vigor, bem como propostas de actividades didácticas e de avaliação das aprendizagens, podendo incluir orientações de trabalho para o professor.

Acerca das funções de um Manual Escolar, e na procura de uma resposta, encontrei várias, de acordo com diferentes perspectivas de variados autores. Aquela que mais se identifica com o enquadramento deste trabalho é a perspectiva educacional. Segundo Gérard e Roegiers (1998), as funções essenciais que um Manual Escolar desempenha são as seguintes:

- transmissão de conhecimentos;
- desenvolvimento de capacidades e de competências, pois os manuais têm também como objectivo a aprendizagem de métodos, atitudes e hábitos de trabalho;
- consolidação das aquisições através dos exercícios e das actividades em que o aluno deve mobilizar o que aprendeu e aplicá-lo em diferentes situações;
- avaliação das aquisições, determinando as dificuldades de cada aluno e o modo de as remediar;
- ajuda na integração das aquisições, conduzindo o aluno a aplicar o que aprende na escola em situações não escolares;
- referência, apresentando informações precisas e exactas acerca de determinado assunto;
- educação social e cultural, contribuindo para o desenvolvimento do aluno como ser social.

De facto, o Manual Escolar desempenha um papel central no processo educativo, não só como mediador entre um currículo prescrito e um currículo programado e planificado, mas também pelo seu carácter de legitimação cultural que veicula uma dada informação (Viseu, Fernandes, & Gonçalves, 2009) Segundo estes investigadores alguns estudos procuram compreender a influência do Manual Escolar na construção do conhecimento profissional do professor, constatando que em muitas situações o condicionam na elaboração de outros materiais, contudo, o uso que o professor lhe dá pode ajudar a promover a capacidade de auto-aprendizagem e o espírito crítico dos alunos.

A Lei N.º47/2006 anteriormente referida define o Regime de Avaliação, Certificação e adopção dos Manuais Escolares do Ensino Básico e do Ensino Secundário, bem como os princípios e objectivos a que deve obedecer o apoio sócio - educativo relativamente à aquisição e ao empréstimo de manuais escolares.

No seu Artigo 2 encontramos os Princípios Orientadores desse regime:

- a) liberdade e autonomia científica e pedagógica na concepção e na elaboração dos Manuais Escolares;
- b) liberdade e autonomia dos agentes educativos, mormente os docentes, na escolha e na utilização dos Manuais Escolares, no contexto do projecto educativo da escola ou do agrupamento de escolas;
- c) liberdade de mercado e de concorrência na produção, edição e distribuição de Manuais Escolares;
- d) qualidade científico-pedagógica dos Manuais Escolares e sua conformidade com os objectivos e conteúdos do currículo nacional e dos programas e orientações curriculares;
- e) equidade e igualdade de oportunidades no acesso aos recursos didáctico-pedagógicos.

E ainda a definição do papel do Estado na prossecução dos princípios definidos anteriormente:

- a) definição do regime de adopção formal dos Manuais Escolares pelas escolas e pelos agrupamentos de escolas;
- b) definição do regime de avaliação e certificação dos Manuais Escolares para efeitos da sua adopção formal pelas escolas e pelos agrupamentos de escolas;
- c) promoção da qualidade científico - pedagógica dos Manuais Escolares e dos demais recursos didáctico – pedagógicos;

- d) promoção da estabilidade dos programas de estudos e dos instrumentos didácticos correspondentes;
- e) apoio à aquisição e à utilização dos Manuais Escolares;
- f) formação dos docentes e responsáveis educativos em avaliação de manuais escolares.

O enquadramento legal da selecção de Manuais Escolares por parte dos docentes é objecto da Lei N.º261/2007 de 17 de Julho, que regulamentou o Decreto-Lei N.º47/2006 de 28 de Agosto. A certificação dos manuais escolares pelo ME garante a sua qualidade científica e pedagógica. Há que assegurar que existe conformidade com as orientações curriculares nacionais e que o manual constitui um instrumento que apoia e incentiva ao ensino, à aprendizagem e ao sucesso educativo. Na alínea 1, artigo 11º, capítulo II, do referido Decreto-Lei, definem-se os seus critérios de avaliação:

- 1) rigor científico, linguístico e conceptual;
- 2) adequação ao desenvolvimento das competências definidas no currículo nacional;
- 3) conformidade com os objectivos e conteúdos dos programas ou orientações curriculares em vigor;
- 4) qualidade pedagógica e didáctica, designadamente no que se refere ao método, à organização, à informação e à comunicação;
- 5) possibilidade de reutilização e adequação ao período de vigência previsto;
- 6) a qualidade material, nomeadamente a robustez e o peso.

Com vista à sua concretização, torna-se necessária uma especificação destes critérios, no sentido de tornar os procedimentos mais claros e flexíveis. Assim, no Despacho N.º. 29864 de 27 de Dezembro de 2007, especificam-se os critérios de avaliação para certificação. O Manual Certificado deve:

1. Quanto ao rigor linguístico, científico e conceptual:
 - a. quanto ao rigor linguístico:
 - i) usar correctamente a Língua Portuguesa, sem erros ou incorrecções de carácter sintáctico ou morfológico e obedecendo às regras consolidadas de funcionamento da Língua;
 - ii) usar o vocabulário apropriado e uma linguagem adequada e inteligível;
 - iii) construir um discurso articulado e coerente, obedecendo aos princípios da lógica;

- b. quanto ao rigor científico:
 - i) transmitir a informação correcta e actualizada correspondendo ao saber consolidado, em particular na área curricular ou na disciplina;
 - ii) transmitir a informação sem erros, confusões ou situações que induzam a erros e confusões;
 - c. quanto ao rigor conceptual:
 - i) não empregar terminologias erradas ou que não sejam de uso corrente das disciplinas e áreas curriculares específicas;
 - ii) não usar conceitos incorrectos, imprecisos e em contexto inadequado, no quadro da respectiva disciplina e área curricular.
2. Quanto à adequação ao desenvolvimento das competências:
- a. adequar-se ao desenvolvimento das competências gerais inscritas no currículo;
 - b. adequar -se às competências específicas definidas no currículo do respectivo ano e ou nível de escolaridade;
 - c. proporcionar a integração transversal da educação para a cidadania.
3. Quanto à conformidade com os programas e orientações curriculares:
- a. apresentar os conhecimentos da disciplina ou área curricular no respeito pelos programas e orientações curriculares oficiais;
 - b. responder de forma integral e equilibrada aos objectivos e conteúdos do programa ou orientações curriculares.
4. Quanto à qualidade pedagógica e didáctica:
- a. facultar a informação adequada e em linguagem adaptada ao nível etário dos alunos a que se destina;
 - b. apresentar uma organização coerente; Promover as aprendizagens com base na resolução de problemas e de carácter experimental, em particular nas disciplinas científicas, nomeadamente, Estudo do Meio, Ciências da Natureza, Ciências Naturais, Biologia e Geologia, Biologia, Geologia, Ciências Físico - Químicas, Física, Química, Matemática, Matemática A, Matemática B, Matemática Aplicada às Ciências Sociais, e nos termos dos programas e das orientações curriculares em vigor;

- c. apresentar figuras e ilustrações adequadas, sem erros ou sem situações que induzam ao erro.
5. Quanto aos valores:
- a. não fazer referências a marcas comerciais de serviços e produtos, que possam constituir forma de publicidade, com excepção das informações relativas a produtos e serviços de natureza educativa, próprios do editor e adequados ao nível etário dos alunos a que se destina o manual, que devem em qualquer caso ser claramente separadas do conteúdo didáctico-pedagógico do manual propriamente dito;
 - b. não fazer ou induzir discriminações de carácter cultural, étnico, racial, religioso e sexual e respeitar o princípio da igualdade de género;
 - c. não constituir veículo de evidente propaganda ideológica, política ou religiosa.
6. Quanto à possibilidade de reutilização e adequação ao período de vigência previsto:
- a. não incluir espaços livres para a realização de actividades e de exercícios, com excepção dos Manuais Escolares destinados aos 1.º e 2.º anos de escolaridade e os manuais escolares de Língua Estrangeira.
7. Quanto à qualidade material, nomeadamente, a robustez e o peso:
- a. apresentar robustez suficiente para resistir à normal utilização;
 - b. dispor de formato e conter dimensões e peso (ou cada um dos seus volumes) adequados ao nível etário do aluno, designadamente:
 - i) usar papel com peso entre 70 g/cm² e 120 g/cm²;
 - ii) ter dimensões entre o formato A5 e 25 cm × 31 cm ou 31 cm × 25 cm;
 - iii) ter um peso máximo por volume de 550 gramas, para o 1.º ciclo de escolaridade ou 750 g, para os 2.º e 3.º ciclos de escolaridade.

Para auxiliar a análise e selecção dos manuais, encontra-se disponibilizada no site da DGIDC uma grelha de registo de apreciação de Manuais, para consulta no Anexo A, genérica a todas as áreas disciplinares. Não se verifica a existência de uma grelha específica de análise e avaliação de manuais escolares de Matemática.

O Decreto-Lei N.º261/2007 de 17 de Julho já referido, nos seus artigos 8.º e 9.º, expõe as normas gerais a que deve obedecer a Acreditação de Entidades Avaliadoras de Manuais e define que entidades públicas ou privadas se podem candidatar, assim como o procedimento de avaliação para tal certificação.

Neste momento, as Entidades acreditadas como avaliadoras de Manuais Escolares de Matemática do 1ºCiclo do Ensino Básico⁸ pelo Despacho n.º25190/2009 de 17 de Novembro, publicado pela DGIDC, são:

- a Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal;
- a Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viseu;
- a Escola Superior de Educação João de Deus;
- a Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa;
- a Sociedade Portuguesa de Matemática;
- a Universidade do Minho.

Estreitando-se agora a abordagem de Manual Escolar para Manual Escolar de Matemática, foi preocupação compreender qual o papel mediador deste no Processo de Ensino-Aprendizagem e quais as suas influências na construção do conhecimento profissional do professor do 1ºCiclo do Ensino Básico.

6.2.2. O MANUAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA NA PRÁTICA DOCENTE DOS PROFESSORES

Num estudo realizado por Serrazina e Monteiro (2000) com três professoras do 1º Ciclo pretendeu-se analisar como as professoras lidavam com o currículo de Matemática e qual o papel mediador dos manuais neste processo. As conclusões apontaram para o facto de que apesar de diferentes concepções, idades, percursos profissionais ou histórias de vida, e de desenvolverem o currículo de Matemática de forma diferenciada, com maior ou menor incidência, maior ou menor dependência, todas utilizam o manual nas suas práticas. Os manuais parecem pois assumir um papel importantíssimo para toda a comunidade educativa.

⁸ Informação disponível em
<http://mobilizacaoeunidade dosprofessores.blogspot.pt/2009/11/entidades-acreditadas-como.html>

O Manual Escolar, em geral, e o de Matemática, em particular, constitui um auxiliar imprescindível no processo de Ensino-Aprendizagem ao servir de mediador da comunicação matemática entre o professor e o aluno, quer ao nível dos conteúdos a abordar, quer no que respeita às tarefas a desenvolver (Viseu, Fernandes, & Gonçalves, 2009). Nessa mediação, o manual deve reflectir os objectivos gerais e as sugestões metodológicas para o ensino de Matemática definidos nos programas escolares em vigor.

O uso que o manual tem nas actividades do professor e do aluno leva-nos a considerar que este deve ser usado de modo a promover no aluno a capacidade de auto-aprendizagem e o espírito crítico, por exemplo através de actividades que o envolvam na leitura e análise de textos do manual, no decorrer do estudo de um conteúdo matemático, na realização de sínteses escritas ou na preparação de um tópico a ser apresentado à turma (Viseu et al., 2009). Isso não invalida que o professor utilize fontes diversificadas na preparação das suas actividades lectivas, como por exemplo outros manuais, revistas, relatórios de experiências didácticas e materiais da Internet, acrescentam estes investigadores.

Outros estudos, como o que foi desenvolvido por Moreira et al (2006) centram-se mais na forma como o Manual Escolar é usado pelos professores. Estes investigadores referem um *Relatório Preliminar* publicado pela Associação de Professores de Matemática [APM] onde se lê que no 1º Ciclo, uma larga maioria dos professores (90%) utiliza algum manual escolar para ensinar Matemática (APM, 1998). Este relatório refere também que o uso do Manual Escolar pelos alunos, o partido que os professores tiram dele e o modo como os manuais são seleccionados nas escolas, são aspectos importantes da prática profissional dos professores, com significativos impactos na aprendizagem. Sublinha ainda que se trata de aspectos pouco discutidos na comunidade de Educação Matemática portuguesa e que se lhes deve dedicar bastante mais atenção e propõe que as escolas tenham possibilidade de adoptar mais do que um Manual Escolar, ou mesmo nenhum, atendendo às necessidades, cada vez mais diversificadas, dos alunos.

Neste relatório é referido por Manuel Vara Pires um estudo qualitativo exploratório, com o objectivo de compreender as inter-influências do Manual Escolar na construção do conhecimento profissional do professor do 1.º Ciclo do Ensino Básico relativamente ao ensino da Matemática. Este autor concluiu que o conhecimento e a experiência que o professor vai

adquirindo permite-lhe construir uma significativa autonomia relativamente ao Manual Escolar. Deste modo, na sua perspectiva, este material curricular tanto pode ser um recurso prescritivo, se usado de forma acrítica, como pode constituir um recurso valioso na preparação e condução da actividade lectiva.

Os estudos realizados sobre como os professores usam o Manual Escolar, diz a APM (1998), confirmar que este constitui um recurso de trabalho de grande importância. Esta associação acrescenta que, no essencial, os professores parecem usar o Manual Escolar sobretudo como fonte de tarefas para realizar na aula e como trabalho de casa, no entanto, não é ainda muito claro quais são os aspectos do Manual Escolar que mais valorizam e a que critérios dão mais atenção no momento da decisão sobre a adopção.

A reiterar esta ideia, temos Pires (2009), cuja opinião é de que o Manual Escolar é o material mais utilizado nas salas de aula, podendo influenciar o que professores e alunos pensam e fazem. Este autor levou a cabo um estudo que envolveu três professores de Matemática com uma larga experiência de ensino e que pretendeu, entre outros aspectos, identificar concepções desenvolvidas acerca do manual escolar e formas de utilização seguidas na planificação e condução da sua prática docente. Conclui-se que os professores participantes reconhecem a enorme relevância do Manual Escolar no Ensino e na Aprendizagem da Matemática, manifestando opiniões muito favoráveis à sua utilização e destacam a complementaridade que deve existir com os restantes materiais curriculares disponíveis, especialmente nos primeiros anos de escolaridade. Dizem utilizá-los com frequência, no entanto, a sua larga experiência de ensino permite-lhes relacionarem-se com o manual escolar de uma forma bastante crítica, desenvolvendo atitudes de crescente autonomia profissional nas decisões que têm que tomar. Assim, os professores pensam e utilizam o manual escolar mais como um instrumento ao qual podem recorrer para planear e desenvolver as suas práticas profissionais.

6.2.3. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA

6.2.3.1. A NÍVEL NACIONAL

Não muito se conhece acerca de investigação sobre análise e avaliação de Manuais Escolares de Matemática em Portugal. Alguns estudos foram apresentados por Moreira et al.

(2006) na XV Conferência do Encontro de Investigação em Educação Matemática [EIEM] acerca da avaliação e escolha de Manuais Escolares, por parte dos professores:

Neste domínio, para além do desenvolvimento de estudos descritivos, qualitativos e quantitativos, são também necessários estudos que mostrem quais são os factores determinantes nos processos de escolha e adopção de Manuais Escolares seguidos pelas escolas e agrupamentos.

(2006, p.12)

Um dos estudos apresentado por este grupo de trabalho foi o de Fátima Jorge, desenvolvido em 1998, que numa comunicação de um EIEM, apresentou diversos princípios orientadores para a concepção de um instrumento de análise de Manuais Escolares de Matemática, em particular relativamente ao tópico das sucessões, no 11ºano de escolaridade, assunto que havia investigado na sua tese de mestrado em 1994. Esta investigadora sublinhou o alheamento do ME em relação a este assunto e considerou que se deve privilegiar a aplicabilidade do instrumento à selecção do Manual Escolar pelos professores. Nomeou alguns parâmetros que entende como fundamentais num Manual Escolar de Matemática, como:

- o uso da imagem, cor ou ilustrações;
- a inserção de temas da História da Matemática;
- as tarefas, que designou por «questões», onde destaca os exercícios e os problemas;
- as novas tecnologias.

Apresentou nessa conferência uma grelha de análise, organizada por duas categorias principais, conteúdo e estrutura, que por sua vez se subdividiu em:

- correcção;
- relação conteúdo - programa;
- relação ilustração - texto;
- apresentação da proposta metodológica;
- objectivos a atingir pelo aluno;
- contexto histórico;
- aspectos terminológicos;
- aspectos sintácticos;
- resumos;
- questões;
- textos complementares;

- bibliografia.

Um outro estudo desenvolvido por Isabel Cabrita em 1996, referido por Moreira et al. (2006) estabeleceu o seu foco no modo como os Manuais Escolares do 7.º ano de escolaridade abordavam o tópico da proporcionalidade directa, tendo usado para o efeito uma grelha de análise com diferentes itens relacionados com este assunto. Um dos resultados mais relevantes na análise deste estudo, que envolveu sete manuais escolares, foi a valorização da resolução de problemas como perspectiva curricular.

O referido grupo de trabalho acrescentou ainda que, mais recentemente, Célia Silva, em 2003/2004, realizou uma análise de Manuais Escolares de Matemática do 9.º ano de escolaridade. Esta autora verificou que nos manuais existentes se observavam fortes influências de orientações curriculares do passado, mais especificamente no que diz respeito às tarefas propostas, ao cariz da avaliação, à forma de trabalho com os alunos, ao uso das novas tecnologias e ao papel da História da Matemática. Segundo esta investigadora os manuais continuavam a evidenciar fundamentalmente uma função de transmissão de conhecimentos.

Na edição do XVI EIEM, algo mais foi acrescentado a este assunto da Avaliação de Manuais Escolares. Ponte, Pires e Nunes (2007) dividiram a sua atenção por uma proposta de modelo de avaliação de manuais do 9ºano de escolaridade, baseado na aplicação de critérios, e pela discussão de situações do passado relativas a Manuais e a Processos de Avaliação de Manuais.

O modelo considerado teve por base o enquadramento legal existente e as orientações fundamentais para o Ensino da Matemática. O instrumento de avaliação apresentado incluiu 40 critérios, tendo alguns carácter obrigatório, que se agrupavam em cinco domínios:

- (a) científico-didático - 4 eliminatórios e 13 não eliminatórios;
- (b) texto e ilustrações - 1 eliminatório e 3 não eliminatórios;
- (c) construção da cidadania - 2 eliminatórios e 2 não eliminatórios;
- (d) aspectos editoriais - 2 eliminatórios e 5 não eliminatórios;
- (e) manual do professor - 8 não eliminatórios.

Este grupo de trabalho sublinhou:

(...) a necessidade de se continuar e aprofundar o trabalho de investigação e desenvolvimento de instrumentos e metodologias de avaliação de manuais escolares de Matemática de modo a

dotar os professores dos meios necessários à realização de decisões informadas no momento da adopção e apoiá-los no efectivo uso destes importantes instrumentos de trabalho no seu dia-a-dia profissional.

(2007, p.221)

Atravessando agora fronteiras rumo a alguma da investigação internacional sobre avaliação de Manuais Escolares de Matemática, começam a salientar-se com algum pormenor as competências matemáticas que se esperam desenvolver nos alunos através destes mesmos manuais.

6.2.3.2. A NÍVEL INTERNACIONAL

A investigadora inglesa Carol Knight desenvolveu, em 2005, uma Grelha de Avaliação de Manuais Escolares de Matemática do 1ºCiclo (Anexo B), na qual reuniu os conteúdos, a metodologia e as estratégias consonantes com as orientações curriculares, pretendendo que constituir um material de suporte de qualidade para o professor e que ajudasse os alunos a construir uma compreensão e um desenvolvimento proficiente da Matemática. Este instrumento procurou reflectir não só a posição da Escola *Prince William County Schools Mathematics*, bem como o seu curriculum e as Normas definidas pelo NCTM, já referidas no Capítulo 5. Trata-se de um Instrumento de Avaliação revisto pelo Departamento de Educação do Estado de Virgínia⁹. A categorização utilizada na elaboração deste instrumento de avaliação dos manuais, de forma sucinta, foi a seguinte:

1. apresentação do conteúdo;
2. processos;
 - 2.1.resolução de problemas;
 - 2.2.raciocínio e demonstração;
 - 2.3.comunicação;
 - 2.4.conexões;
 - 2.5.representações;
3. avaliação;
4. tecnologia;
5. diversidade.

⁹ Esta informação está disponível para consulta em
http://www.penK12.va.us/VDOE/Instruction/textbookadoption/mathematics_K12/index.html

Pretende-se que cada item de cada uma destas categorias seja avaliado segundo uma classificação baseada na escala: 0-não presente, 1-Inadequado, 2-Adequado e 3-Exemplar.

Alguns outros trabalhos científicos se conhecem sobre esta temática. É o caso de Czegledy & Kovaes (2008), investigadores húngaros, que se debruçaram sobre o tema da análise, selecção e avaliação de livros de Matemática. Embora livros de matemática não sejam apenas Manuais Escolares de Matemática, os referidos autores tentaram auxiliar os professores do 1ºCiclo e os Professores de Matemática do 2º Ciclo do Ensino Básico, com uma lista de factores, que facilitasse a escolha dos seus Manuais Escolares de Matemática. Assim, as etapas sugeridas para a selecção de um Manual Escolar de Matemática dos anos de escolaridade acima mencionados são as seguintes:

1. Recolha de dados preliminares - durante esta recolha, deve ponderar-se o seguinte, antes de tomar uma decisão sobre qual o livro escolhido:
 - a) quanto aos alunos - que tipo de habilidades mentais, de atenção, compreensão, memória ou resolução de problemas, é que estes possuem ou não e que o manual promoverá neles;
 - b) quanto ao currículo - que tipo de habilidades e competências queremos melhorar nos alunos e que tipo de orientação lógica - ensino indutivo-dedutivo - pode produzir os melhores resultados;
 - c) as condições institucionais, ou seja, qual o tamanho da turma ou quantas aulas de matemática há numa semana;
2. Supervisão pelo ME - os peritos do Ministério da Educação irão examinar se o Manual atende aos requisitos do currículo, se o livro não tem erros técnicos e se o livro tem uma base educacional e didáctica. Portanto, quando se adoptar um Manual deve ter-se em atenção o seguinte:
 - a) o nível – averiguar se o livro é adequado para a média dos alunos, para o melhor, ou para ambos os tipos de alunos;
 - b) a estrutura do manual - um bom livro deve ser consistente, isto é, ou apresenta uma estrutura indutiva, do tipo: primeiro a experiência, depois as hipóteses, depois a prova e finalmente a generalização, ou apresenta uma estrutura dedutiva, do tipo: teorema, seguido de prova, seguido de casos particulares;

- c) a disponibilidade de materiais complementares, no próprio livro - como soluções dos exercícios e problemas propostos ou existir uma colecção suplementar de propostas de trabalho;
- d) se o livro já foi utilizado antes, nomeadamente por professores – facto que oferece garantias.

3. Análise - durante a avaliação, a lista dos factores a analisar consiste em:

- a) objetivos - saber se o livro atende aos requisitos da sociedade, ao programa de educação da instituição, às necessidades dos alunos, e além disso, se é abrangente, detalhado e flexível;
- b) conteúdo - ter certeza de que o livro satisfaz as exigências com base na sua estrutura, função e temas, bem como sobre as competências e habilidades a serem melhorados. Averiguar se o manual responde a questões como: Os exercícios são diversificados e motivam? É a explicação lógica precisa e ao mesmo tempo compreensível? Até que ponto é que o conhecimento é aplicável na prática?;
- c) língua - se o texto é simples, claro, conciso e preciso nas definições, teoremas, provas ou outras regras;
- d) competências promovidas - como a melhoria da compreensão de leitura, a análise, habilidades de contagem, orientação no espaço, gosto em fazer demonstrações ou argumentar;
- e) aparência, essencialmente importante como um factor motivador - adequação da ilustração, parágrafos bem organizados e legíveis que facilitem a compreensão e, por conseguinte, a aquisição de conhecimentos;
- f) considerações práticas – que incluam a síntese dos materiais suplementares: livro do professor, caderno, folhas de teste, soluções, a durabilidade do livro, o seu tamanho ou o seu preço.

Uns anos mais tarde, em 2011, na mesma revista em que havia sido publicado o artigo produzido pelos autores acima referidos, foi publicado um outro, a propósito da análise de Manuais Escolares de Matemática em uso nas escolas primárias húngaras. Neste outro, Tunde e Gabriella (2011) argumentam que para os livros didácticos desempenharem bem a sua real função precisam atender a certos requisitos. Assim sendo, resumem os critérios a que os Manuais de Matemática devem atender, da seguinte forma:

- 1) satisfação geral;

- 2) precisão científica matemática:
 - a. figuras e diagramas matematicamente corrector;
 - b. precisão científica;
 - c. terminologia matemática precisa;
 - d. conceitos matemáticos bem definidos;
 - e. exemplos que reforcem os conceitos matemáticos;
- 3) orientações para as tarefas:
 - a. variedade de tarefas e problemas para resolver;
 - b. quantidade razoável de tarefas e de tarefas lógicas;
 - c. tarefas diferenciadas;
 - d. tarefas da vida real;
- 4) harmonização e co-ordenação:
 - a. estrutura em consonância com o currículo;
 - b. harmonia para com os livros dos outros anos de escolaridade bem como com os respectivos assuntos;
- 5) sistematização:
 - a. assuntos bem estruturados;
 - b. existência de sumários nos finais de capítulos;
 - c. estrutura lógica do assunto;
- 6) linguagem;
- 7) utilização;
- 8) requisitos Psico-pedagógicos:
 - a. grupos de idades específicas;
 - b. nível do conhecimento prévio;
 - c. compreensão;
- 9) aparência, requisitos estéticos - função motivadora:
 - a. design da estética;
 - b. papel de boa qualidade;
 - c. uso apropriado das cores;
 - d. tamanho apropriado;
 - e. ilustrações apropriadas;
 - f. capa curiosa;
- 10) promoção da auto-avaliação.

Tunde e Gabriella (2011) recomendam a criação de equipas de escritores de livros didácticos, considerando-as verdadeiramente eficazes ao serem compostas por Professores do 1ºCiclo, Professores de Matemática e Professores de Pedagogia ou Metodologia e Linguistas. O professor do 1ºCiclo seria responsável por ajustar as informações ao grupo de idades, o professor de matemática seria responsável pela exactidão matemática científica e o professor de pedagogia poderia supervisionar a harmonização com o conteúdo curricular do assunto. O trabalho da equipa seria supervisionado por um especialista em linguagem, responsável pela linguagem, terminologia e precisão. Na opinião destes investigadores, livros escolares projectados por tais equipas de especialistas competentes, poderiam cumprir a sua função real de participar no Ensino da Matemática de forma mais eficiente.

Estreitando a temática da Análise e Avaliação de Manuais Escolares de Matemática, para Análise e Avaliação de Manuais Escolares de Matemática, quanto à promoção do Pensamento Algébrico dos alunos, segue-se o subcapítulo seguinte.

6.2.3.3. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMATICA QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

No que diz respeito aos 6º, 7º e 8º anos de escolaridade, foi realizado um destacado projecto de Avaliação de Manuais Escolares de Matemática, quanto ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos, denominado por Project 2061¹⁰, apoiado pela American Association for the Advancement of Science Achievement in Mathematics and Science [AAAS]. O director do projecto, Kulm (1999) adianta que para muitos professores de Matemática o livro é o seu principal guia para a implementação do currículo. Este Projecto criou uma forma de avaliação de livros didácticos de Matemática. Alguns dos livros que passaram por este projecto estão já, provavelmente em listas de adopção ou em uso em muitas salas de aula. Três vertentes matemáticas - número, geometria e álgebra - foram o foco da análise de conteúdo. Kulm (1999) é da opinião de que a melhor maneira de separar os livros didácticos bons dos menos bons é observando como eles constroem as idéias dos alunos sobre a Matemática. Os contextos devem ser significativos para os alunos. Muitos livros

¹⁰ Mais informação sobre este projecto pode ser consultada em <http://project2061.aaas.org/>

satisfatoriamente demonstram habilidades e proporcionam práticas em contextos variados, no entanto, poucos livros desenvolvem idéias matemáticas. Apenas alguns livros com as melhores classificações atribuídas, promovem o pensamento dos alunos em Matemática, por exemplo, pedindo aos alunos para explicarem conceitos como a distância ser igual ao produto da velocidade a multiplicar pelo tempo, usando palavras, símbolos ou gráficos ou pedindo-lhes que estimem valores a partir de tabelas ou gráficos, e expliquem por que razão as suas respostas são aceitáveis. Da investigação efectuada, no âmbito deste Projecto, conclui-se que muitos dos livros não avaliavam o progresso dos alunos em Matemática de uma forma bem alinhada com as metas específicas de Matemática, e poucos livros usavam as respostas dos alunos para testar, orientar ou adaptar a instrução.

Silvestre (2008), na sua tese de mestrado, analisou Manuais Escolares de Matemática do 7º e 8º anos de escolaridade, seguindo os procedimentos orientativos do Projecto 2061. Esta análise assentou na verificação de seis critérios de avaliação: identificação de um objectivo, construção de conhecimento a partir das ideias matemáticas dos alunos, mobilização dos alunos para a Matemática, desenvolvimento de ideias matemáticas, promoção do Pensamento Matemático e avaliação do progresso dos alunos. Com este trabalho, a autora propôs-se, segundo a perspectiva do referido instrumento de avaliação, verificar se os Manuais analisados iam ao encontro do que se esperava e exigia de um Manual com qualidade. Isto porque, segundo Silvestre (2008), importa compreender quais as raízes do insucesso dos alunos portugueses relativamente à aprendizagem da Matemática, neste caso específico da Álgebra, para que se possam fazer as modificações adequadas do ponto de vista didáctico, incluindo o tipo e a forma como as actividades são usualmente apresentadas aos alunos nos Manuais.

Voltemos agora à figura nº.11 apresentada no capítulo 5, onde se revelaram as seis habilidades matemáticas que se relacionam com o Pensamento Algébrico e que sumarizaram a teorização desenvolvida neste trabalho até esse momento: generalização, abstracção, pensamento analítico, pensamento dinâmico, modelação e organização. Um estudo levado a cabo por Lew (2004), sobre o Pensamento Algébrico no Currículo coreano do 1ºCiclo, identificou várias actividades, propostas pelos pelo Ministério da Educação da Coreia, que contribuem para melhorar as habilidades acima referidas. Para cada tipo de habilidade do pensamento, vejamos alguns exemplos de tarefas por ele propostas:

1. Quanto à capacidade de Generalização - resolver problemas sem simplificar as estratégias.

Exemplo: «Os alunos de uma turma planeiam realizar um campeonato de voleibol. Quantos jogos terão que fazer? Consoante o número de turmas fôr 2, 3 ou 4, investigue, respectivamente, o número de jogos. Quando o número de turmas aumenta uma unidade, como é que aumenta o número de jogos? Caso existam 7 turmas, quantos jogos se farão?»

2. Quanto à capacidade de abstracção - actividades operacionais com símbolos.

Exemplo: «Determinar os valores de A, B, C e □, na multiplicação que se apresenta na figura seguinte:»

FIGURA 12. DESCOBERTA DE SIMBOLOS NA MULTIPLIACÇÃO
 ‘Nota que, o resultado de C x C é 9. Adivinha o valor de C.’

$$\begin{array}{r}
 \text{ABC} \\
 \times \text{ABC} \\
 \hline
 \text{ABC} \\
 \square\square 4 \\
 \square\square 1 \\
 \hline
 \square\square\square\square 9
 \end{array}$$

FONTE: Lew (2004)

3. Quanto ao Pensamento Analítico - resolver equações de forma intuitiva.

Exemplo: «Na equação $\square + \diamond = \square$, quando $\square$ valer 8 quanto vale $\diamond$?»

4. Quanto ao Pensamento Dinâmico - resolver problemas que envolvam proporcionalidade directa.

Exemplo: «O preço de duas garrafas de coca-cola é 3,5€. Quantas garrafas se conseguem comprar com 8€? Que tipo de relação existe entre o número de garrafas compradas e o preço a pagar?»

5. Quanto à Modelação - representar uma situação através de diagramas.

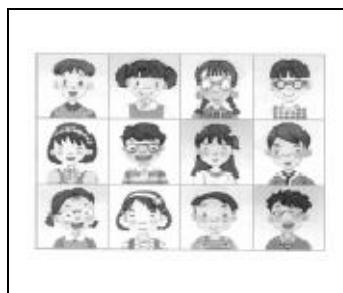
Exemplo: «Quantos jogos podem jogar-se com 3 crianças, se cada uma delas jogar um jogo com cada uma das outras? E se o número de crianças fôr 4? E 5? E 29?»

6. Quanto à Organização – classificar.

Exemplo: «Observa as seguintes crianças que gostam de ler, como hobbie, na figura nº.13 »

FIGURA 13. ACTIVIDADE ILUSTRADA POR CRIANÇAS QUE GOSTAM DE LER

Quantas são rapazes com óculos? Quantas são rapazes sem óculos? Quantas são raparigas com óculos?»



FONTE: Lew (2004)

Este investigador prossegue, compilando no quadro que em seguida se apresenta, o quadro n.13, os objectivos estruturais da promoção do Pensamento Algébrico, que se deverão encontrar nos Manuais Escolares de Matemática para crianças do 1ºCiclo.

QUADRO 13. METAS ESTRUTURAIS DO PENSAMENTO ALGEBRICO, A ESTAREM PRESENTES NOS MANUAIS DE MATEMÁTICA DO 1ºCICLO

PENSAMENTO ALGÉBRICO	METAS ESPECÍFICAS
Generalização	- Reconhecer padrões e relações em sequências numéricas e de figuras - Resolver problemas descobrindo padrões - Resolver problemas usando estratégias simplificadas
Abstracção	- Compreender conceitos e propriedades matemáticas - Usar símbolos que se relacionem com conceitos e propriedades - Resolver actividades operativas com símbolos abstractos
Pensamento Analítico	- Resolver equações de forma intuitiva - Resolver equações pela operação inversa - Resolver problemas trabalhando de trás para a frente
Pensamento Dinâmico	- Decompor um número de várias formas e vice-versa - Resolver problemas usando a estratégia de tentativa e erro - Identificar relações entre dois conjuntos de objectos diferentes - Resolver problemas usando a proporcionalidade directa
Modelação	- Inventar uma história que se relacione com uma expressão dada - Inventar um problema que se relacione com uma expressão dada - Colocar um problema usando uma dada expressão com símbolo □ - Modelar uma situação usando um diagrama ou uma

	figura
Organização	▪ Classificar ▪ Resolver problemas através tabelas ▪ Resolver problemas usando uma estratégia de dedução lógica

FONTE: (Lew, 2004)

Tendo-se reflectido neste momento sobre toda a informação recolhida neste trabalho, e no sentido de se sintetizar quais as principais habilidades a desenvolver nas crianças do 1ºCiclo, que promovem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, e que se pretende investigar se se encontram presentes nos manuais, elaboraram-se os quadros nº.14 e nº.15 que se apresentam no subcapítulo que se segue.

6.2.3.4. CONSTRUÇÃO DE UM QUADRO DE HABILIDADES QUE CARACTERIZAM O PENSAMENTO ALGÉBRICO, QUE SE ESPERA VER PROMOVIDAS NOS MANUAIS ESCOLARES DE MATEMÁTICA

Os quadro nº.14 e nº.15, construídos respectivamente para o 1º e 2º anos e para o 3º e 4ºanos, reflectem não só a investigação levada a cabo por Lew (2004), da Coreia, mas também pelo Currículo do Novo México (New Mexico State University [NMSU], 2004) e pelas Normas estabelecidas pelo NCTM, tal como já havia sido considerado no capítulo 5, nos quadros nº.8 e nº.9, além, com certeza, do Programa nacional de Matemática para o Ensino Básico.

A razão pela qual surge neste momento o Novo México deve-se, tal como brevemente referido, ao facto de o seu currículo seguir à risca as Normas definidas pelo NCTM detalhando-as, o que se revelou importante para a compreensão das características do Pensamento Algébrico.

Reuniu-se sobre o 1ºCiclo, para compreensão de conceitos algébricos e suas aplicações por parte dos alunos, as Normas definidas pelo NCTM, as metas estruturais apresentadas no quadro nº.13, e os padrões definidos pelo Novo México para compreensão de conceitos algébricos e suas aplicações. Analisaram-se e compararam-se tendo-se concluído que era possível identificar habilidades comuns, características deste tipo de pensamento. Assim, olhando para o novo Programa de Matemática do 1ºCiclo, procuraram-se quais destas habilidades estavam presentes, tendo-se construído para o efeito um quadro presente no Apêndice A. Depois de assinaladas as habilidades comuns às quatro orientações curriculares,

elaboraram-se os quadros que se seguem nº.14 e nº.15. De ressaltar que estas habilidades nem sempre foram comuns às quatro orientações, por vezes, foram apenas comuns a algumas, no entanto assumiu-se a decisão de se manterem, por se considerarem importantes. Assim sendo, algumas não constam do Programa nacional de Matemática, facto que será sempre devidamente assinalado.

As orientações acima referidas, segundo a pesquisa efectuada e aqui apresentada até ao momento, caracterizam as competências a desenvolver em alunos do 1ºCiclo, e que se esperam ver promovidas nos Manuais Escolares de Matemática.

Com excepção do Novo México, em que as orientações vêm indicadas especificamente por cada ano de escolaridade do 1ºciclo, para os três outros casos vêm especificadas em conjunto para 1º e 2º anos e para 3º e 4º anos. Por esta razão, se procedeu desta mesma forma.

Observe-se o quadro nº.14, referente ao 1º e 2º anos:

QUADRO 14. HABILIDADES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO ESPERADOS EM CRIANÇAS DO 1º E 2º ANOS

1º ANO/ 2º ANO	PROGRAMA/METAS	NCTM	COREIA	NOVO MÉXICO
CLASSIFICAR	Classificar de acordo com um dado critério. Descrever objectos, fazendo classificações e justificando os critérios utilizados. Reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações Classificar dados utilizando diagramas de Venn e de Carroll	Classificar objectos	Classificar uma situação segundo certos critérios	
ORDENAR	Ordenar de acordo com um dado critério. Ordenar comprimentos, massas, capacidades e áreas.	Ordenar objectos		
INVESTIGAR REGULARIDADES	Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números.	Reconhecer, descrever e ampliar padrões Analisar a forma como são gerados os padrões de repetição e os de crescimento	Desenhar figuras apropriadas que identifiquem um padrão que as crianças reconheçam Pintar desenhos coloridos com base num padrão Encontrar várias regras na tabela da multiplicação Fazer a tabela da multiplicação 12x12 com base em regras para a tabela da multiplicação de 9x9	Reconhecer, reproduzir, descobrir, estender e criar padrões de repetição (p.e. cor, forma, tamanho, som, movimento e números simples e traduzir de uma representação para outra Contar com um gráfico de centenas (de 2 em 2 até 20, de 5 em 5 e de 10 em 10 até cem) Identificar padrões numéricos num gráfico de centenas
	Utilizar diagramas de Venn e de Carroll	Usar representações concretas, pictóricas e verbais para desenvolver uma compreensão das	Decompôr todos os números até 10, inclusive, usando diferentes métodos	Contar com um gráfico de centenas (de 2 em 2 até 20, de 5 em 5 e de 10 em 10 até cem) Escrever frases numéricas que usem objectos concretos, pictóricos e

REPRESENTAR	Identificar e dar exemplos de diferentes representações para o mesmo número. Representar números na recta numérica. Representar diferentes itinerários ligando os mesmos pontos (inicial e final) e utilizando pontos de referência. Ler e desenhar plantas simples Ler, explorar e interpretar informação (apresentada em listas, tabelas de frequências, gráficos de pontos e pictogramas) respondendo a questões e formulando novas questões. Usar os sinais +, -, x e : na representação horizontal do cálculo Identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção.	notações simbólicas inventadas e convencionais	Investigar uma situação problemática através de uma tabela que represente relações entre as condições do problema Usar o símbolo $\square$ para representar valores desconhecidos	representações verbais para expressar situações matemáticas usando símbolos convencionais e inventados (p.e. +, -, =) Representar formas equivalentes do mesmo número através do uso de modelos físicos, diagramas e expressões de números até 20 (p.e., $3+5=8$, $2+6=8$) Contar usando gráficos de centenas, para diferenciar hábitos de contagem versus significado dos números Usar linguagem matemática para descrever uma variedade de representações Resolver problemas de adição e subtração usando dados simples a partir de gráficos, pictogramas e frases numéricas
COMPARAR	Comparar fazendo classificações e justificando os critérios utilizados. Comparar comprimentos, massas, capacidades e áreas. Utilizar a simbologia <, > e = Comparar e descrever sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças.			
	Utilizar a simbologia <, > e =			Demonstrar e descrever o conceito de igual usando objectos e escalas de

COMPREENDER O CONCEITO DE SINAL DE IGUAL				equilíbrio Explicar o conceito de igual , usando objectos ou dando exemplos (p.e., as quantidades em ambos os lados da equação são as mesmas)
CONHECER E APLICAR AS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES		Ilustrar os princípios e as propriedades gerais das operações, como a comutatividade	Compreender a propriedade comutativa da adição Compreender a relação entre adição e subtracção	Usar objectos, palavras e símbolos para explicar o conceito de adição
MODELAR SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS	Resolver problemas envolvendo adições, subtracções, multiplicações e divisões. Resolver problemas envolvendo relações numéricas. Resolver problemas envolvendo dinheiro.	Modelar situações que envolvam a adição e a subtracção de números inteiros através da utilização de objectos, figuras e símbolos	Criar uma história que combine com uma expressão que envolva as operações de adição e subtracção Colocar um problema a partir de expressões dadas que envolva as operações de adição e subtracção Modelar uma situação usando uma expressão com □ Resolver um problema usando uma estratégia “de trás para a frente”	Escrever frases numéricas que usem objectos concretos, pictóricos e representações verbais para expressar situações matemáticas usando símbolos convencionais e inventados (p.e. +, -, =) Descrever situações que envolvam adição e subtracção de números inteiros que incluam objectos, desenhos e símbolos (p.e. o Roberto tem 4 maçãs, a Maria tem mais 5) Relacionar situações problemáticas do dia-a-dia com frases numéricas que envolvam adição e subtracção (p.e., 25 alunos vão a uma loja. Sabendo que cabem 5 em cada carro, quantos carros serão necessários?) Usar linguagem matemática para descrever uma variedade de situações matemáticas Modelar situações de adição e subtracção de números inteiros, usando objectos, figuras e símbolos Resolver problemas relacionados com o comércio (p.e., com dinheiro e medidas) Resolver problemas de adição e subtracção usando dados simples a partir de gráficos, pictogramas e frases numéricas
DESCREVER VARIAÇÕES		Descrever variações qualitativas, como o facto de um aluno ter crescido e também quantitativas		Descrever mudanças qualitativas (p.e., um estudante vai crescendo em altura, as árvores tornam-se maiores, o gelo derrete) Descrever mudanças quantitativas (p.e., um estudante cresceu 2 polegadas num ano, a água aquece até ferver)
RESOLVER EQUAÇÕES			Resolver uma equação encontrando condições necessárias	Resolver frases numéricas abertas Construir e resolver frases abertas que tenham variáveis (p.e., $10=?+7$) Construir e resolver frases abertas que tenham variáveis até 20 (p.e., $20=?+6$)

UTILIZAR CALCULADORAS	É referido como sendo transversal a todos os ciclos.			Contar usando calculadoras para diferenciar hábitos de contagem versus significado dos números

Após uma análise atenta do quadro nº.14 elaborou-se a seguinte síntese relativamente às habilidades mencionadas:

- classificar – apenas está ausente no programa do Novo México;
- ordenar – a ordenação é somente referida pelo Programa nacional e pelas Normas do NCTM;
- investigar regularidades – analisar, descrever e ampliar padrões são habilidades referidas pelas quatro orientações curriculares;
- representar – as representações gráficas, pictóricas e verbais são referidas por todos e o recurso a diferentes representações para o mesmo número só não é explicitada pelo NCTM; apenas o Programa nacional faz referência à representação de diferentes partes da unidade sob a forma de fracção;
- comparar – a comparação numérica por meio dos símbolos $>$, $<$ ou $=$, bem como a comparação de sólidos geométricos quanto às suas características, são somente orientações curriculares portuguesas;
- sinal de igual – é apenas referido como significado deste sinal, a igualdade entre quantidades, pelo Programa português e mexicano;
- modelar situações – todos referem a modelação de situações problemáticas através das operações de adição e subtracção sendo ainda a multiplicação e a divisão mencionadas neste contexto pelas orientações nacionais; neste âmbito, da modelação, a resolução de problemas com dinheiro é indicada por Portugal e México;
- descrever variações – a descrição de variações qualitativas e quantitativas não consta do programa nacional nem da Coreia, apenas dos restantes;
- recurso a calculadoras – somente nas orientações do México as calculadoras são indicadas, como instrumento para construir significados sobre os números, não para cálculos.

Segue-se o quadro nº.15, referente ao 3º e 4º anos:

QUADRO 15. HABILIDADES DO PENSAMENTO ALGEBRICO ESPERADOS EM CRIANÇAS DO 3º E 4º ANOS

3º/4º ANOS	PROGRAMA/METAS	NCTM	COREIA	NOVO MÉXICO
INVESTIGAR REGULARIDADES	Investigar regularidades numéricas Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos	Representar e analisar padrões, usando palavras, tabelas e gráficos	Fazer figuras até ao 5º número triangular e 5º número quadrangular	Criar e estender padrões numéricos e geométricos incluindo padrões da multiplicação Representar e analisar padrões e funções simples, usando palavras, tabelas e gráficos Criar e descrever padrões numéricos e geométricos incluindo padrões de multiplicação e divisão Encontrar e analisar padrões usando tabelas de valores
TER RACIOCÍNIO PROPORCIONAL	Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional		Resolver um problema usando a proporcionalidade directa	Resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade incluindo as de preço unitário (p.e., se 4 maçãs custam 80 centavos então uma maçã custa 20 centavos) Resolver problemas que envolvam relações proporcionais (incluindo preço unitário e interpretações de mapas, p.e., se 1 polegada=5 milhas, então 5 polegadas= $\square$ milhas)
EFFECTUAR CÁLCULO MENTAL	Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades.			
GENERALIZAR		Descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos	Determinar a 13ª figura de um padrão descoberto Encontrar o número de triângulos equiláteros numa figura através de uma estratégia de simplificação	
ANALISAR FUNÇÕES/ RELAÇÕES		Representar e analisar funções, usando palavras, tabelas e gráficos	Reconhecer a idade relacional entre dois irmãos Representar a relação entre dois conjuntos de números em termos de $\square$ e O	Representar relações entre quantidades sob a forma de expressões matemáticas, equações ou desigualdades Seleccionar símbolos operacionais e relacionais apropriados para tornar uma expressão verdadeira (p.e., completar $4\square 3=12$, qual o símbolo operacional que falta?) Representar relações funcionais simples: a) resolver problemas simples envolvendo uma relação

				funcional entre duas quantidades (p.e., encontrar o custo total de múltiplos itens dado o custo/unidade) b) estender e reconhecer um padrão linear pelas suas regras (p.e., o nº de pernas de um certo n. de cavalos pode ser calculado: contando de 4 em 4, multiplicando o n. de cavalos por 4 ou usando tabelas) Descrever relações entre quantidades sob a forma de expressões matemáticas, equações e inequações Seleccionar símbolos operacionais e relacionais apropriados para tornar uma expressão verdadeira (p.e., qual o símbolo em falta que torna verdadeira a frase $4 \square 3 = 12$) Usar e interpretar fórmulas (p.e., Área=comp x largura) para responder a questões sobre quantidades e as suas relações Desenvolver fórmulas simples explorando quantidades e as suas relações Usar e interpretar fórmulas para responder a questões sobre quantidades e as suas relações
CONHECER E APLICAR AS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES	Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades.	Identificar propriedades, como a comutatividade, a associatividade e a distributividade, e aplicá-las ao cálculo com números inteiros	Compreender a relação inversa entre as operações de multiplicação e divisão	Reconhecer e usar a propriedade comutativa da multiplicação (p.e., se $5 \times 7 = 35$ então $7 \times 5 = ?$) Reconhecer e usar as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação (p.e., se $5 \times 7 = 35$, então quanto é 7×5?, se $5 \times 7 \times 3 = 15$, então quanto é $7 \times 3 \times 5$?) Explorar a utilidade e utilização das propriedades de comutatividade, associatividade, distributividade, elemento identidade e elemento neutro quando se opera com números
RESOLVER SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS	Resolver problemas que envolvam as operações em contextos diversos. Resolver problemas envolvendo números na sua representação decimal. Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais. Resolver problemas respeitantes	Modelar situações problemáticas, usando objectos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões	Resolver um problema utilizando uma estratégia de sustentação Resolver problemas utilizando estratégias de tentativa e erro Resolver um problema usando a proporcionalidade directa Colocar um problema que envolva uma expressão numérica sobre divisão	Resolver problemas que envolvam equações numéricas Modelar situações problemáticas com objectos e usar representações tais como: figuras, gráficos, tabelas e equações para desenhar conclusões Resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade incluindo as de preço unitário (p.e., se 4 maçãs custam 80 cêntimos então uma maçã custa 20 cêntimos) Resolver problemas que envolvam relações proporcionais (incluindo preço unitário e interpretações de mapas, p.e., se 1 polegada=5 milhas, então 5 polegadas=$\square$ milhas)

	a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida SI. Ler e interpretar calendários e horários. Resolver problemas envolvendo situações temporais.		Colocar um problema que envolva uma expressão numérica com cálculos mistos Modelar situações usando uma expressão com $\square$ Modelar situações usando um diagrama Organizar uma situação problemática sistematicamente recorrendo a uma tabela de uma dimensão para representar as condições do problema	Modelar situações problemáticas e usar gráficos, tabelas, desenhos e equações para desenhar conclusões (p.e., diferentes padrões de variação)
REPRESENTAR E INTERPRETAR	Ler, explorar, interpretar e descrever tabelas e gráficos, e, responder e formular questões relacionadas com a informação apresentada. Construir e interpretar gráficos de barras. Ler e utilizar mapas e plantas, e construir maquetas simples.	Modelar situações problemáticas, usando objectos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões	Modelar situações usando um diagrama Organizar uma situação problemática sistematicamente recorrendo a uma tabela de uma dimensão para representar as condições do problema	Modelar situações problemáticas com objectos e usar representações tais como: figuras, gráficos, tabelas e equações para desenhar conclusões Representar e analisar padrões e funções simples, usando palavras, tabelas e gráficos
TER A NOÇÃO DE VARIÁVEL/INCÓGNITA		Representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo.	Determinar o valor de alguns dígitos representados por $\square$ ou de símbolos alfabéticos na multiplicação vertical Modelar situações usando uma expressão com $\square$	Usar e interpretar variáveis, símbolos matemáticos e propriedades para escrever e simplificar expressões e frases Usar letras, caixas ou outros símbolos que suportem números em expressões simples ou equações (p.e., demonstrar compreensão do conceito de variável) Identificar símbolos e letras que representem o conceito de variável como uma quantidade desconhecida
TER A NOÇÃO DE PARÊNTESES				Usar e interpretar variáveis, símbolos matemáticos e propriedades para escrever e simplificar expressões e frases Interpretar e avaliar expressões matemáticas usando parêntesis
TER A NOÇÃO DE		Expressar relações matemáticas através de equações	Resolver uma equação usando a relação inversa entre as operações de multiplicação e divisão	Representar relações entre quantidades sob a forma de expressões matemáticas, equações ou desigualdades Resolver problemas que envolvam equações numéricas

EQUAÇÃO				Determinar o valor de lacunas (p.e., $139 + \square = 189$) Descrever relações entre quantidades sob a forma de expressões matemáticas, equações e inequações Expressar relações matemáticas usando equações Usar letras, caixas ou outros símbolos que suportem números em expressões simples ou equações (p.e., demonstrar compreensão do conceito de variável) Expressar relações matemáticas usando equações Determinar o valor de variáveis em equações simples (p.e., $80 \times 15 = 40 \times \square$)
TER A NOÇÃO DE GRANDEZAS E UNIDADES DE MEDIDA	Resolver problemas respeitantes a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida SI.			Usar modelos de pés e polegadas para expressar conversões simples da unidade em formas simbólicas (p.e., 36 polegadas = $\square$ pés $\times$ 12) que desenvolvam a compreensão conceptual versus as habilidades procedimentais
ANALISAR A VARIAÇÃO		Investigar a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável Identificar e descrever situações com taxas de variação constantes ou variáveis e compará-las		Demonstrar como é que a variação de uma variável pode estar relacionada com a variação de outra variável (p.e., através de tabelas de valores) Identificar e descrever situações com taxas constantes ou variáveis de mudança, e compará-las Determinar como é que a variação de uma variável pode estar relacionada com a variação de outra variável (p.e., através de tabelas de valores) Demonstrar e descrever taxas de variação de mudança que se relacionem com situações do mundo real (p.e., crescimento de plantas, idades dos alunos)
UTILIZAR CALCULADORAS	É referido como sendo transversal a todos os ciclos.			

Observando este quadro construído para 3º e 4º anos e relativamente às habilidades que dele constam, algumas são comuns e outras diferem das habilidades presentes no quadro construído para o 1º e 2º anos, nomeadamente:

- investigar regularidades – mais uma vez se encontra presente nas orientações dos quatro países;
- generalizar – a generalização como consequência da ampliação de padrões numéricos e geométricos é referida pela NCTM e pela Coreia;
- conhecer as propriedades das operações – identificar e utilizar as propriedades das operações são propósitos das indicações dos quatro países, contudo, a NCTM apenas explicita a compreensão da relação inversa entre a multiplicação e a divisão;
- resolver situações problemáticas - são orientações transversais aos quatro países;
- representar e interpretar - nomeadamente com recurso a gráficos, diagramas ou tabelas é explícito em todas as indicações, contudo o México vai mais além ao propôr a modelação de situações problemáticas através de equações;
- ter orientação espacial e temporal – são habilidades referidas somente pelo Programa nacional, que se podem promover através da interpretação de mapas, calendários e horários;
- analisar a variação – tal como no que disse respeito ao 1º. e 2º. anos, a descrição de variações qualitativas e quantitativas não constam do Programa nacional nem da Coreia;

Quanto às habilidades referidas pela primeira vez nos quadros nº.3º. e nº.4º observa-se o seguinte:

- raciocínio Proporcional – apenas o NCTM não faz referência à resolução de problemas que envolvam raciocínio proporcional;
- cálculo Mental – só é claro no Programa nacional, a utilização de estratégias de cálculo mental;
- analisar Funções/Relações – é uma habilidade que apenas não se encontra explicitada por Portugal;
- ter a noção de variável/incógnita – tal como anteriormente, a noção de variável e a sua representação através de um símbolo, não é excepcionalmente referida pelo currículo português;
- ter noção de parêntesis – trata-se de uma habilidade somente apontada pelo México;

- ter a noção de Equação – mais uma vez, apenas não consta do currículo português;
- noção de Grandezas e Unidades de Medida – são habilidades que podem ser trabalhadas a partir da resolução de problemas, tal como explicam as orientações curriculares de Portugal e do México.

Após a elaboração destes quadros, avançou-se então para a construção de um quadro de Avaliação de Manuais Escolares de Matemática, do 1ºCiclo, quanto à promoção do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, incluída no capítulo 7.4. deste trabalho e também subdividida em 1º/2º anos e em 3º/4ºanos.

O capítulo que se segue descreve o método utilizado no trabalho empírico desta investigação, que rumou em duas vertentes distintas mas complementares, no que diz respeito ao desenvolvimento e promoção do Pensamento Algébrico no 1ºCiclo: Análise de Concepções de Professores e Manuais Escolares de Matemática.

7. PROBLEMÁTICA E METODO

A necessária «algebrização das tarefas» a usar na sala de aula, de modo a promover a generalização em várias vertentes e a sua expressão, requer um trabalho cuidado e continuado por parte do professor.

Canavarro (2007)

7.1. PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO

Nos últimos anos, muitos investigadores têm dedicado especial atenção a discutir o conceito de Pensamento Algébrico, no âmbito do Ensino da Matemática, especialmente no que diz respeito à sua contextualização em níveis elementares de escolaridade como o 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico, em Portugal. Quem o refere é Canavarro (2007), autora segundo a qual a ideia de Pensamento Algébrico contrasta bastante com a concepção generalizada de Álgebra, que resultou da experiência escolar ao longo de várias décadas em simplificar expressões algébricas, resolver equações ou aplicar regras para manipular símbolos com elevado nível de abstracção. Este contraste manifesta-se primeiramente pela aceitação de que a notação algébrica convencional, envolvendo letras, não é a única forma de expressão de ideias algébricas pois a linguagem natural e diagramas, tabelas, expressões numéricas ou gráficos também podem ser utilizadas para expressar generalização (Carraher & Schliemann, 2007). Em segundo lugar, a distinção entre Pensamento Algébrico e a visão tradicional da Álgebra está relacionada com a importância atribuída aos significados e sua compreensão.

Actualmente, repensa-se o carácter algébrico de algumas tarefas matemáticas.

Em consequência da imposição do uso dos símbolos, a Álgebra passou a ser encarada como o estudo ou uso destes mesmos símbolos. No entanto, na raiz do Pensamento Algébrico encontram-se os significados, tratando-se de olhar através dos símbolos e não de olhar os símbolos (Kaput, Blanton, & Moreno, 2008).

Desejou-se, com este trabalho, contribuir para o avanço do conhecimento científico acerca do desenvolvimento do Pensamento Algébrico de crianças do 1ºCiclo, em Portugal. Assim, importou reflectir sobre o olhar que os professores portugueses destes níveis de escolaridade têm, neste âmbito, bem como sobre o reflexo dos próprios Manuais Escolares de Matemática acerca deste tipo de pensamento.

Até mesmo porque a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas Kieran (2007b), vindo a conquistar importância em idades cada vez mais precoces.

Segundo Canavarro (2007), nos últimos anos tem-se assistido a um movimento que defende a integração do Pensamento Algébrico na Matemática Escolar desde o início da escolaridade, associado à convicção de que as dificuldades dos alunos nesta área do saber matemático residem, maioritariamente, na utilização de simbologia desprovida de significado e na aplicação de regras que visam a manipulação simbólica com elevado grau de abstracção. Esta investigadora acrescenta ainda que, com frequência, a Álgebra constituiu-se uma temática isolada das outras do currículo da Matemática, e também dos interesses dos alunos, que tendem a não lhe reconhecer importância.

É também a ideia de que a Álgebra não é isolada da restante Matemática mas que estabelece com ela inúmeras conexões, que aqui se pretendeu investigar.

A frequente falta de articulação entre a Álgebra e a Aritmética bem como a forma como a Aritmética é normalmente leccionada, proporciona os alunos transportarem consigo concepções muito pouco favoráveis a futuras aprendizagens algébricas, e portanto, uma abordagem algebrizada da Aritmética poderá contribuir para uma aprendizagem da Álgebra mais sustentada, em anos posteriores (Canavarro, 2007).

Ao entrevistar Professores do 1ºCiclo e analisar Manuais Escolares de Matemática por eles utilizados, pretendeu-se, não só, fazer emergir as concepções que estes professores têm acerca do Pensamento Algébrico dos seus alunos, e da sua relação com o restante Pensamento Matemático, bem como deixar transparecer o modo como os manuais que utilizam, promovem este tipo de pensamento nas crianças.

Estipulados estes objectivos definiram-se as questões de investigação, na secção que se segue.

7.2. QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO

As questões aqui formuladas serviram de fio condutor a toda a investigação, e para desempenharem correctamente a sua função (Quivy & Campenhoudt, 2003) devem apresentar qualidades de clareza, isto é, serem precisas, concisas e unívocas, ou seja, serem realistas e pertinência, o que significa terem uma intenção de compreensão dos fenómenos estudados. Na sua formulação, houve a preocupação de que se constituíssem questões que fossem tratáveis cientificamente, querendo-se com isto dizer que deveriam ser questões claras, exequíveis e pertinentes, como acrescentam os autores acima citados.

A primeira questão que serviu de fio condutor à investigação é a seguinte:

Que concepções têm os professores acerca do desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos seus alunos?

Nomeadamente no que diz respeito a:

- actividades que o promovam, como as que se relacionem com temáticas tais como sequências numéricas, padrões geométricos, noção de proporção ou diferentes significados do sinal de igual;
- idades em que consideram adequado introduzir Pensamento Algébrico e como deve ser feita a transição entre a Aritmética e a Álgebra;
- quais os focos do Pensamento Algébrico;
- formas de resolução/exploração de situações problemáticas;
- introdução das operações básicas, por diferentes estratégias.

As respostas a estas questões acima referidas foram procuradas naquele que se designou por Estudo 1, durante o qual se realizaram entrevistas semi-estruturadas a Professores do 1ºCiclo.

A segunda grande questão de investigação formulou-se do seguinte modo:

De que forma os Manuais Escolares de Matemática do 1ºciclo, promovem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos?

Mais especificamente, como é que promovem o desenvolvimento de habilidades em:

- classificar objectos;
- investigar regularidades;

- conhecer diferentes formas de representação;
- ordenar e comparar;
- reconhecer diversos significados ao sinal de igual;
- modelar situações e descrever variações;
- ter raciocínio proporcional;
- recorrer ao cálculo mental;
- utilizar as propriedades das operações;
- resolver situações problemáticas.

Designou-se por Estudo 2 a procura das respostas a esta segunda questão de investigação, tendo-se para tal analisado os Manuais Escolares de Matemática de cada ano de escolaridade do 1ºCiclo, identificados como sendo os utilizados pela maioria dos professores inquiridos.

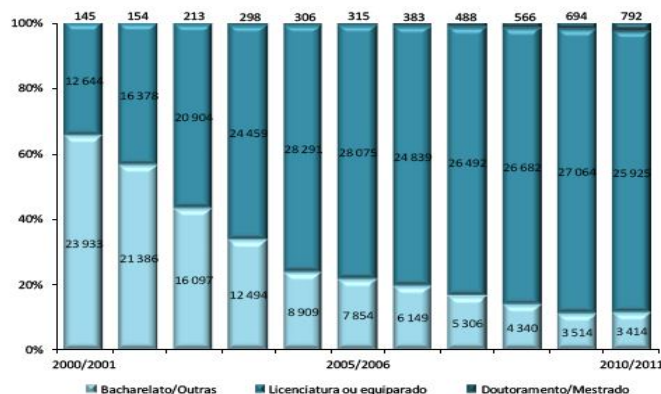
Segue-se a descrição da metodologia de investigação referente ao Estudo 1.

7.3. ESTUDO 1

7.3.1. PARTICIPANTES

Começa-se por uma breve referência a dados nacionais seguindo-se dados da região de Lisboa. Num relatório publicado pela Direcção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência [DGEEC], Direcção de Serviços de Estatísticas da Educação [DSEE] e pela Divisão de Estatísticas do Ensino Básico e Secundário [DEEBS] (2012), relativo ao ano lectivo 2010/2011, quanto à distribuição dos professores do 1ºCiclo do ensino básico no continente, 85% dos docentes são do quadro e 26% situam-se na faixa etária dos 30 aos 39 anos. O gráfico seguinte reflecte a evolução da distribuição dos Professores do 1ºCiclo, segundo as suas habilitações académicas, a nível nacional.

FIGURA 14. EVOLUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DOS PROFESSORES DO 1º CICLO, SEGUNDO AS SUAS HABILITAÇÕES ACADÉMICAS (2000/2001-2010/2011)



FONTE: DGEEC, DSEE e DEEBS (2012)

Observa-se um crescimento muito acentuado do número de docentes com licenciatura, representando no ano lectivo 2010/2011, cerca de 88,4%. Começa a surgir, a partir de 2007/2008 um grupo de professores com formação especializada.

Segundo esse mesmo relatório, na região de Lisboa, de acordo com o vínculo contratual, 76,6% pertencem ao quadro e os restantes são contratados. Identificando a faixa etária predominante, 46% têm idade entre os 30 e os 39 anos, sendo o grupo que reúne mais docentes. Em 2010/2011, os professores com licenciatura correspondiam a 89,3% e 2,2% tinham mestrado ou doutoramento.

Pretendeu-se que a amostra fosse constituída por professores do 1ºCiclo com alguns anos de experiência, maioritariamente do concelho de Sintra. Assim, foram envolvidos no estudo professores das freguesias de São Pedro de Penaferrim, Monte Abraão, São Marcos, Rio de Mouro e Massamá, que exercem funções em Estabelecimentos de Ensino Públicos e Privados. Quanto à formação Académica e Profissional, os três maiores grupo de docentes entrevistados são: os que têm apenas uma licenciatura e mais nenhuma formação (32%), os que além de uma licenciatura frequentaram o PFCM (22%) e os que além de uma licenciatura via ensino têm uma outra licenciatura ou pós-graduação (22%), apesar de não terem frequentado o PFCM. A maioria dos professores tem tempo de serviço entre os 10 e os 19 anos, representando metade da amostra. Uma parte pouco significativa dos docentes (apenas 4) tinha pouca experiência de leccionação.

7.3.2. A ENTREVISTA

Para dar início à observação houve necessidade de conceber um instrumento capaz de produzir todas as informações necessárias para responder às questões de investigação, um Guião de Entrevista semi-estruturada, a aplicar a Professores do 1ºCiclo, que se encontra no Apêndice B, e que, de forma sucinta reúne as temáticas que a seguir se indicam, tal como já havia sido referido no capítulo 6.1..

Este guião foi testado primeiramente e aferidas as questões colocadas, antes de se proceder à sua aplicação à amostra de 50 professores, pois as questões formuladas devem ser testadas junto das pessoas a quem serão colocadas, para se assegurar que são claras, precisas e compreendidas por todos da mesma forma, devendo ser reformuladas se o resultado não for satisfatório (Quivy & Campenhoudt, 2003).

Assim sendo, aplicou-se a entrevista a um pequeno número de docentes do 1ºCiclo tendo sido ouvidas, analisadas e procedendo-se posteriormente aos ajustes considerados necessários no respectivo Guião, que inclui itens de resposta fechada e outros de resposta aberta.

Remeteu-se para o Apêndice C a descrição de cada grupo de questões colocadas, os seus objectivos e respectiva fundamentação teórica, para que aqui não se tornasse demasiado exaustivo. Julga-se contudo importante tecer, neste momento, uma síntese da sustentação e fundamentação da construção do Guião, que resultou da investigação realizada neste trabalho, presente nos capítulos 1 a 6. Passa-se então a apresentar uma súmula da fundamentação teórica recolhida ao longo do corpo deste trabalho que conduziu a cada tema da entrevista.

Tendo-se fundamentado que a dinâmica da aquisição do conhecimento matemático é importante para o desenvolvimento consistente de metodologias apropriadas a um melhor desempenho profissional, segundo Fernandes et al. (2002) e Canário (1993) definiu-se o tema Formação Académica e outras.

Uma vez que todos os docentes certificados como especialistas matemáticos dos anos elementares devem conhecer, compreender e ensinar nos seguintes domínios: Números e

Operações, Álgebra, Geometria e Medida e Probabilidades e Estatística (NCTM, 2012) e que os professores precisam de conhecimentos científicos e pedagógicos de Matemática, para ensinar (Actas do ProfMat, 1998) constituiu-se o tema Formação Académica específica em Matemática.

Dependendo a Álgebra de pelo menos seis tipos de habilidades de Pensamento Matemático: generalização, abstracção, pensamento analítico, dinâmica de pensamento, modelagem e organização Kieran (2007a), pretendeu-se averiguar qual a Concepção que os professores inquiridos tinham de Álgebra.

Dado que a Aritmética pode ser conceptualizada sob formas algébricas, que construir um entendimento da Álgebra começa com a aprendizagem da Aritmética (Kieran, 2007a) e que devemos esperar que os alunos nos primeiros anos de escolaridade pensem algebricamente, pois efectivamente eles são capazes de tal (Cai & Moyer, 2008), decidiu-se investigar quais as Actividades que permitem desenvolver o Pensamento Algébrico dos alunos, na perspectiva dos professores em estudo.

Porque a pesquisa sobre o Pensamento Algébrico do aluno em tenra idade é relativamente recente (Kieran, 2006) e porque a abordagem à Álgebra nos primeiros anos de escola deve ser orientada pela perspectiva de que a generalização é o coração do raciocínio algébrico, as operações aritméticas podem ser vistas como funções e a notação algébrica pode emprestar suporte ao raciocínio matemático, mesmo entre jovens estudantes (Carragher et al., 2006) definiu-se o tema Idade e Modos de Iniciar o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Representar e analisar situações matemáticas e estruturas é um componente importante do Pensamento Algébrico (Cox, 2003), além do que representações simbólicas que utilizem os numerais, feitas pelas crianças, constituem um importante meio de registo e comunicação de ideias, estratégias e raciocínios (Castro & Rodrigues, 2008). Os três objectivos instrucionais implicados resumem-se a: representar, questionar e ouvir – são os componentes que ajudam as crianças a construir as suas próprias generalizações (Blanton, 2008). Por estas razões estabeleceu-se o tema Importância dada ao cálculo e resposta final ou à representação do problema.

Uma vez que é através da interpretação do significado do sinal de igual, de expressões algébricas e da letra que se consegue que muitos alunos trabalhem em Álgebra sem conservarem um modo de pensar aritmético (Vlassis & Demonty, A Álgebra ensinada por situações-problemas, 2008) e que olhem para o sinal de igual como um símbolo processual, além de o olharem também como um símbolo relacional ou de equivalência (Welder, 2008), definiu-se o tema Significado do sinal de igual.

Segundo Poulos (1998) o nosso sistema de numeração é construído sobre um sistema de padrões e quando os alunos contam, estão realmente a explorar o primeiro padrão regular que vêem na Matemática (Ginsburg, em entrevista). Crianças entre os três e os seis anos já podem discutir padrões em Aritmética, de acordo com a NAEYC e os alunos no 1.º Ciclo desenvolvem Pensamento Algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas, de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico. Pelos motivos expostos e porque a procura de relações recursivas envolvendo a generalização e a modelação, entre os termos de uma sequência numérica gerada por um padrão, exige a mobilização de um tipo de pensamento que é algébrico (Borrallho & Barbosa, Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões, n.d.), estipulou-se a temática das Sequências Numéricas, com o objectivo de perceber um pouco como o docente trabalha as sequências numéricas com os alunos.

Tendo sido referido por Curcio (1997) que formas de exploração que envolvam explicitamente as crianças em Pensamento Proporcional e por Murray (2010) que o raciocínio algébrico é um componente essencial ao estudo dos números racionais e do raciocínio proporcional, decidiu-se definir o tema Concepção de Proporcionalidade.

A ruptura entre a Aritmética e a Álgebra prende-se com o tipo de abordagem praticada durante a resolução de problemas, uma vez que, problemas aritméticos podem ser resolvidos directamente, através de respostas directas, enquanto que problemas algébricos terão necessariamente que se traduzir para uma linguagem e representação formais, e só depois resolvidos (Ameron, 2003). Além disso, actividades que recorram aos números como quase-variáveis permitem aos professores ajudar os alunos a construir pontes entre o conhecimento existente e o conhecimento algébrico sem recorrer a símbolos algébricos, facto que se designa por algebrificação da Aritmética ou Aritmética generalizada (Kieran, 2007a). A interacção dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado pois irá permitir que a

descoberta assuma um papel fundamental na aprendizagem e permite pensar no estudo da Álgebra desde o Pré-Escolar (Borrallho & Barbosa, Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões, n.d.). A fundamentação teórica destes três autores sugeriu a definição do tema Momento de Introdução da Álgebra e da Aritmética.

Na opinião de Kieran (2007a), entre a aprendizagem dos números na Aritmética e a aprendizagem dos símbolos literais na Álgebra situa-se uma fase intermédia em que os números são utilizados como quase-variáveis. Esta investigadora acrescentou ainda que os alunos que operam numa estrutura aritmética de referência tendem a não ver os aspectos relacionais e as propriedades das operações, focando-se no cálculo. Assim, na sua perspectiva, para uma transição bem sucedida da Aritmética para a Álgebra é necessário que: o pensamento não se limite ao cálculo de uma resposta numérica mas que tenha o seu foco nas relações, exista foco nas operações, bem como nas suas inversas (na ideia de fazer e desfazer), os alunos se concentrem na representação e não apenas na resolução de um problema, se dê atenção aos números e letras e não apenas aos números e se reoriente o significado do sinal de igual (kieran, 2004). De facto, existe um conjunto de ideias que um professor dos primeiros anos de escolaridade pode aplicar na sua sala de aula e que conduzem os seus alunos a pensar em Aritmética de forma a providenciarem um alicerce para a aprendizagem da Álgebra (NCISLA, 2000) o que conduziu à construção do tema Passagem da Aritmética à Álgebra.

Em estudos realizados, e já referenciados neste trabalho, os alunos têm capacidade para aprender a tecer e justificar generalizações sobre as propriedades e estrutura subjacentes da Aritmética (NCISLA, 2000). Por outro lado, as operações aritméticas podem ser vistas como funções e a notação algébrica pode emprestar suporte ao raciocínio matemática, ou seja, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão podem ser tratadas desde o início como funções (Carragher et al, 2006). Porque o Pensamento Algébrico pode ser estimulado a partir de diferentes focos, pensou-se em investigar quais os Focos do Pensamento Algébrico considerados pelos professores em estudo.

A Introdução das Operações, teve por base não só o facto de que o desenvolvimento do sentido do número surge muito associado à aquisição de destrezas de cálculo mental como

também a atribuição de um significado real às operações: a adição surgirá associada a situações de acrescentar, e a subtração a situações de retirar ou separar (Brocardo et al., n.d.).

Não só os números mas também as operações devem surgir inseridas na resolução de problemas da vida real (Brocardo et al., n.d.) e portanto para averiguar qual a importância da prática de exercícios de consolidação ou de rotina face à exploração de situações problemáticas, pensou-se o tema Exercícios de Mecanização versus Resolução de problemas.

Os Padrões Geométricos assumiram especial relevância na fundamentação teórica deste trabalho, dada a relação existente entre a Geometria e a Álgebra. O início do estudo de padrões pode ter lugar a partir dos quatro e cinco anos de idade embora se remeta para mais tarde a sua generalização, como anteriormente referido por Ginsburg, Poulos e Kieran. Os padrões não só envolvem os alunos em todas as áreas da Matemática como também em todos os tipos de actividades matemáticas, mais concretamente em actividades como: reconhecer, visualizar, verbalizar, simbolizar ou analisar (Steen, 1998). Alguns exemplos de capacidades que são adequadas desenvolver em crianças entre os três e os seis anos na área dos Padrões são cópias simples de padrões repetitivos, como uma parede de blocos de longo, curto, longo, curto, longo, curto, longo – segundo a NAEYC e o NCTM já referidos. É sublinhado por Borralho e Barbosa (n.d.) que a interacção dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado pois irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na aprendizagem e permite pensar no estudo da Álgebra desde o Pré-Escolar.

No clássico Problema dos Apertos de Mão «5 amigos vão cumprimentar-se entre si com um aperto de mão. Quantos apertos de mão serão dados no final?», as crianças aprendem a usar ferramentas de representação como tabelas de funções e desenvolvem capacidades de interpretação de correspondências e relações nos dados, entendimento das quantidades que variam e desenvolvimento de linguagem matemática para simbolizar relações funcionais (Blanton, 2008). Ameron (2003) acrescenta que a ruptura entre a Aritmética e Álgebra prende-se com o tipo de abordagem praticada durante a resolução de problemas, uma vez que, problemas aritméticos podem ser resolvidos directamente, através de respostas directas, enquanto que problemas algébricos terão necessariamente que se traduzir para uma linguagem e representação formais, e só depois resolvidos. Em suma, pode dizer-se que o Pensamento Algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas (Ponte et al.,

2009) e por isto mesmo, um dos tópicos abordados foi Relações entre Generalizações, Representações e Álgebra, na medida em que a resolução de problemas pode estimular o desenvolvimento da capacidade de generalizar.

O Manual Escolar de Matemática, em particular, constitui um auxiliar imprescindível no processo de ensino-aprendizagem ao servir de mediador da comunicação matemática entre o professor e o aluno, quer ao nível dos conteúdos a abordar, quer no que respeita às tarefas a desenvolver (Viseu et al., 2009). Porque o manual escolar é o material mais utilizado nas salas de aula, podendo influenciar o que professores e alunos pensam e fazem (Pires M. , 2009) constitui um ponto de interesse perceber qual a Utilização do Manual Escolar por parte dos professores.

Segundo Ponte (2002), visando a aquisição de competências profissionais, são cinco as metas a atingir na Formação Inicial: a formação pessoal, social e cultural dos futuros docentes, a formação científica, tecnológica, técnica ou artística na respectiva especialidade, a formação no domínio educacional, as competências de ordem prática e as capacidades e atitudes de análise crítica, de inovação e de investigação pedagógica. Reflectindo-se sobre estas competências entendeu-se pertinente averiguar sobre o possível Desfasamento entre a Formação Académica e a Prática Docente.

7.3.3. PROCEDIMENTOS

Efectuaram-se deslocações a cada uma das Direcções de Agrupamentos, onde foi entregue um pedido de autorização de colaboração do corpo docente, conforme consta do Apêndice D, tendo colaborado quem se mostrou disponível para tal. Cada entrevista foi previamente agendada e decorreu na presença do investigador entrevistador e do professor entrevistado, tendo sido registada em áudio e no papel.

7.3.4. TRATAMENTO DE DADOS

A análise das entrevistas implicou o recurso à análise do seu conteúdo com o objectivo de tirar partido de um material dito «qualitativo», frequentemente necessário em trabalhos de

pesquisa (Bardin, 1977). Em investigação social, o método das entrevistas está sempre associado a um método de análise de conteúdo. Durante as entrevistas trata-se, de facto, de fazer aparecer o máximo possível de elementos de informação e de reflexão, que servirão de materiais para uma análise sistemática de conteúdo que corresponda às exigências de explicitação, de estabilidade e de intersubjectividade dos processos (Quivy & Campenhoudt, 2003). Estes autores acrescentam que a análise de conteúdo desempenha na investigação social um papel cada vez mais relevante, principalmente porque oferece a possibilidade de tratar de forma metódica informações e testemunhos que apresentam algum grau de profundidade e complexidade, como é o caso de relatórios de entrevistas pouco directivas.

As respostas às questões colocadas na entrevista foram categorizadas e realizou-se uma análise frequencista dessas mesmas respostas. Esta categorização aconteceu após a aplicação das entrevistas, pois como diz Vala (1986) sempre que o investigador não se sente apto para antecipar todas as categorias que podem assumir as representações dos sujeitos questionados, recorrerá a perguntas cujas respostas podem ser categorizadas *à posteriori*.

Para avaliar a fiabilidade desta classificação, foi realizada uma segunda análise de conteúdo a 10% do corpus recolhido, isto é, a 5 das 50 entrevistas realizadas, por parte de um segundo investigador. Esta análise cobriu os itens de resposta construída entre as questões 3.1 e 7.2. Das 152 classificações atribuídas, houve um acordo em 139, o que corresponde a um nível de concordância bastante aceitável de 0.91.

Depois de analisadas as 50 entrevistas, teceram-se os resultados, que se apresentam na secção 8.1..

Em seguida descreve-se a metodologia de investigação referente ao Estudo 2.

7.4. ESTUDO 2

7.4.1. OS MANUAIS ESCOLARES

De entre os manuais utilizados pelos professores entrevistados, analisaram-se os adoptados pela maioria das escolas a que pertenciam os professores, referentes a cada ano de

escolaridade. Trata-se pois dos manuais denominados «A Grande Aventura» dos 1º, 2º, 3º e 4º anos de escolaridade.

7.4.2. CONSTRUÇÃO DE UM INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO

Depois de elaborados os quadros nº.14 e nº.15 acerca das habilidades que caracterizam o Pensamento Algébrico e que se esperam ver promovidas nos Manuais Escolares de Matemática, foram construídos para 1º e 2º anos de escolaridade e para 3º e 4º anos de escolaridade, dois quadros de análise e avaliação de manuais, que a seguir se apresentam – quadros nº.16 e nº.17.

Apesar de algumas das habilidades não virem referidas no Programa português de Matemática para o Ensino Básico, decidiu-se mantê-las para análise, facto a que se fará referência sempre que se considere pertinente. É de referir ainda que a escala de avaliação foi inspirada no quadro de avaliação de manuais, construída por Carol Knight, conforme referido, que se pode consultar no Anexo B.

QUADRO 16. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA, DO 1º E 2º ANO, QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DOS ALUNOS

COMPETÊNCIAS	ESPECIFICAÇÃO DO PROGRAMA NACIONAL DE MATEMÁTICA PARA O 1º/2º ANOS	CLASSIFICAÇÃO			
		AUSENTE (0)	INADEQUADO (1)	ADEQUADO (2)	EXEMPLAR (3)
CLASSIFICAR	Classificar de acordo com um dado critério. Descrever objectos, fazendo classificações e justificando os critérios utilizados. Reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações Classificar dados utilizando diagramas de Venn e de Carroll				
ORDENAR	Ordenar de acordo com um dado critério. Ordenar comprimentos, massas, capacidades e áreas.				
INVESTIGAR REGULARIDADES	Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números.				
REPRESENTAR E INTERPRETAR	Utilizar diagramas de Venn e de Carroll Identificar e dar exemplos de diferentes representações para o mesmo número. Representar números na recta numérica. Representar diferentes itinerários ligando os mesmos pontos (inicial e final) e utilizando pontos de referência. Ler e desenhar plantas simples Ler, explorar e interpretar informação (apresentada em listas, tabelas de frequências, gráficos de pontos e				

	pictogramas) respondendo a questões e formulando novas questões. Usar os sinais +, -, x e : na representação horizontal do cálculo Identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção.				
COMPARAR	Comparar fazendo classificações e justificando os critérios utilizados. Comparar comprimentos, massas, capacidades e áreas. Utilizar a simbologia <, > e = Comparar e descrever sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças.				
COMPREENDER O CONCEITO DE SINAL DE IGUAL	Utilizar a simbologia <, > e =				
CONHECER E APLICAR AS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES					
MODELAR SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS	Resolver problemas envolvendo adições, subtracções, multiplicações e divisões. Resolver problemas envolvendo relações numéricas. Resolver problemas envolvendo dinheiro.				
ANALISAR A VARIAÇÃO					
TER A NOÇÃO DE EQUAÇÃO					
UTILIZAR A CALCULADORA					

QUADRO 17. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA, DO 3º E 4º ANO, QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DOS ALUNOS

COMPETÊNCIAS	ESPECIFICAÇÃO DO PROGRAMA NACIONAL DE MATEMÁTICA PARA O 3º/4º ANOS	CLASSIFICAÇÃO			
		AUSENTE (0)	INADEQUADO (1)	ADEQUADO (2)	EXEMPLAR (3)
INVESTIGAR REGULARIDADES	Investigar regularidades numéricas. Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos.				
TER RACIOCÍNIO PROPORCIONAL	Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional				
EFECTUAR CÁLCULO MENTAL	Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades.				
GENERALIZAR					
ANALISAR FUNÇÕES E RELAÇÕES					
CONHECER E APLICAR AS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES	Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades.				
MODELAR SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS	Resolver problemas que envolvam as operações em contextos diversos. Resolver problemas envolvendo números na sua representação decimal. Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais.				

	Resolver problemas respeitantes a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida SI. Ler e interpretar calendários e horários. Resolver problemas envolvendo situações temporais.				
REPRESENTAR E INTERPRETAR	Ler, explorar, interpretar e descrever tabelas e gráficos, e, responder e formular questões relacionadas com a informação apresentada. Construir e interpretar gráficos de barras. Ler e utilizar mapas e plantas, e construir maquetas simples.				
TER A NOÇÃO DE VARIÁVEL/INCÓGNITA					
TER A NOÇÃO DE PARENTESIS					
TER A NOÇÃO DE EQUAÇÃO					
UTILIZAR GRANDEZAS E UNIDADES DE MEDIDA	Resolver problemas respeitantes a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida SI.				
ANALISAR A VARIAÇÃO					
UTILIZAR A CALCULADORA					

Depois de recolhidos os dados resultantes da análise dos manuais, seguiu-se o seu tratamento.

7.4.3. TRATAMENTO DE DADOS

Realizou-se uma análise qualitativa dos dados recolhidos durante a observação dos manuais, cujos resultados se apresentam na secção 8.2..

8. RESULTADOS

Começámos com três meninos e eles tinham que se cumprimentar uma vez entre si....e se agora metêssemos outro amigo no cumprimento, quantos apertos de mão é que dariam?...e fomos juntando até aos seis amigos...eles perceberam que mais um amigo que juntassem, os apertos de mãos aumentariam sempre na mesma proporção...e depois fizemos uma tabela para o problema....construída por eles, de dupla entrada...mas já tinha havido um trabalho prévio.

(professor entrevistado)

8.1. A ENTREVISTA

Depois de aplicadas as 50 entrevistas, seguiu-se a análise do seu conteúdo. Para esse efeito construíram-se tabelas de frequências absolutas e relativas, para cada questão, a partir dos quadros que reúnem a base de dados, e que podem ser consultados no Apêndice E.

Segue-se o quadro nº.18, referente à questão 1.1. da entrevista.

QUADRO 18. QUESTÃO 1.1.
Formação Académica e Profissional

CATEGORIAS (FREQUÊNCIA OU NÃO DO PFCM)	SUBCATEGORIAS (FORMAÇÃO ACADÉMICA E PROFISSIONAL)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
FREQUENTOU O PFCM	Só licenciatura	11	22%
	Licenciatura e Pós-Graduação ou outra Licenciatura	5	10%
NÃO FREQUENTOU O PFCM	Só licenciatura	16	32%
	Licenciatura e Pós-Graduação ou outra Licenciatura	11	22%
	Licenciatura e formação creditada em Matemática	5	10%
	Licenciatura, formação creditada em Matemática e Pós-Graduação ou outra Licenciatura	2	4%

Quanto à formação académica e profissional definiram-se duas categorias com o intuito de distinguir quais os professores que tinham frequentado o PFCM (ministrado pela Escola Superior de Educação de Lisboa), durante um ou dois anos.

Dentro de cada uma foram considerados os professores que só tinham uma licenciatura em Ensino Básico, ou que além de uma licenciatura tinham uma Pós-Graduação ou outra licenciatura de outra área científica, os que tinham uma licenciatura e alguma formação creditada em Matemática e ainda os que tinham uma licenciatura, alguma formação creditada em Matemática e uma pós-graduação ou outra licenciatura.

Dos que frequentaram o PFCM, 11 têm apenas uma licenciatura podendo tratar-se do antigo Magistério Primário, sendo 16 os que com apenas uma licenciatura na sua formação académica não frequentaram o PFCM.

Segue-se o quadro nº.19, referente à questão 1.2. da entrevista.

QUADRO 19. QUESTÃO 1.2.
Disciplinas de Matemática, na Licenciatura

CATEGORIAS (FREQUÊNCIA OU NÃO DO PFCM)	SUBCATEGORIAS (DISCIPLINAS)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
FREQUENTOU O PFCM	Matemática e Didáctica da Matemática	10	20%
	Apenas Didáctica da Matemática	3	6%
	Apenas Matemática	1	2%
NÃO FREQUENTOU O PFCM	Matemática e Didáctica da Matemática	32	64%
	Apenas Didáctica da Matemática	4	8%

As categorias aqui definidas são justificadas como no quadro anterior. O interesse investigativo foi perceber qual a especificidade da formação matemática, académica e profissional, dos professores entrevistados, através das disciplinas relacionadas com a Matemática que tinham tido na sua formação superior. Na sua maioria, ou seja, 32 dos professores indicaram terem tido disciplinas de Matemática e Didáctica da Matemática, não tendo no entanto frequentado o PFCM. Este número contrasta com os 10 professores que além de também terem tido disciplinas desse cariz, frequentaram o PFCM.

Segue-se o quadro nº.20, referente à questão 2.1.. da entrevista.

QUADRO 20. QUESTÃO 2.1.

Número de anos de docência

CATEGORIAS (TEMPO DE SERVIÇO DOCENTE)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
0-4 anos	4	8%
5-9 anos	9	18%
10-19 anos	25	50%
20-29 anos	4	8%
30 ou + anos	8	16%

O número de anos de funções docentes foi organizado em intervalos de tempo, sobressaindo o grupo de professores com tempo de serviço entre os 10 e os 19 anos, representando metade da amostra. Uma parte pouco significativa dos docentes, apenas quatro, tinha pouca experiência de ensino.

Segue-se o quadro nº.21, referente à questão 3.1. da entrevista.

QUADRO 21. QUESTÃO 3.1.

O que é Álgebra para si?

CATEGORIAS (CONCEITO DE ÁLGEBRA)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
NÚMEROS	20	40%
NÚMEROS E OPERAÇÕES	12	24%
NÚMEROS E RELAÇÕES	4	8%
NÚMEROS E OUTROS	12	24%

Quando se questionaram os professores sobre qual a sua concepção de Álgebra, as respostas dadas revelaram diferentes características. Algumas relacionavam-se somente com números, resposta que apresenta a maior frequência, outras com números e operações e outras ainda com números e relações. A reduzida frequência de outras respostas, em que além dos números estiveram presentes outras temáticas, como equações, geometria, raciocínio, problemas ou símbolos, levou a que estas respostas se englobassem na categoria Números e Outros.

De referir que não responderam a esta questão dois professores.

Uma das professoras entrevistadas expressou-se da seguinte forma: “Eu acho que a Álgebra é um conteúdo matemático muito abrangente, abrange muitas, muitas aprendizagens...eu trabalho a Álgebra com os meus alunos...não lhes digo que é Álgebra...por exemplo, a partir do 1ºano já com sequências numéricas, depois a partir do 3º... expressões numéricas...nas operações eles também já conhecem a propriedade comutativa”. Houve quem revelasse estar a par do novo Programa de Matemática: “Eu tenho conhecimento do novo Programa...e sei que a palavra Álgebra aparece a partir do 2ºciclo, mas eu quando leio quais são os conteúdos que são trabalhados na Álgebra...é aquilo que nós fazemos...já mesmo desde o 1ºano...começo a trabalhar as sequências numéricas...”.

Segue-se o quadro nº.22, referente à questão 3.2. da entrevista.

QUADRO 22. QUESTÃO 3.2.

Temas/Actividades que acha que permitem desenvolver o Pensamento Algébrico dos alunos

CATEGORIAS (TEMAS DAS ACTIVIDADES)	SUBCATEGORIAS (HABILIDADES A DESENVOLVER)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
NÚMEROS E OPERAÇÕES	Sentido do número	19	38%
	Cálculo mental	10	20%
	Regularidades	7	14%
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	Raciocínio	37	74%
	Representar	35	70%
	Verbalizar o Raciocínio	24	48%
	Generalizar	11	22%
	Resolver Equações	2	4%

Quanto às actividades que permitem desenvolver o Pensamento Algébrico dos seus alunos, os professores deram respostas que categoricamente se organizaram naquelas que se relacionavam com números e operações e nas que se relacionavam com a resolução de problemas.

Houve uma grande diversidade de respostas por parte de cada professor, não se observando nenhum padrão nestas mesmas respostas.

Os exemplos mais ouvidos têm a ver com formas de representação e raciocínio, na resolução de problemas, seguindo-se a verbalização desse mesmo raciocínio. No que diz respeito às respostas da categoria Números e Operações, as actividades mais apontadas foram as respeitantes ao desenvolvimento do sentido do número.

Quanto à capacidade de raciocinar, é valorizada por muitos, como testemunhou um professor, ao dizer “Problema da semana...para resolverem como quiserem...para eles o importante é aprenderem com os colegas várias maneiras de chegarem lá...” acrescentando que “numa situação problemática eles têm que pensar, têm que perceber quais são os dados que lhes estão a dar...têm que raciocinar...”.

Para ilustrar a referência a diferentes formas de representação passa-se a citar as declarações de alguns professores, como por exemplo:: “O Projecto dos gráficos...análise do gráficos das férias...e depois fazemos vários...” ou “Temos a tabela dos comportamentos ou do tempo...e depois...desde o 1ºano que fazemos isto...transformamos de várias maneiras...gráfico de barras ou em círculo, mas no 1ºano faziam com os quadradinhos...” ou “os problemas...por exemplo, é dado aos alunos três camisolas e eles têm que fazer os conjuntos possíveis para combinar com quatro pares de calças...que utilizem...uma tabela de dupla entrada onde fazem os cruzamentos mas eu peço-lhes muito para eles desenharem...para visualizarem as diferentes combinações... há outros que fazem um diagrama em árvore...cada um apresenta a diferente estratégia que utilizou”.

Praticamente um quarto dos professores valoriza a verbalização do raciocínio no desenvolvimento do pensamento algébrico. Alguns referiram que: “...interpretação de gráficos...têm que saber interpretar, verbalizar...o que não é fácil para eles, muitas vezes eles percebem mas...como dizer, professora? Como explicar?...”.

Quanto às operações, houve quem referisse que “Vou para o problema, e do problema vamos tentar perceber a operação que temos que fazer e como não tínhamos dado ainda o algoritmo da adição, automaticamente introduzi...tem que se partir duma situação problemática...é modelar um problema através de uma operação...(...)...E também às vezes faço ao contrário...vou da operação para chegar ao enunciado, apresento uma operação e pergunto-lhes qual é o enunciado adequado a essa operação”.

Actividades que envolvam generalização foram citadas por 11 professores. Atribuindo-lhe importância, um professor explicou que “qualquer actividade que eu faça com qualquer conteúdo matemático estou a trabalhar Álgebra: estamos a trabalhar geometria...o geoplano...então com o geoplano posso desenvolver qualquer uma dessas capacidades, por exemplo, estamos a trabalhar polígonos...os regulares...os irregulares...há coisas que eles já generalizam, por exemplo, num quadrado, se unirem um vértice com o vértice oposto, obtém sempre triângulos...depois de experimentarem dizem como é que lá chegaram, como é que fizeram, que conclusões tiraram...”. Um outro professor explicou que “...a questão das

fórmulas da área...trabalhar o conceito e chegar à fórmula...uma generalização que sirva para todos os casos...” é também uma forma de colocar os alunos a generalizarem.

Dois dos professores fizeram referência à resolução de equações explicando um deles que ao “...representar o enunciado escrito com a simbologia matemática, por exemplo...por o ponto de interrogação como seria nas equações o x...” estava a desenvolver nos alunos Pensamento Algébrico.

Segue-se o quadro nº.23, referente à questão 4. da entrevista.

QUADRO 23. QUESTÃO 4.

Acredita ser possível iniciar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico em alunos de que idades? Como?

CATEGORIAS (IDADES)	SUBCATEGORIAS (MODOS)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
BEBÉS (N=4)	Manipulação de objectos	4	8%
INFANTIL (3/4 ANOS) (N=17)	Sentido do número	15	30%
	Resolução de problemas do Quotidiano	10	20%
	Desenhos	2	40%
PRÉ-ESCOLAR (N=19)	Sentido do número	16	32%
	Manipulação de objectos	3	6%
	Resolução de problemas do quotidiano	12	24%
1º CICLO (1º, 2º OU 3º ANOS) (N=10)	Verbalização do raciocínio	5	10%
	Desenhos	1	2%
	Pensamento abstracto	1	2%
	Cálculo mental	1	2%

Cada professor indicou apenas uma idade de começo de Pensamento Algébrico embora diversos modos de iniciar o desenvolvimento desse tipo de pensamento. Além disso, conforme se pode observar, alguns dos modos de iniciação referidos são comuns a várias faixas etárias.

Dezassete dos professores consideraram poder-se iniciar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico a partir dos 3/4 anos. Apesar de se tratar de uma idade bastante precoce, um dos professores explicou que, aos “quatro anos de idade...porque eu já tive a experiência da Pré-Primária...eles têm a capacidade...depende muito da formação da base familiar, mas a partir dos quatro anos há a idade dos porquês...até antes...as crianças têm

uma forma de construção que às vezes nos surpreende a nós também...”. Para um outro professor, a resposta foi “desde o Jardim-de-Infância...4/5 anos...até desde os três...claro que não vamos aplicar da mesma maneira, no 1ºano não uso logo o material manipulável estruturado...uso tampinhas, pauzinhos, palhinhas, mas acho que conseguem...esta minha turma...têm um bom raciocínio...faz parte do dia-a-dia deles...a matemática...aquela coisa de a gente achar que a Matemática é uma coisa à parte, não é, está em tudo! Por isso eu acho que as criança pequeninas conseguem perceber os conjuntos, agrupar...por cores...agrupar quantidades...já podem ter a noção...não sou é a favor que se ensine no Pré-Escolar os números em si, não porque senão quando chegam ao 1ºCiclo também desmotivam se souberem só aquela parte escrita do número...acho que o que é importante é trabalhar o que está por trás do número...o conceito...fazer conjuntos...o agrupar, tirar, pôr...informalmente, sem chamar nomes (adição, subtracção) às coisas!... Posso estar a fazer com os pequeninos adições e subtracções com coisas reais, com jogos (para mim é muito importante o jogo!) ... quanto mais pequeninos mais lúdicas.”.

Dezanove dos professores consideraram adequado o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos durante o ensino Pré-Escolar pois, segundo a opinião de um deles “A partir da Pré ... porque eles têm capacidades se forem bem desenvolvidos, se forem estimulados eles conseguem, têm potencial... resolução de um problema adequado à faixa etária... analisar o enunciado, interpretação, fazer como que uma decomposição do enunciado do problema, para eles conseguirem perceber através de números e desenhos...representações...para conseguirem chegar a uma conclusão...”.

Apenas dez docentes responderam que durante o 1ºCiclo. Temos o testemunho de que, segundo um destes docentes “A partir dos sete anos...começando com a concretização...quando eles, por exemplo manipulando...fazem a brincar...estou-me a lembrar dos blocos lógicos em que eles...lhes é pedido que façam este tipo de padrões...de frisos...eles já estão a relacionar, a reflectir sobre aquilo que estão a fazer...estão portanto a evoluir”.

O desenvolvimento do sentido do número foi apontado com bastante frequência como um dos modos de iniciar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, quer dissesse respeito à faixa etária da infantil, quer do Pré-Escolar.. O testemunho de um dos professores é de que “...quando nós damos até os próprios números...pretendemos desde o início que eles estabeleçam relações entre os números, isso é uma coisa importantíssima, por exemplo, o que

é que tu sabes sobre o 6? É $5+1$? É $7-1$?... todas estas relações numéricas se estabelecem desde o início...eu penso que já é um caminho para o Pensamento Algébrico”.

Segue-se o quadro nº.24, referente à questão 5.1. da entrevista.

QUADRO 24. QUESTÃO 5.1.

Quando realiza com os seus alunos actividades de resolução de problemas dá mais importância ao cálculo e resposta final ou à representação do problema? Escolha apenas uma das opções e indique dois motivos.

CATEGORIAS (A ESCOLHA)	SUBCATEGORIAS (MOTIVOS: PERMITEM DESENVOLVER HABILIDADES EM,...)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	Raciocinar	48	96%
	Calcular	8	16%
	Verbalizar	7	14%
	Compreender enunciados	6	12%

Apenas dois professores não escolheram a “resolução de problemas”, pelo que não se incluíram no quadro seguinte. Um optou pelo cálculo e resposta final justificando considerá-lo independente da capacidade de representação, e o outro por ambas as respostas dada a igual importância que lhes atribui.

Todos os professores que optaram pela resolução de problemas apresentaram como um dos motivos o desenvolvimento da capacidade de raciocinar, diferindo entre eles o segundo motivo apresentado.

Para alguns destes docentes, o raciocínio desenvolve-se a partir da descoberta de estratégias de representação de situações problemáticas e de metodologias a aplicar. Para um dos professores “A representação é o caminho para se chegar lá...eu posso errar um resultado por um pormenor mas se fiz o caminho correcto e pensei bem, isso é mesmo muito importante.”, enquanto que outro docente acrescenta: “Tenho que dar importância às duas coisas...mas inicialmente, quando eles começam a trabalhar os problemas, eu preocupo-me com a forma como eles resolvem o problema, as estratégias que usam para o resolver, como é que chegam à resposta, estando ela certa ou não...a metodologia que seguiram...o resultado final nem sempre é o mais importante, mas acaba por ter de ser também”. Quanto ao desenho como forma de representação, nomeadamente entre crianças mais pequenas “O problema não é um desenho para enfeitar, nós desenhámos aquilo que precisamos...se precisamos de fazer uma dúzia de pessoas se calhar uma dúzia de pauzinhos serve...(...) à medida que vão saindo

desta fase, é muito engraçado...ficam em níveis muito diferentes, alguns soltam-se muito rapidamente desta representação e entram logo na linguagem matemática e os outros ainda tentam fazer a paisagem...” explica um dos docentes.

A verbalização e a compreensão dos enunciados relacionam-se intimamente com a linguagem. Como diz um dos professores “O caminho é para a linguagem matemática mas até chegar lá, quando vejo que o aluno está com muitos problemas...digo-lhe para desenhar porque eu vejo que ele está a precisar de ver alguma coisa (mais concreta)”. Outros docentes referem ainda sobre os alunos, que “Eles têm muita dificuldade em explicar como é que chegaram...e às vezes os bons alunos a matemática chegam primeiro ao resultado e só depois é que ficam a pensar como é que fizeram...nalguns alunos é mesmo falta de vocabulário...falta de paciência para explicar” e que “Às vezes dá-se pouco tempo à oportunidade de eles verbalizarem...é complicado...com uma turma grande...” manifestando a sua preocupação com a importância que realmente tem sentido dar a este assunto.

Segue-se o quadro nº.25, referente à questão 5.2. da entrevista.

QUADRO 25. QUESTÃO 5.2.

Se numa prova uma questão valer 10 pontos, como classificaria os seguintes tipos de respostas escrevendo a pontuação que atribuiria a cada uma das situações, antes de cada frase, no espaço preenchido pelas reticências:

- Apenas o resultado final, correcto, sem representação do problema
- O resultado final, incorrecto e uma representação correcta do problema
- Apenas uma representação correcta do problema, sem resultado final nem cálculos intermédios

CATEGORIAS (IDADES)	VALOR MÉDIO
valor (médio) atribuído na opção a)	4,4
valor (médio) atribuído na opção b)	7,6
valor (médio) atribuído na opção c)	6,8

A opção que recebeu maior classificação foi aquela em que o resultado final estaria incorrecto e uma representação do problema, correcta.

Segue-se o quadro nº.26, referente à questão 5.3. da entrevista.

QUADRO 26. QUESTÃO 5.3.

Indique três diferentes actividades que realize com os seus alunos nas quais trabalhem o significado do sinal de igual.

CATEGORIAS (FOCO DA ACTIVIDADE)	SUBCATEGORIAS (ACTIVIDADES)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
NA RELAÇÃO	Exercícios de comparação	31	62%
	Expressões numéricas equivalentes	25	50%
	Decomposição de números	7	14%
NO RESULTADO	Realização de operações	39	78%
	Correspondências entre quantidades	10	20%
	Reduções com unidades de medida	4	8%
	Igualdades entre números decimais	2	4%

De todos os professores, 45 deram respostas que se incluíam em ambos os focos, ou seja, nas categorias de Relação e de Resultado, no entanto cinco referiram actividades que apenas abordavam o conceito de relação do sinal de igual e outras cinco actividades que somente perspectivavam o sinal de igual como um símbolo computacional, ou seja, para calcular um resultado.

Cada professor mencionou pelo menos duas actividades.

A maior parte dos professores que referiu os exercícios de comparação também referiu o trabalho com expressões numéricas equivalentes.

Relativamente aos alunos no início do 1ºano de escolaridade, um professor relatou que “Eles escrevem um sinal entre dois cães que são iguais ainda sem saberem ler nem escrever (este cão é igual àquele)...a Matemática ajuda muito” a conseguirem-se expressar através de símbolos.

Quanto à forma como são trabalhadas as noções de maior, menor ou igual, “Quando começam no 1ºano com a simbologia do $>$, $<$ ou $=$, começo sempre pelo que é mais fácil...e normalmente começo pelo tamanho...têm que identificar e comparar tamanhos....côr igual, a forma igual...figuras geométricas com a forma igual, só depois é que passamos para as quantidades e para o menor, maior”, explicou um dos docentes.

Segue-se o quadro nº.27, referente à questão 6.1. da entrevista.

QUADRO 27. QUESTÃO 6.1.

O Programa de Matemática em vigor do ME, refere que os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas. Dê dois exemplos de actividades que já tenha realizado com os seus alunos sobre esta temática, que considere relevantes.

CATEGORIAS (FOCO DA ACTIVIDADE)	SUBCATEGORIAS (ACTIVIDADES)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
NOS TERMOS DA SEQUÊNCIA	Continuar a sequência escrevendo termos seguintes	29	58%
	Contagens de 2 em 2, 4 em 4,...	25	50%
	Preencher lacunas	13	26%
NO PADRÃO	Reconhecer e verbalizar o padrão	24	48%
	Generalizar para um termo qualquer	5	10%
EM AMBOS (TERMOS E PADRÃO)	Os alunos criam uma sequência	4	8%
OUTROS	Escrita ordenada de números	9	18%

Onze professores deram respostas exclusivamente relacionadas com os termos de uma sequência. Por sua vez, ninguém referiu actividades exclusivamente relacionadas com o padrão de formação de uma sequência numérica.

Nove dos professores mencionaram a escrita ordenada de números como um exemplo para trabalhar sequências numéricas com os seus alunos, embora este tipo de actividade se considere menos relevante para o tema em análise.

Quatro professores não responderam a esta questão.

A resposta mais frequente, referida por 29 dos professores, tem que ver com a continuação da sequência, escrevendo os termos seguintes. Um professor explica que “Tínhamos um número inteiro e íam construindo os termos seguintes adicionando um número fraccionário”. A segunda resposta mais dada referiu-se às contagens de 2 em 2, 4 em 4,...facto que se encontra presente numa entrevista: “nas tabuadas...na do 2, eles vêm que termina sempre em números pares...”.

Na categoria de actividades relativas ao padrão numérico, o reconhecimento e verbalização do padrão foi referido 24 vezes. Quanto a actividades de generalização da sequência numérica, embora com reduzida frequência, estas foram mencionadas por 5 professores, destacando-se aqui o comentário de um deles: “O caso das multiplicações...determinado valor que vai multiplicar por uma décima... que vai multiplicar

por uma centésima... que vai multiplicar uma milésima... seguidamente... e depois leva-nos já a uma generalização”.

Segue-se o quadro nº.28, referente à questão 6.2. da entrevista.

QUADRO 28. QUESTÃO 6.2.

Dê dois exemplos de actividades que considere relevantes e que já tenha realizado com os seus alunos com o objectivo de desenvolver neles o conceito de proporcionalidade.

CATEGORIAS (FOCO DA ACTIVIDADE)	SUBCATEGORIAS (ACTIVIDADES OU MATERIAIS ENVOLVIDOS)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
RELAÇÃO ENTRE DUAS VARÁVEIS OU MEDIDAS (N=12)	Nº alunos/Nº de copos de sumo ou leite	12	24%
	Cálculo dos pesos dos ingredientes de um bolo em função do número de pessoas	4	8%
	Peso/altura	2	4%
	Com sólidos (altura/volume)	1	2%
	Planta da sala de aula	1	2%
DOBRO/METADE, TRIPLO/TERÇA- PARTE,... (N=5)	Com <i>cuisinaire</i>	6	12%
	Com uma pizza	5	10%
	Com a tabuada	1	2%
OUTROS (N=4)	Cálculos de Medidas	5	10%
	Números decimais e fracções	3	6%

Vinte e dois professores não responderam a esta questão, quase metade da amostra.

Vários professores seleccionaram respostas de categorias variadas. Contudo, 12 deram respostas exclusivas da categoria referente a actividades que relacionavam duas variáveis ou medidas, cinco referiram-se apenas a actividades em que trabalhavam os conceitos de dobro/metade, triplo/terça-parte,..., e quatro outros professores, indicaram somente como exemplos, actividades de cálculos de medidas e que envolvessem números decimais e fracções, embora estas sejam de carácter menos evidente para o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional.

A investigação da relação entre o número de alunos e o número de copos de sumo ou de leite foi dos exemplos mais apontados. É de sublinhar a referência a actividades com a planta da sala de aula, até mesmo porque é referida no Programa. Um dos professores explicou que “nas áreas...a planta da sala numa folha quadriculada, naturalmente apelamos para a proporcionalidade, ou seja, eles perceberem que o tamanho da mesa...e manterem-se

fiéis a esse tamanho de mesa na planta que estão a desenhar e perceberem se aquele tamanho de mesa está para o tamanho da sala que eles têm na planta, da mesma forma que o tamanho da mesa na realidade está para o tamanho da sala na realidade”.

Segue-se o quadro nº.12, referente à questão 6.3. da entrevista.

QUADRO 29. QUESTÃO 6.3.

Vê algum inconveniente em que a Álgebra seja introduzida depois da Aritmética ou considera preferível que ambas sejam introduzidas paralelamente logo desde os primeiros anos de escolaridade? Escolha apenas uma das opções.

e QUESTÃO 6.4.

A passagem da Aritmética à Álgebra costuma levantar algumas dificuldades aos alunos. Identifique três dessas dificuldades desse tipo de pensamento.

Relativamente à questão 6.3. todos os professores foram da opinião de que a Álgebra deve ser introduzida paralelamente à Aritmética, pelo que o quadro que se segue diz respeito a essa opção.

CATEGORIAS (TEMÁTICAS DAS DIFICULDADES)	SUBCATEGORIAS (DIFICULDADES)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
NÚMEROS (N=7)	Efectuar algoritmos com números grandes	12	24%
	Ser eficaz no Cálculo mental	8	16%
	Compreender Números decimais	7	14%
	Compreender as Ordens de um número	4	8%
	Fazer estimativas a olho	2	4%
	Reconhecer padrões	2	4%
	Compreender a divisão	1	2%
	Utilizar parêntesis	1	2%
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS (N=13)	Compreender o enunciado	22	44%
	Verbalizar o raciocínio	12	24%
	Descobrir diferentes estratégias de resolução	11	22%
	Resolver problemas com mais do que um passo	5	10%
	Escrever em linguagem matemática	3	6%
OUTRAS	Abstrair	17	34%
	Reduzir (unidades de medida)	2	4%
	Generalizar	1	2%
	Compreender o conceito de Ângulo	1	2%

A maioria dos professores revelou, no mínimo, três dificuldades dos seus alunos, observando-se uma grande variedade de dificuldades identificadas.

Sete docentes identificaram dificuldades nos seus alunos, exclusivamente relacionadas com a temática Números, enquanto que treze nomearam dificuldades exclusivamente relacionadas com a temática Resolução de Problemas.

Apenas um professor não respondeu à questão 6.4. apesar de ter optado pela introdução da Álgebra paralelamente à Aritmética.

A dificuldade mais vezes referida prende-se com a compreensão do enunciado de um problema. Um dos professores diz que começa a trabalhar esta temática no “2ºano, essencialmente...tem que haver primeiro uma compreensão linguística do enunciado, do problema ou da situação que ouvem...para mim a maior dificuldade é eles perceberem o que é pedido para depois pensar numa estratégia e chegar lá...pela representação de desenhos eles vão chegando lá...”. Segue-se, uma outra dificuldade, referida por 12 docentes, a verbalização do raciocínio, que se passa a ilustrar com a seguinte citação de um docente “...é explicar...porque é que fez assim...e não fez de outra maneira...mesmo estando certo, eles têm dificuldade em explicar...” e de outro docente “...nos primeiros anos é muito importante...tendo em conta essa definição...começar logo com a Álgebra...verbalizar é extremamente difícil para a maioria dos alunos...mesmo os alunos que têm um bom raciocínio quando chega a altura de explicar como é que fez...mas acho que é uma questão de hábito também...não estamos habituados a comunicar as coisas que pensamos...o nosso ensino não incentiva isso...até os adultos têm dificuldade em explicar como lá chegaram...”.

Além da realização de algoritmos com números grandes, encontrou-se frequentemente como dificuldade identificada nos seus alunos, a descoberta de diferentes estratégias de resolução, por vezes acrescida da extensão da resolução: “eles escolhem uma estratégia, que até é adequada, mas a meio perdem-se...quando ela é um bocadinho extensa”, explicou um professor.

Na categoria Outras, organizaram-se habilidades mais genéricas que não se revelaram fáceis de desenvolver nos seus alunos, para alguns dos docentes entrevistados, destacando-se a capacidade em abstrair. Tal facto é bem ilustrado na explicação que se segue “...como começar?...durante a sua infância não foram criadas situações suficientes para que eles desenvolvessem esse tipo de raciocínio que pode acontecer sobre os brinquedos, os jogos...não foram estimulados a questionar, analisar, a organizar, classificar...tudo isso...quando chegam à escola isto não está nada lá...deviam desde os três anos começar a

trabalhar estas coisas...mas só chegam aos 5 anos...não há vagas na escola...eu tenho miúdos com 6 anos com diferenças abissais (de desenvolvimento)...não só na matemática mas em tudo...habituaados a pensar sobre as coisas...levantar hipóteses...tudo isso...faz com que depois o pensamento matemático seja muito mais fácil quando há coisas mais abstractas...mas se isso está lá...está lá a base...depois é mais fácil...”. Um outro professor refere que “...eles quando estão à procura de alguma coisa (quantos lápis tem a Maria?...) já há ali qualquer coisa que eles não sabem (incógnita)...e às vezes têm que fazer determinadas estratégias...fazem uma, fazem duas e às vezes têm que fazer uma terceira para lá chegar...não representamos por x nem por y...” subentendo-se aqui também o esforço em desenvolver a capacidade de abstracção.

Segue-se o quadro nº.30, referente à questão 6.5. da entrevista.

QUADRO 30. QUESTÃO 6.5.

Quanto ao foco do pensamento algébrico, indique com qual destas perspectivas mais se identifica, de entre as opções seguintes: Estrutura da Aritmética, Trabalhar as operações como Funções ou Promover Actividades de Generalização e dê dois motivos para a sua escolha.

CATEGORIAS (FOCO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO)	SUBCATEGORIAS (MOTIVOS DA ESCOLHA) PERMITE O TRABALHO ...	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
ESTRUTURA DA ARITMÉTICA (N=11)	Do Concreto para o Abstracto	5	10%
	Com Estratégias de resolução e desenvolvimento de raciocínio	4	8%
	Outros (de decomposição numérica, de contextualização ou pela importância para as provas de aferição)	3	6%
TRABALHAR AS OPERAÇÕES COMO FUNÇÕES (N=25)	Com Estratégias de resolução e desenvolvimento de raciocínio	10	2%
	De contextualização	7	14%
	De Descoberta de relações	5	10%
	Do Concreto para o Abstracto	4	8%
	Com Representações	3	6%
	de Aplicação de propriedades e conceitos	3	6%
PROMOVER ACTIVIDADES DE GENERALIZAÇÃO	Outros (de verbalização do raciocínio, com regularidades, pela importância para as provas de aferição ou pela Interpretação de dados)	6	12%
	Com Regularidades	5	10%
	de Aplicação de propriedades e conceitos	4	8%
	Com Estratégias de resolução e	4	8%

(N=12)	desenvolvimento de raciocínio		
	De Descoberta de relações	3	6%
	Outros (do Concreto para o Abstracto, de contextualização ou com Representações)	7	14%

Dois dos professores não seleccionaram um foco uma vez ter considerado todos importantes.

As categorias definiram-se por correspondência com o foco a escolher para o Pensamento Algébrico e os motivos para a escolha foram diversos, dentro de cada categoria.

O foco no trabalho das Operações como Funções foi o que reuniu mais votos, tendo sido escolhido por 25% dos professores inquiridos. O motivo mais apontado para esta escolha prendeu-se com o facto de se considerar que desta forma é possível trabalhar diferentes estratégias de resolução e desenvolver assim o raciocínio. A resposta de um dos professores deixa transparecer de forma clara, os motivos apontados para esta escolha, que encontramos no quadro: “Operações como funções...dou ,mais valor a uma generalista porque eu acho que permite trabalhar mais coisas de várias formas, como por exemplo resolver um problema através de um esquema, fazer uma tabela e não ser na matemática tudo reduzido a uma conta...as crianças desenvolvem mais estratégias...tornar a actividade uma coisa que é delas, que pode ser diário, que se colocam na situação para conseguirem resolver, e além disso acho que conseguem desenvolver uma série de capacidades diferentes para conseguirem chegar ao resultado.”.

Conforme se pode observar no quadro anterior, alguns dos motivos apontados são comuns a vários professores que ainda assim optaram por focos diferentes. Não se pretende efectuar aqui uma descrição exaustiva desses motivos pelo que se optou pela sua identificação com cores, tornando-se mais leve a sua análise, através da observação do quadro.

Segue-se o quadro nº.3, referente à questão 6.6. da entrevista.

QUADRO 31. QUESTÃO 6.6.

Qual a intenção com que coloca problemas simples de “juntar e retirar”? Assinale com os números 1,2, ... cada uma das opções seguintes, de acordo com a ordem pela qual o costuma fazer (não é obrigatório referir-se a todas): Exercícios de preenchimento de lacunas, Algoritmos, Cálculo mental, A subtração como sendo o inverso de adição e a Contagem pelos dedos.

CATEGORIAS (CRITÉRIOS DE ESCOLHA)	SIM	VALOR RELATIVO	NÃO	VALOR RELATIVO
CONTAGEM PELOS DEDOS EM 1º LUGAR	4	8%	46	92%
ALGORITMOS EM ÚLTIMO	5	10%	45	90%
SUBTRACÇÃO COMO O INVERSO DA ADIÇÃO, ANTES DOS ALGORITMOS	21	42%	29	48%
CÁLCULO MENTAL ANTES DOS ALGORITMOS	24	48%	26	42%

Uma minoria, apenas quatro docentes, colocaram a contagem pelos dedos em primeiro lugar.

Resultante da observação do quadro anterior, podemos dizer que praticamente um quarto dos professores entrevistados posicionou o cálculo mental antes dos algoritmos face a cerca de outro quarto que optou pelo contrário.

Ainda de referir, que nas respostas dadas, três das ordenações mais votadas (reunindo 20 votos) têm os exercícios de preenchimento de lacunas referidos em último lugar e a contagem pelos dedos em segunda posição, e na sua maioria, a subtração como sendo o inverso da adição aparece em penúltimo lugar, já depois de os algoritmos terem sido referidos.

Relativamente à Questão 6.7. (Qual a intenção com que coloca problemas simples de multiplicar e dividir?) cuja resposta era do tipo da resposta da questão anterior (os professores tinham que ordenar os modos pelos quais iam introduzindo as operações de multiplicar e dividir), constatou-se que sete dos professores não mantiveram a sua resposta, optando 43 por não a alterar. Destes sete, quatro professores decidiram trocar o cálculo mental, que tinham referido primeiramente, pelos algoritmos ou pela divisão como sendo o inverso da multiplicação, passando a referi-las antes do cálculo mental, e dois deles optaram por passar a referir o cálculo mental em primeiro lugar.

Segue-se o quadro nº.32, referente à questão 6.8. da entrevista.

Apenas dois professores optaram pela realização de exercícios de mecanização, tendo um deles justificado a importância do treino, pelo que, o quadro que abaixo se apresenta diz respeito aos 48 professores que escolheram a resolução de problemas.

QUADRO 32. QUESTÃO 6.8.

Na Matemática, atribui maior importância à realização de exercícios de mecanização ou à resolução de problemas? Acrescente o que considerar pertinente na sua explicação.

CATEGORIAS (TEMÁTICAS DOS MOTIVOS DA ESCOLHA PELA “RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”)	SUBCATEGORIAS (HABILIDADES QUE PERMITE DESENVOLVER)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
RACIOCINAR	Desenvolver o Raciocínio	24	48%
	Encontrar Estratégias com mais do que 1 passo	18	36%
	Desenvolver o Cálculo Mental e Operatório	11	22%
	Verbalizar o Raciocínio	4	8%
	Desenvolver a Análise Crítica	3	6%
ATRIBUIR SIGNIFICADOS	Mobilizar conceitos	16	32%
	Compreender os Enunciados dos Problemas	11	22%
	Atribuir Significados e Contextualizar	9	18%
REPRESENTAR	Estratégias de Representação	1	2%
	Abstracção	1	2%

Quase todos os professores apontaram “habilidades a desenvolver” relativas a mais do que uma temática, observando-se uma grande dispersão de respostas.

Três dos professores inquiridos não apresentaram quaisquer motivos para a sua escolha.

A ilustrar a categoria do raciocínio encontrou-se a declaração de um professor que salienta como habilidades que a capacidade em raciocinar permite desenvolver: “Resolução de problemas...porque se eles conseguirem agarrar num problema, e à maneira deles desenvolverem e chegarem ao resultado certo, acabam por ser mais rápidos no cálculo mental, por perceber melhor depois os algoritmos, porque desenvolve-lhes a capacidade de trabalharem autonomamente, desenvolve a imaginação...já vi miúdos resolverem problemas de maneiras que nem eu lá chegaria...”.

No que diz respeito à temática da atribuição de significados, um dos docentes aponta como habilidades a desenvolver a mobilização de conceitos e a contextualização: “Resolução de problemas....porque trabalham mais o raciocínio, enquanto que os outros são mecanizados, também são importantes mas são mecanizados ... enquanto que os outros retratam situações que eles poderão vivenciar e poderão ser necessárias no dia-a-dia”, acrescentando ainda que “na resolução de problemas, muitas vezes aplicam os conteúdos que vêm nos exercícios mecanizados...engloba um bocadinho de tudo, consegue-se usar muita coisa num problema...”.

De facto, a preferência pela resolução de problemas foi evidente. Apesar de mostrarem preocupação em não descurar também a prática e a realização de exercícios de treino, pois “ainda que para resolver um problema necessitem dos outros primeiro...para conseguirem perceber a mecanização de como é que as coisas funcionam...senão não conseguem aplicá-las...ou outros...são necessários em primeiro lugar mas depois de os saberem eu dou muita importância aos problemas”, como adianta um dos docentes entrevistados.

Segue-se o quadro nº.33, referente à questão 7.1. da entrevista.

QUADRO 33. QUESTÃO 7.1.

O Programa de Matemática em vigor do ME, refere que os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam padrões geométricos. Dê dois exemplos de actividades que já tenha realizado com os seus alunos sobre esta temática, que considere relevantes.

CATEGORIAS (TEMÁTICAS DAS ACTIVIDADES)	SUBCATEGORIAS (TIPO DE EXERCÍCIOS OU MATERIAIS)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
FRISOS (N=6)	Criar um friso	16	32%
	Completar um friso	12	24%
	Estudar as transformações geométricas presentes nos frisos	6	12%
SEQUÊNCIAS GEOMÉTRICAS (N=11)	Continuar uma sequência	31	62%
	Identificar o padrão gerador	10	20%
	Preencher lacunas	1	2%
MATERIAIS	Da vida real....onde se reconheçam padrões	4	8%
	Tangram	4	8%
	Colares de contas	4	8%
	Blocos lógicos	3	6%

	Geoplano	3	6%
OUTROS	Descrição de sólidos	5	10%

A maior parte dos professores indicou pelo menos um motivo e apenas um não respondeu a esta questão.

Seis das actividades referidas relacionaram-se exclusivamente com frisos, enquanto 11 disseram respeito em exclusivo a sequências geométricas.

Cinco dos professores inquiridos referiram a descrição de sólidos através das suas propriedades como um exemplo de actividade com padrões geométricos, apesar de este tipo de actividade não parecer muito enquadrada na questão em causa.

As actividades mais apontadas foram a continuação dos termos seguintes de uma sequência geométrica seguida da criação de frisos e de completar frisos.

Quanto aos frisos, na voz de um professor “...risos....são apresentados logo desde o início...só são formalizados e depois observados....se é translação...mais tarde no 4ºano.”.

As actividades de continuação de sequências geométricas, referidas por alguns docentes, implicavam por vezes mais do que uma variável, como explanou um deles: “... a cor também varia, além da forma, tem que ver com o ano em que eles estão...quando eles são mais pequeninos o que varia é só a cor...a forma é a mesma”.

A identificação do padrão gerador da sequência foi referida um considerável número de vezes. Um dos professores explicou que “com os colares de contas...eu dou três vermelhas e duas amarelas e eles têm que fazer a continuação...outro exemplo...recortar figuras geométricas e eles têm que construir o próprio padrão...são eles que criam” e para outro docente o importante era “... aparecerem fios de contas e eles terem de descobrir qual é que é o padrão e não é para continuar, é para completar os que faltam”.

No que diz respeito a materiais pertencentes a contextos reais a partir dos quais se podem trabalhar com os alunos padrões geométricos, um dos docentes exemplificou com “... tirar fotografias em casa...encontrar no mundo real estes padrões e estas sequências...”.

Segue-se o quadro nº.34, referente à questão 7.2. da entrevista.

QUADRO 34. QUESTÃO 7.2.

Perante o clássico problema “5 amigos vão cumprimentar-se entre si com um aperto de mão. Quantos apertos de mão serão dados no final?”, como proporia aos seus alunos que fosse explorado?

CATEGORIAS (ETAPAS DA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
CONCRETIZAÇÃO (COM OS PRÓPRIOS ALUNOS)	33	66%
FORMAS DE REPRESENTAÇÃO (TABELAS, DESENHOS, CORRESPONDÊNCIAS OU ALGORITMOS)	41	82%
DISCUSSÃO DE ESTRATÉGIAS OU RESULTADOS	47	94%
GENERALIZAÇÃO	6	12%

A ordenação das categorias apresentadas justifica-se com as fases de resolução de uma situação problemática.

Apenas dois professores não explicaram como orientariam uma actividade exploratória em sala de aula.

Com excepção da última etapa, a generalização, as três primeiras foram referidas por um grande número de docentes, sobressaindo a discussão de estratégias ou resultados.

Quanto à primeira etapa, a da concretização, na opinião de um dos professores, que já tinha realizado este tipo de actividade, “Começámos com três meninos e eles tinham que se cumprimentar uma vez entre si....e se agora metêssemos outro amigo no cumprimento, quantos apertos de mão é que dariam?...e fomos juntando até aos seis amigos...eles perceberam que mais um amigo que juntassem, os apertos de mãos aumentariam sempre na mesma proporção...e depois fizemos uma tabela para o problema....construída por eles, de dupla entrada...mas já tinha havido um trabalho prévio”.

Segue-se a fase da representação do problema proposto, que, na maior parte das opiniões deve ser registada nos cadernos dos alunos. Segundo um dos docentes “A representação escrita tem que ser sempre feita (fins do 1ºano)” e que quanto ao modo como deve ser feita, “A representação (deve ser feita) como eles entenderem...”.

Com grande relevo foi referida a discussão de estratégias. Um dos professores esclarece que “Vimos as diferentes representações que fizeram, vimos 3, 4 representações diferentes e os alunos/grupos vão explicar aos colegas como é que pensaram”.

Embora apenas quatro professores tenham enfatizado a Generalização, o desenvolvimento desta capacidade é importante no desenvolvimento do pensamento

algébrico, como já se constatou ao longo deste trabalho. Um destes docentes explica que “À medida que iríamos avançando na numeração e no conhecimento e até no Programa, poderia voltar a fazer o mesmo problema com mais alunos, com mais dados...muitos problemas tem extensão logo no próprio problema, mais tarde.....(...) e o pensamento é logo diferente e têm que dar ali uma volta...normalmente partindo do resultado do primeiro”. Um outro referiu que “Quando fizemos o problema com as molas da roupa e os panos..eles disseram logo: Oh professora, e se fossem 1000 panos, eram 1001 molas?” o que revelou capacidade em generalizar por parte dos alunos, quando estimulados.

Em suma, um dos professores entrevistados resume bem todas as categorias constituintes do quadro acima: “depois de concretizar...com as crianças...eu até podia pôr mãos com os nomes, no quadro, e eles iam assinalando em como já deram esse aperto...porque eu acho que a imagem tem muita importância na Matemática...não é só o número...havia uma discussão oral e não só...a partir daí podia aproveitar esse trabalho para outras situações...se uma mão tem cinco dedos e a outra mão tem cinco dedos, também podia aproveitar (para dar dois apertos...um com cada mão)...e depois....vamos sair da sala e cumprimentar a outra turma (generalizar).....cria motivação...”.

Segue-se o quadro nº.35, referente à questão 8.1. da entrevista.

QUADRO 35. QUESTÃO 8.1.

Qual o nome, autores e editora do manual escolar que está a utilizar?

CATEGORIAS (ANO DE ESCOLARIDADE)	SUBCATEGORIAS (NOME DO MANUAL)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
1ºANO	A Grande Aventura	6	12%
	A Pasta Mágica	2	4%
	Tagarelas	1	2%
	Uma Aventura	1	2%
2ºANO	A Grande Aventura	9	18%
	A Carochinha	1	2%
	Outros (Desafios, Alfa, Tagarelas, O Quadrado Mágico)	4	8%
3ºANO	A Pasta Mágica	3	6%
	A Grande Aventura	2	4%
	Outros(O Segredo dos Números, Tagarelas, O Mundo da Carochinha)	3	6%
4ºANO	A Grande Aventura	4	8%
	A Pasta Mágica	2	4%
	Outros(Alfa, Tagarelas)	2	4%

O Manual «A Grande Aventura» cuja editora se denomina Texto Editora, revelou-se o manual escolar de Matemática mais utilizado presentemente pelos professores entrevistados, pois 25 dos 50 professores estão a usar este manual no presente ano lectivo (independentemente do ano de escolaridade). Por esta razão, será este o manual analisado na secção 8.2., mais adiante.

Segue-se o quadro nº.36, referente à questão 8.2. da entrevista.

QUADRO 36. QUESTÃO 8.2.

Com que frequência recorre ao Manual? Raramente, Com frequência moderada ou Muito frequentemente...

CATEGORIAS (FREQUÊNCIA DE UTILIZAÇÃO DO MANUAL)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
RARAMENTE	2	4%
COM FREQUÊNCIA MODERADA	9	18%
MUITO FREQUENTEMENTE	29	58%

Dez dos professores inquiridos não utilizam neste momento manual, porque não existe um manual adoptado pela sua Escola (são professores que pertencem ao Movimento da Escola Moderna, ou porque neste momento estão como professores de apoio, não são titulares de turma, ou porque este ano lectivo ainda não foram colocados ou então porque este ano não têm turma atribuída uma vez que se encontram no exercício de funções directivas.

Mais de metade da amostra de docentes inquiridos diz usar muito frequentemente o seu manual.

Segue-se o quadro nº.37, referente à questão 8.3. da entrevista.

QUADRO 37. QUESTÃO 8.3.

Identifique nele dois atributos.

CATEGORIAS (TEMÁTICAS DOS ATRIBUTOS)	SUBCATEGORIAS (ATRIBUTOS DOS MANUAIS)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
	Tem Diferentes Exercícios/Problemas	12	24%
	Estimula o Raciocínio	13	26%
	Apresenta Exemplos em Contexto	7	4%

CIENTÍFICO-DIDÁCTICO	Está de acordo com o Programa	4	8%
	Diversidade de Estratégias	3	6%
	Apresenta 1º Exemplos e depois os Conceitos	3	6%
	Linguagem mais Formal	2	4%
	Outros (prepara para os exames, tem actividades lúdicas, episódios da história da Matemática, promove discussão entre aluno ou promove o cálculo mental	5	10%
TEXTO E ILUSTRAÇÕES	Visual apelativo	15	30%
	Personagens que atravessam os manuais ao longo dos vários anos de escolaridade do 1º ciclo	4	8%
CONSTRUÇÃO DO QUOTIDIANO	Promove a autonomia do aluno	2	4%
	Exemplos retirados do quotidiano	1	2%
ASPECTOS EDITORIAIS	É organizado	4	8%
	Não é denso	2	4%
	Existência de um caderno de Apoio	2	4%

As categorias definidas neste quadro e no quadro seguinte são fundamentadas pelo trabalho desenvolvido por (Ponte, Oliveira, Pires, Nunes, & Janeiro, 2007) durante a elaboração de um manual de procedimentos para análise e avaliação de manuais escolares.

Observou-se uma grande variedade de respostas.

Dos 40 professores que estão a utilizar manual, todos enumeraram alguns atributos, sendo os mais referidos: o visual apelativo, o estímulo ao raciocínio e a diversidade de exercício ou problemas.

Segue-se o quadro nº.38, referente à questão 8.4. da entrevista.

QUADRO 38. QUESTÃO 8.4.

Identifique nele dois defeitos.

CATEGORIAS (TEMÁTICAS DOS DEFEITOS)	SUBCATEGORIAS (DEFEITOS DOS MANUAIS)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
CIENTÍFICO-DIDÁCTICO	Não promove a autonomia do aluno	6	12%
	Muitos exercícios repetidos	6	12%
	Grau de dificuldade não gradual	5	10%
	Exercícios demasiado difíceis	5	10%
	Má distribuição dos exercícios por temas	3	6%
	Exercícios demasiado simples	3	6%
	Poucos exercícios de treino e problemas	3	6%
	Falhas na apresentação dos conceitos	2	4%

	Outros (exige muita abstracção, poucas actividades de manuseamento, falha nas propriedades das operações, má articulação entre temas ou muitas estratégias em simultâneo)	6	12%
TEXTO E ILUSTRAÇÕES	Enunciados de difícil compreensão	8	16%
	Visual pouco atractivo	3	6%
CONSTRUÇÃO DO QUOTIDIANO	Não promove o trabalho com os pais	1	2%
	Descontextualização dos exercícios	1	2%
ASPECTOS EDITORIAIS	Muito denso	4	8%
	Não poderem escrever no manual	6	12%
	Muito material acessório	3	6%
	Muito grande	1	2%

As respostas foram bastante diversas.

Dos 40 professores com manual, todos enumeraram alguns defeitos, tendo sido mencionado em maior número os enunciados de problemas de difícil compreensão. Seguiu-se a referência a defeitos como: não promover a autonomia do aluno, ter muitos exercícios repetidos e não se poder escrever no manual.

Apesar de se terem solicitado dois atributos e dois defeitos a cada professor, foram identificados mais atributos do que defeitos, de uma forma geral.

Segue-se o quadro nº.39, referente à questão 8.5. da entrevista.

QUADRO 39. QUESTÃO 8.5.
Os conteúdos encontram-se em progressão?

CATEGORIAS (OPÇÃO)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
SIM	36	72%
NÃO	4	8%

Dos 40 que utilizam manual, apenas quatro não consideram que os conteúdos se encontrem em progressão.

Segue-se o quadro nº.40, referente à questão 8.6. da entrevista.

QUADRO 40. QUESTÃO 8.6.

Considera que o manual que utiliza introduz o Pensamento Algébrico nos alunos?

CATEGORIAS (OPÇÃO)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
SIM, DE MODO INFORMAL	27	54%
SIM, DE MODO FORMAL	13	26%
NÃO	3	6%

Três dos professores que utilizam manual, consideram que este introduz o pensamento algébrico nos alunos, por vezes de modo formal e outras, de modo informal, tendo seleccionado as duas opções.

Mais de 25% dos professores inquiridos consideraram que o seu manual introduz o pensamento algébrico nos alunos de modo informal.

Não são significativos em número, os docentes que consideram o manual não introduzir o pensamento algébrico nos seus alunos.

Segue-se o quadro nº.41, referente à questão 8.7. da entrevista.

QUADRO 41. QUESTÃO 8.7.

Além do manual identifique outros recursos didáticos/tecnológicos a que costume recorrer para o ensino da Álgebra/Pensamento Algébrico.

CATEGORIAS (TIPO DE RECURSO)	SUBCATEGORIAS (ESPECIFICAÇÃO DO RECURSO)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
SUPORTE DE PAPEL	Outros Livros ou Manuais	42	84%
	Fichas construídas pelo Professor	22	44%
	Programa do ME	4	8%
	Actividades recolhidas do PFCM	3	6%
	Fichas da DGIDC	2	4%
	Retirado do quotidiano, por exemplo, talão de supermercado	1	2%
MATERIAIS MANIPULÁVEIS	Materiais Didácticos (Geoplano, tangram, cuisinaire, puzzles,.....)	49	98%
	Materiais construídos pelos alunos	6	12%
	Site ou Software específico	23	46%

SUPOORTE TECNOLÓGICO	Internet (geral)	16	32%

Os recursos mais utilizados referem-se a outros livros ou outros manuais, seguindo-se fichas construídas pelo próprio professor e a visita a sites ou utilização de software específico, como é o caso da escola virtual.

No que diz respeito a outros livros ou manuais, 29 dos professores referem-se a outros manuais escolares enquanto 13 se referem à utilização de outros livros que não sejam manuais.

Das 49 respostas que assinalaram materiais didácticos, 7 referiram-se a jogos, não a material estruturado.

Dos professores que referiram recorrer a actividades recolhidas do PFCM, um explicou que “...às vezes vou à formação que fiz...às vezes já não me lembro e vamos ao nosso dossier...e às coisas que temos...” e outro foi até mais explícito ao afirmar que “...formação de matemática...tenho dois dossiers...muitas vezes vou lá buscar...muitas situações problemáticas...a forma como é que se trabalha com elas...o *cuisinaire*, aprendi lá a fazer com eles...a formadora é que nos dava...os dois portefólios que eu tenho, vou lá...e tiro de lá problemas também...”.

Segue-se o quadro nº.42, referente à questão 9. da entrevista.

QUADRO 42. QUESTÃO 9.

Identifique três parâmetros em que sinta desfasamento entre a sua formação académica e a sua prática docente na área da Matemática.

CATEGORIAS (TIPO DO DESFASAMENTO)	SUBCATEGORIAS (ESPECIFICAÇÃO DO DESFASAMENTO)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
CIENTÍFICO (N=1)	Conhecimentos científicos	11	22%
DIDÁCTICO (N=17)	Metodologias de Ensino-Aprendizagem	33	66%
	Unidades curriculares sem aplicação na prática	8	16%
	Leccionar segundo o Novo Programa do ME	4	8%
	Descontextualização dos temas abordados	2	4%

PEDAGÓGICO	Relação com os alunos	4	8%
FUNCIONAMENTO DA ESCOLA	Ensinar alunos com Necessidades Educativas Especiais	6	12%
	Burocracias do funcionamento da escola	3	6%
	Organização/Planificação das aulas	2	4%

Dos 50 professores, seis afirmaram não sentir qualquer tipo de desfasamento entre a sua formação académica e a sua prática docente, na área da Matemática.

Dezassete professores indicaram parâmetros de desfasamento exclusivamente Didáticos, sendo a formação a nível metodológico referida com especial destaque, por 33 docentes.

Por contraste, apenas um professor se referiu a causas somente de carácter científico.

Cada um dos professores identificou entre um a três *déficits* na sua formação académica., variando a categoria a que pertenciam.

Segue-se o quadro nº.43, referente à questão 10 da entrevista.

QUADRO 43. QUESTÃO 10.

Nas (últimas) Provas de Aferição de Matemática do 4ºano, na sua Escola, quais os domínios em que os alunos revelaram menor qualidade de desempenho? Números e Operações, Geometria e Medida, Organização e Tratamento de Dados ou Álgebra e Funções.

CATEGORIAS (OPÇÃO)	VALOR ABSOLUTO	VALOR RELATIVO
NÚMEROS E OPERAÇÕES	20	40%
GEOMETRIA E MEDIDA	13	26%
ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS	4	8%

Quando inquiridos sobre as últimas Provas de Aferição de Matemática do 4ºano, na sua Escola, acerca dos temas em que os alunos revelaram menor qualidade de desempenho, se em Números e Operações, Geometria e Medida ou Organização e Tratamento de Dados, cerca de 75% dos professores responderam à questão colocada. O tema Números e Operações reuniu a maior percentagem de votos, tendo sido indicado por 40% dos professores.

No relatório nacional publicado pelo Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2012), encontra-se informação relativa aos resultados das Provas de Aferição de Matemática

do 4º ano. A figura seguinte distribui a classificação por níveis, relativamente ao ano lectivo 2011/2012.

FIGURA 15. CLASSIFICAÇÃO FINAL POR NÍVEIS, A NÍVEL NACIONAL, NO ANO LECTIVO 2011/2012

Nível	N.º de alunos	Percentagem
A	3656	3,4
B	23204	21,4
C	33799	31,2
D	42986	39,6
E	4819	4,4
Total	108464	100,0
Média		53,4
Desvio padrão		20,6

Fonte: GAVE – Provas de Aferição (2012)

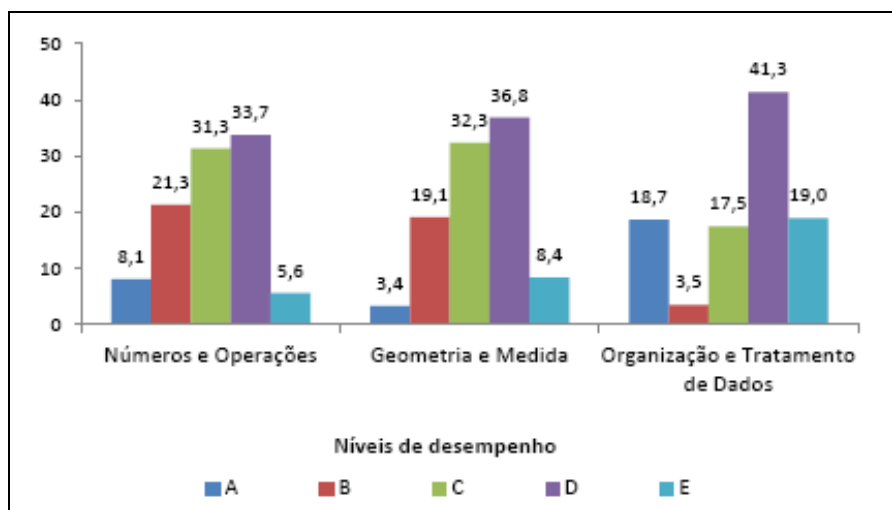
A nível nacional, 39,6% dos alunos obteve classificação negativa, correspondente ao nível D, seguida de 31,2% de alunos com nível C, já considerado nota positiva.

De acordo com o referido relatório, de modo geral, os resultados obtidos pelos alunos revelam um bom conhecimento de conceitos e procedimentos já avaliados em anos anteriores, embora tal não aconteça com aqueles que reflectem algumas das alterações presentes no programa em vigor. Os alunos evidenciam ainda uma razoável capacidade de raciocínio matemático, mas continuam a mostrar algumas dificuldades na comunicação escrita das suas ideias e raciocínios, e na resolução de problemas.

Foi possível obter informação relativa aos níveis nacionais alcançados em 2011 num documento sobre Análise Comparativa das provas de aferição do 4º ano, concedido por uma das escolas envolvidas nesta investigação. O nível médio obtido na prova de aferição de matemática foi C. Os níveis médios de desempenho por tema, foram respectivamente: C nos temas Números e Operações (57,2%) e Geometria e Medida (69,1%) e A no tema Organização e Tratamento de Dados (94%). Os dados obtidos nas entrevistas reflectem consistência com estes, uma vez que o tema apontado por 40% dos docentes como sendo aquele em que os alunos revelaram menor capacidade de desempenho foi o de Números e Operações, tal como já havia sido referido.

A figura seguinte contém informação especificada por temas e níveis, nestas provas.

FIGURA 16. RESULTADOS DA PROVA DE AFERIÇÃO DE MATEMÁTICA DO 1º CICLO, 2011/2012, POR TEMAS E NÍVEIS (%), A NÍVEL NACIONAL



Fonte: GAVE – Provas de Aferição 2012

O relatório do GAVE (2012) contém informação sobre os itens em que se verificou um melhor desempenho por parte dos alunos: os que envolviam conceitos do tema Geometria e Medida e resolução de problemas no tema Números e Operações. Os itens em que o desempenho dos alunos foi menos satisfatório disseram respeito à comunicação matemática e à resolução de problemas, inseridas no tema Geometria e Medida, e ao raciocínio matemático relativo aos temas Números e Operações e Organização e Tratamento de Dados. O tema em que se registou uma maior percentagem de níveis A, B e C foi o de Números e Operações (62%), seguindo-se o tema Geometria e Medida (55%), e, por último, o de Organização e Tratamento de Dados (41%).

Segundo este Gabinete ministerial, é relevante que os professores proporcionem aos seus alunos frequentes experiências matemáticas que envolvam a resolução de problemas, a partilha e a discussão de diferentes estratégias de resolução, a análise do seu significado e a elaboração de registos escritos relatando o trabalho realizado.

Sintetizou-se em seguida a análise de conteúdo das entrevistas tecida até ao momento.

Quando se questionaram os professores sobre qual a sua concepção de Álgebra, a maioria relacionou o tema somente com números, outros com números e operações e outros ainda com números e relações.

Quanto às actividades que permitem desenvolver o Pensamento Algébrico dos seus alunos, os professores deram exemplos relacionados com formas de representação e

raciocínio e com actividades que dizem respeito ao desenvolvimento do sentido do número. A capacidade de raciocinar foi valorizada por 74% dos professores seguindo-se a verbalização do raciocínio, com 48%. Actividades que envolvam generalização foram citadas por 11 professores.

Cerca de 1/3 dos professores consideraram poder-se iniciar o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir dos 3/4 anos. Quase 40% dos professores consideraram adequado o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos durante o ensino Pré-Escolar. O desenvolvimento do sentido do número foi apontado com bastante frequência como um dos modos de iniciar o desenvolvimento do pensamento algébrico, para ambas as faixas etárias.

Quanto a diferentes actividades nas quais trabalhem o significado do sinal de igual, de todos os professores, a quase totalidade deu respostas que se incluíam nas categorias de Relação e de Resultado, cinco referiram actividades que apenas abordavam o conceito de relação do sinal de igual e outras cinco actividades que tratavam o sinal de igual como um símbolo computacional.

Como um exemplo para trabalhar sequências numéricas com os seus alunos, a resposta mais frequente, perto de 60% dos professores, relacionava-se com a continuação da sequência, escrevendo os termos seguintes. Na categoria de actividades relativas ao padrão numérico, o reconhecimento e verbalização do padrão foi referido por cerca de metade dos docentes. Quanto a actividades de generalização de uma sequência numérica, foram mencionadas com reduzida frequência.

Sete docentes identificaram dificuldades nos seus alunos, exclusivamente relacionadas com a temática “Números”, enquanto treze nomearam dificuldades exclusivamente relacionadas com a temática “Resolução de Problemas”. A dificuldade mais vezes referida foi a compreensão do enunciado de um problema, seguindo-se a realização de algoritmos com números grandes e a descoberta de diferentes estratégias de resolução.

Quanto ao foco do Pensamento Algébrico, trabalhar as Operações como Funções foi o que reuniu mais votos, 50%, por se considerar que desta forma é possível trabalhar diferentes estratégias de resolução e desenvolver o raciocínio.

Sobre a importância que o professor atribui à realização de exercícios de mecanização versus resolução de problemas, quase todos os professores apontaram para a resolução de problemas.

Onze das actividades de investigação sobre padrões geométricos relacionaram-se exclusivamente com sequências geométricas enquanto quatro das actividades disseram respeito exclusivamente a frisos. As actividades mais apontadas foram a continuação dos termos seguintes de uma sequência geométrica seguida da criação de frisos e de completar frisos. A identificação do padrão gerador da sequência foi referida por 20% dos docentes.

Sobre como orientariam uma actividade exploratória em sala de aula sobressai a discussão de estratégias ou resultados e apenas quatro professores enfatizaram a generalização.

Dos 50 professores, seis afirmaram não sentir qualquer tipo de desfasamento entre a sua formação académica e a sua prática docente, dezassete professores indicaram parâmetros de desfasamento exclusivamente Didácticos, sendo a deficiente formação a nível metodológica referida por 33 docentes.

Quando inquiridos sobre as últimas Provas de Aferição de Matemática do 4ºano, na sua Escola, acerca dos temas em que os alunos revelaram menor qualidade de desempenho, o temam Números e Operações foi o mais referido, por cerca de 75% dos professores inquiridos.

Sobre o conteúdo das entrevistas concedidas pelos professores que haviam frequentado o PFCM, apesar de não se registarem padrões dignos de nota, chamou a atenção algumas características dos seus discursos. Durante o trabalho empírico não se encontraram diferenciações ao nível da substância analisada, isto é, ao nível da categorização das respostas, por parte dos docentes que haviam frequentado o PFMC e dos que não haviam frequentado essa formação. Contudo, para os primeiros, observou-se uma maior facilidade de expressão, um maior domínio dos conceitos matemáticos abordados e uma linguagem mais explicativa, técnica e segura, que se considera interessante aqui referir. Observe-se atentamente o quadro nº.44 que se segue e que reúne algumas citações retiradas das entrevistas realizadas, reflectindo este assunto.

**QUADRO 44. BREVE REFERÊNCIA À EXPRESSÃO ORAL
DOS DOCENTES ENTREVISTADOS**

ASSUNTO	DOCENTES QUE FREQUENTARAM O PFCM	DOCENTES QUE NÃO FREQUENTARAM O PFCM
INÍCIO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO (QUESTÃO 4)	“...a nível do ensino pré-escolar se calhar já há muita coisa que se pode fazer...fazem muito, agrupamentos de coisas...já resolvem algumas situações problemáticas muito simples ...uma das coisas...é verbalizar ...transformar em palavras aquilo que estão a fazer... justificar porquê ...se calhar a nível do pré-escolar com situações muito básicas”	“ Desde que se nasce eu acho que o pensamento algébrico é a construção do mundo...o nosso pensamento...a nossa lógica...sei lá....do reconhecer do mundo ...quase, não é?...pode não ser propriamente com números... pode ser com mil e uma situações ...”
PADRÕES NUMÉRICOS (QUESTÃO 6.1.)	“Eles agora andam muito a trabalhar com as rectas numéricas ...a nível de colocação de números nas rectas...a posição igual....a gente muitas vezes faz isso...sempre que um número termina em 5 ele tem a mesma posição que outro número que termine em 5...está sempre entre 2 dezenas...tem uma posição igual à do outro número mas 10 à frente...para eles saberem” “(...) actividade...”o dia do mês”...por exemplo, hoje é dia 28...e toda a gente tem que arranjar várias maneiras de fazer o 28...eles arranjam expressões numéricas cujo resultado final seja 28..e às vezes, por exemplo, imaginando que um se lembrava de fazer...40-12...mas também podia ser 41-13...42-14...percebes?... faziam dali um padrão e diziam-me...sempre que juntamos mais um de um lado temos que tirar mais de outro lado...e muitas vezes fazem isso”	“Contagens de +2,+3,+4 ou de menos...”
CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE (QUESTÃO 6.1.)	“Normalmente trabalho as proporções quando começo a trabalhar as unidades de medida ...por exemplo com as unidades de medida...com o tempo...ou com o dinheiro... sempre em situações problemáticas com o tempo, por exemplo, eles começam sempre por aquela unidade que eles conhecem melhor que é a hora.....depois trabalhamos coisas que se possam fazer em uma hora, coisas que se possam fazer em mais de uma hora...se eu	“... pode ser o trabalho com fracções? ... ou não?...aqueles dominós de fracções, por exemplo...”

	em uma hora consigo fazer determinadas tarefas...o que é que eu consigo fazer em duas horas?...”	
MECANIZAÇÃO VERSUS RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS (QUESTÃO 6.8.)	“A mecanização não permite saber se eles muitas vezes dominam ou não determinado tipo de competências ...eles aprendem a fazer aquilo daquela maneira e sabem que é assim mas não sabem porquê? ”	“Mecanização é muito importante mas é só para fazer aquilo e mais nada... não desenvolve nada ”

Sobre os assuntos referidos no quadro anterior, no contexto de algumas questões abordadas ao longo das entrevistas, contrastam as explicações mais extensas, claras e objectivas, com recurso a vocabulário matemático, por parte de docentes que frequentaram o PFCM, quer tenha sido por um ou por dois anos, com as explicações mais curtas, vagas e numa linguagem menos técnica, por parte dos professores que não frequentaram essa mesma formação, de um modo geral.

Segue-se a análise dos Manuais Escolares de Matemática, um por cada ano de escolaridade, no subcapítulo seguinte.

8.2. OS MANUAIS

Os atributos mais identificados pelos 40 professores que estão a utilizar manual foram: o visual apelativo, o estímulo ao raciocínio e a diversidade de exercícios ou problemas. Alguns defeitos apontados prenderam-se com o facto de o manual não promover a autonomia do aluno, ter muitos exercícios repetidos e não se poder escrever nele. Não são significativos em número, os docentes que consideram o manual não introduzir o Pensamento Algébrico nos seus alunos.

Os recursos didácticos/tecnológicos que os professores mais referiram utilizar para o ensino da Álgebra/Pensamento Algébrico foram outros livros ou outros manuais, seguindo-se fichas construídas pelo próprio professor e sites como o caso da escola virtual.

O Manual «A Grande Aventura» revelou-se o Manual Escolar de Matemática mais utilizado presentemente pelos professores entrevistados.

A explicação do processo de construção dos quadros de análise dos manuais escolares, no que diz respeito ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico já foi referida no capítulo 7. Acrescenta-se que os quadros construídos se encontram organizados por competências a desenvolver nos alunos, especificadas pelo Programa Nacional de Matemática para o 1ºCiclo. Cada conteúdo matemático especificado no campo de determinada habilidade foi classificado através do manual numa escala de 0 a 3, definida do seguinte modo:

QUADRO 45. ESCALA DE CLASSIFICAÇÃO UTILIZADA NA ANÁLISE E AVALIAÇÃO DOS MANUAIS ESCOLARES SELECIONADOS

VALOR	DESIGNAÇÃO	SIGNIFICADO
0	Ausente	O assunto não está presente no programa
1	Inadequado	O assunto é abordado de forma desadequada, do ponto de vista didáctico ou científico
2	Adequado	Exercícios correctamente abordados do ponto de vista didáctico e científico e rara ou moderada diversidade e frequência de exercícios (até 5 exercícios).
3	Exemplar	Exercícios correctamente abordados do ponto de vista didáctico e científico e elevada diversidade e frequência de exercícios (mais de 5 exercícios).

Quanto ao que se entende por correcta abordagem didáctica e científica, significa que: o manual indica, de um modo claro e compreensível para o aluno, quais são os conhecimentos matemáticos a aprender, apresenta para cada conceito de um modo claro e compreensível, as representações mais importantes e apresenta situações em que o aluno é levado a relacionar informação apresentada em várias representações, a passar informação de uma representação matemática para outra e a interpretar essa informação (Moreira et al., 2006). Em relação a diversidade e frequência de exercícios compreende-se que o manual propõe: a realização de uma rara, moderada ou elevada, consoante o caso, diversidade de tarefas, usando, nomeadamente, língua materna, simbolismo matemático, desenhos, gráficos, tabelas ou diagramas, estabelece com frequência conexões entre diferentes temas da Matemática e no interior de cada tema e propõe a resolução de tarefas contextualizadas em situações matemáticas (Moreira et al., 2006).

Devido ao facto de as orientações do Programa de Matemática não se encontrarem especificadas por cada ano de escolaridade do 1ºCiclo, mas sim por cada dois anos, ou seja, para o 1º e 2º anos e para o 3º e 4º anos conjuntamente, a análise e avaliação dos manuais de 1º e 2º anos serão feitas de forma global e não individual, assim como para os manuais dos 3º e 4º anos.

Num item em que a classificação fôr de 2 e 3, no manual do 1º ano e no do 2º ano, respectivamente, ou vice-versa, independentemente da ordem dessas classificações, deve-se ao facto de o nível 2 se ter atribuído dada a frequência de abordagem do tema ou a diversidade dos exercícios ser moderada e não elevada. Contudo, uma vez que a avaliação deve ser entendida de modo global, ou seja, no final do 2ºano, considera-se que nessa altura a classificação é de nível 3. Verificar-se-á a mesma situação durante a análise e avaliação dos manuais de 3º e 4ºanos.

Relembra-se que algumas das competências consideradas, apesar de não constarem do Programa nacional de Matemática mas sim das Normas do NCTM, das orientações curriculares da Coreia ou do Novo México, mantiveram-se incluídas na análise, por opção, tal como no capítulo anterior. Tal facto encontra-se devidamente assinalado.

Segue-se a análise e avaliação dos manuais, iniciando-se pelos do 1º e 2º anos de escolaridade, no quadro nº.46.

QUADRO 46. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA DO 1º E 2º ANOS «A GRANDE AVENTURA», QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DOS ALUNOS

COMPETÊNCIAS	ESPECIFICAÇÃO DO PROGRAMA NACIONAL DE MATEMÁTICA PARA O 1º/2º ANOS	CLASSIFICAÇÃO DO MANUAL DO 1º ANO				JUSTIFICAÇÕES DAS CLASSIFICAÇÕES DIFERENTES DE 0 E 3, ATRIBUÍDAS AO MANUAL DO 1º ANO	CLASSIFICAÇÃO DO MANUAL DO 2º ANO				JUSTIFICAÇÕES DAS CLASSIFICAÇÕES DIFERENTES DE 0 E 3, ATRIBUÍDAS AO MANUAL DO 2º ANO	CLASSIFICAÇÃO NO FINAL DO 2º ANO
		AUSENTE (0)	INDEQUADO (1)	ADEQUADO (2)	EXEMPLAR (3)		AUSENTE (0)	INDEQUADO (1)	ADEQUADO (2)	EXEMPLAR (3)		
CLASSIFICAR	Classificar de acordo com um dado critério.				3					3		3
	Descrever objectos, fazendo classificações e justificando os critérios utilizados.				3					3		3
	Reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações				3					3		3
	Classificar dados utilizando diagramas de Venn e de Carroll				3				2		Os diagramas de Venn são moderadamente frequentes no manual do 2º ano, contudo uma vez que no final do 2º ano já foram utilizados os manuais do 1º e do 2º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.	3
ORDENAR	Ordenar de acordo com um dado critério.			2						3		3
	Ordenar comprimentos, massas, capacidades e áreas.			2		Encontram-se presentes apenas unidades de medida de comprimento, como o palmo e o passo. Refere-se a medição mas dá-se pouco ênfase à ordenação de medidas. Os dois tópicos são explorados com moderada frequência no				3		3

						manual do 1ºano, contudo uma vez que no final do 2ºano já foram utilizados os manuais do 1º e do 2º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.						
INVESTIGAR REGULARIDADES	Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números.				3					3		3
REPRESENTAR E INTERPRETAR	Utilizar diagramas de Venn e de Carroll				3					3		3
	Identificar e dar exemplos de diferentes representações para o mesmo número.				3				2		Abordado com frequência apenas moderada, uma vez que é também dada atenção à decomposição de números grandes como 200, 300 ou 400, contudo uma vez que no final do 2ºano já foram utilizados os manuais do 1º e do 2º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.	3
	Representar números na recta numérica.				3					3		3
	Representar diferentes itinerários ligando os mesmos pontos (inicial e final) e utilizando pontos de referência.				3				2		Este assunto é explorado com moderada frequência no manual do 2ºano, contudo uma vez que no final do 2ºano já foram utilizados os manuais do 1º e do 2º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.	3
	Ler e desenhar plantas simples	0								3		3
	Ler, explorar e interpretar informação (apresentada em listas, tabelas de frequências, gráficos de pontos e pictogramas) respondendo a questões e formulando novas questões.				3					3		3

	Usar os sinais +, -, x e : na representação horizontal do cálculo			2		Os símbolos de x e : ainda não se introduziram no manual do 1ºano. contudo uma vez que no final do 2ºano já foram utilizados os manuais do 1º e do 2º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.				3		3
	Identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção.	0								3		3
COMPARAR	Comparar fazendo classificações e justificando os critérios utilizados.				3					3		3
	Comparar comprimentos, massas, capacidades e áreas.			2		Apenas se comparam comprimentos pelo que a diversidade dos exercícios se considera moderada.				3		3
	Utilizar a simbologia <, > e =				3				2		Este assunto é explorado com moderada frequência no manual do 2ºano, contudo uma vez que no final do 2ºano já foram utilizados os manuais do 1º e do 2º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.	3
	Comparar e descrever sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças.				3				2		Este assunto é explorado com moderada frequência no manual do 2ºano, contudo uma vez que no final do 2ºano já foram utilizados os manuais do 1º e do 2º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.	3
COMPREENDER O CONCEITO DE SINAL DE IGUAL	Utilizar a simbologia <, > e =				3					3		3
CONHECER E APLICAR AS				2		É evidenciado nos exercícios a propriedade comutativa da	0				A propriedade comutativa da multiplicação não é abordada.	2

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES (não constam do Programa de Matemática do 1º/2ºano)						adição. A subtracção como sendo o inverso da multiplicação não é evidenciada. Assim sendo, a diversidade de exercícios considera-se moderada.					A divisão como sendo o inverso da multiplicação, não é evidenciada.	
MODELAR SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS	Resolver problemas envolvendo adições, subtracções, multiplicações e divisões.				3					3		3
	Resolver problemas envolvendo relações numéricas.				3					3		3
	Resolver problemas envolvendo dinheiro.				3					3		3
ANALISAR A VARIAÇÃO (não consta do Programa de Matemática do 1º/2ºano)		0							2		A frequência de exercícios sobre esta temática é rara mas correctamente abordada do ponto de vista didáctico e científico.	2
TER A NOÇÃO DE EQUAÇÃO (não consta do Programa de Matemática do 1º/2ºanos)					3					3		3
UTILIZAR A CALCULADORA		0					0					0

Sobre o manual do 1ºano, são alguns os itens que não constam do Programa nacional:

- a descrição de variações;
- o recurso a calculadoras;
- as propriedades das operações - embora se evidencie a propriedade comutativa da adição, a propriedade associativa da adição é utilizada em estratégias de cálculo mental;
- a resolução de equações - no entanto, de forma indirecta, estão presentes exercícios de preenchimento de lacunas em parcelas da adição/subtracção, sem utilização de simbologia, apenas o espaço em branco.

Quanto aos assuntos que reúnem mais destaque neste manual, sublinham-se os diagramas e tabelas, exercícios com diferentes representações do mesmo número e a recta numérica.

De salientar que a subtracção não é introduzida como sendo a operação inversa da adição.

Considera-se relevante mencionar, quanto à utilização da simbologia $<$, $>$ e $=$, a forma como é feita, que evolui no caminho para o aumento do grau de dificuldade e da estimulação da abstracção, pois primeiro surge a ordenação de números, de modo crescente e decrescente, segue-se o completar lacunas entre quantidades e só depois entre expressões numéricas.

Para o manual do 2ºano, quanto aos tópicos não incluídos no Programa nacional, temos os seguintes:

- recurso a calculadoras, que também não surge no manual;
- propriedades das operações - a propriedade comutativa da multiplicação não é abordada; a subtracção e a divisão como sendo o inverso da adição e da multiplicação, respectivamente, não são evidenciadas. Nos dois manuais anteriormente analisados embora a propriedade associativa da adição surja nas estratégias de cálculo mental, de modo natural, não é evidenciada como propriedade;
- descrição de variações – de referir que existem problemas propostos para ser resolvidos com ajuda de um adulto, referentes à variação de pesos, com uma balança;

- resolução de equações – estão presentes exercícios de preenchimento de lacunas em parcelas da adição/subtracção, sem utilização de simbologia, apenas o espaço em branco, tal como já havia sido referido relativamente ao 1ºano.

No manual do 2ºano surgem pela primeira vez, pois não constavam do manual do 1ºano, alguns conteúdos matemáticos: medidas de massa, capacidade e área, sua medição e ordenação, investigação de regularidades numéricas, onde já se estimula a generalização, leitura e desenho de plantas simples, identificação da metade, dobro, quarta parte, quádruplo, etc, a multiplicação, nomeadamente as tabuadas do 2 ao 6 e do 10, a divisão, como sendo a operação inversa da multiplicação e, de forma muito ténue, raras abordagens a problemas de descrição de variações.

Alguns assuntos tiveram mais destaque no manual do 1ºano, do que no do 2ºano, é o caso da representação de números na recta numérica e a utilização da simbologia $>$, $<$, $=$.

Em nenhum dos dois manuais anteriormente analisados surge a resolução de equações, com utilização de alguma simbologia para a incógnita como $?$ ou $\square$, apenas se encontram exercícios de preenchimento de lacunas, com espaços em branco.

Segue-se a análise dos manuais do 3º e 4º anos resultante da sua observação, constante do quadro nº.47.

QUADRO 47. AVALIAÇÃO DE MANUAIS DE MATEMÁTICA, DO 3º E 4º ANOS «A GRANDE AVENTURA», QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DOS ALUNOS

COMPETÊNCIAS	ESPECIFICAÇÃO DO PROGRAMA NACIONAL DE MATEMÁTICA PARA O 3º/4º ANOS	CLASSIFICAÇÃO DO MANUAL DO 3º ANO				JUSTIFICAÇÕES DAS CLASSIFICAÇÕES DIFERENTES DE 0 E 3, ATRIBUÍDAS AO MANUAL DO 3º ANO	CLASSIFICAÇÃO DO MANUAL DO 4º ANO				JUSTIFICAÇÕES DAS CLASSIFICAÇÕES DIFERENTES DE 0 E 3, ATRIBUÍDAS AO MANUAL DO 4º ANO	CLASSIFICAÇÃO NO FINAL DO 4º ANO
		AUSENTE (0)	INADEQUADO (1)	ADEQUADO (2)	EXEMPLAR (3)		AUSENTE (0)	INADEQUADO (1)	ADEQUADO (2)	EXEMPLAR (3)		
INVESTIGAR REGULARIDADES	Investigar regularidades numéricas				3					3		3
	Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos.				3					3		3
TER RACIOCÍNIO PROPORCIONAL	Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional.			2		Este assunto é explorado com moderada frequência no manual do 3º ano, contudo uma vez que no final do 4º ano já foram utilizados os manuais do 3º e do 4º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.				3		3
EFFECTUAR CALCULO MENTAL	Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades.				3					3		3
GENERALIZAR (não consta do Programa de Matemática do 3º/4º anos)				2		Surge dentro do contexto das propriedades como «par + par = par», com rara frequência.			2		Surge com frequência moderada, por exemplo a propósito de actividades com sequências numéricas, para descobrir o termo de ordem n ou para explicar o critério formação.	2
ANALISAR FUNÇÕES		0							2		Com frequência moderada, encontra-se a análise de relações: de forma	2

E RELAÇÕES (não consta do Programa de Matemática do 3º/4º anos)											subentendida nos enunciados de actividades que envolvam relações entre duas variáveis, organizadas numa tabela de dupla entrada, ou em conexões estabelecidas entre números e geometria.	
CONHECER E APLICAR AS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES	Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades.			2		Os algoritmos da adição e subtracção surgem neste momento. Não são evidenciadas as propriedades das operações além da comutatividade da adição abordada anteriormente no manual do 1º ano. A diversidade dos exercícios é fraca.				3		3
MODELAR SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS	Resolver problemas que envolvam as operações em contextos diversos.				3					3		
	Resolver problemas envolvendo números na sua representação decimal.				3					3		
	Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais.				3					3		
	Resolver problemas respeitantes a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida SI.				3					3		
	Ler e interpretar calendários e horários.				3			0				3
	Resolver problemas envolvendo situações temporais.				3					3		3

REPRESENTAR E INTERPRETAR	Ler, explorar, interpretar e descrever tabelas e gráficos, e, responder e formular questões relacionadas com a informação apresentada.				3				3		3
	Construir e interpretar gráficos de barras.				3				3		3
	Ler e utilizar mapas e plantas, e construir maquetas simples.				3			2			3
TER A NOÇÃO DE VARIÁVEL/ INCÓGNITA (não consta do Programa de Matemática do 3º/4ºanos)				2		Surge no contexto de uma proposta de jogo, no topo de uma tabela a preencher.	0				
TER A NOÇÃO DE PARENTESIS (não consta do Programa de Matemática do 3º/4ºanos)					3			2		Menos frequentemente que no manual do 3ºano contudo uma vez que no final do 4ºano já foram utilizados os manuais do 3º e do 4º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.	3
TER A NOÇÃO DE EQUAÇÃO (não consta do Programa de Matemática do 3º/4ºanos)					3				3		3
UTILIZAR GRANDEZAS E UNIDADES DE MEDIDA	Resolver problemas respeitantes a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida SI.				3				3		3
ANALISAR A VARIAÇÃO (não consta do Programa de Matemática do 3º/4ºanos)				2		Estão presentes problemas em que a análise da variação se encontra presente com frequência e diversidades moderadas, contudo uma vez que no final do 4ºano já foram				3	3

						utilizados os manuais do 3º e do 4º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.						
UTILIZAR A CALCULADORA					3				2		Menos frequentemente que no manual do 3ºano contudo uma vez que no final do 4ºano já foram utilizados os manuais do 3º e do 4º, considera-se o tema tratado com bastante relevância.	3

Sobre os assuntos não abordados no Programa português, apenas *analisar funções e relações* não se reflecte no manual observado do 3ºano. Quanto aos restantes tem-se que, apesar de não virem explicitados no Programa, vão surgindo no manual do seguinte modo:

- generalizar - não surge dentro do contexto de sequências numéricas mas sim a propósito de propriedades como «par + par = par»; sublinha-se que a generalização das propriedades das operações aritméticas, como forma de desenvolver o Pensamento Algébrico, só surge no 2ºCiclo, marcando a diferença em relação ao ciclo anterior;
- noção de variável/incógnita - surge no contexto de uma proposta de jogo, no topo de uma tabela a preencher;
- noção de parêntesis - surgem parêntesis neste manual, de forma clara, a propósito do cálculo mental, na decomposição de números e utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição;
- noção de equação - apenas como preenchimento de lacunas representadas por espaços brancos, numa relação numérica;
- analisar a variação - está presente em alguns problemas.

Registam especial destaque as propostas para o aluno inventar o enunciado de um problema, a diversidade de exercícios com calendários e horários, as maquetas, surgem pela 1ª vez, bem como, a utilização de coordenadas a duas dimensões e a leitura e interpretação de calendários e horários.

As actividades envolvendo intervalos de tempo são frequentes no manual do 2ºano mas muito pouco presentes no do 3ºano.

Neste mesmo manual já se encontram propostas de actividades que recorrem à utilização da calculadora, o que não aconteceu nos manuais dos dois anos anteriores.

Sobre os conteúdos que não fazem parte do Programa nacional para o 4ºano, observou-se que:

- generalizar - não surge em muitas situações mas encontra-se por exemplo a propósito de actividades com sequências numéricas, para descobrir o termo de ordem 100 ou para explicar o critério de formação;
- analisar funções e relações - encontra-se de forma subentendida nos enunciados de actividades que envolvam relações entre duas variáveis,

organizadas numa tabela de dupla entrada, ou em conexões estabelecidas entre números e geometria;

- noção de variável/incógnita - apesar de abordada no manual do 3ºano, agora não consta;
- noção de parêntesis - surgem, embora menos frequentemente que no manual do 3ºano;
- noção de equação - surgem lacunas em branco para preencher;
- analisar a variação - apesar de não ser explícito no Programa são bastantes os problemas em que a análise da variação se encontra presente, como a variação do dinheiro/combustível ou variação da água bebida/nº de dias.

Destacam-se, neste manual de 4ºano, não só problemas que envolvem o raciocínio proporcional, sendo mais trabalhado neste manual que no do 3ºano, como também a multiplicação e divisão com evidencia de diferentes estratégias de cálculo mental para a divisão. Passando quase despercebido, temos a leitura e utilização de mapas e plantas, e a construção de maquetas simples, ocorrendo com muito menor frequência que no manual do 3ºano.

Surgem, pela primeira vez: os frisos, as simetrias de reflexão, os ângulos e situações aleatórias, como introdução à temática das probabilidades.

Resume-se agora a análise descrita aos quatro manuais, salientando-se alguns pontos. Quanto ao manual do 1ºano: evidencia-se a propriedade comutativa da adição sendo a propriedade associativa da adição utilizada em estratégias de cálculo mental, destacam-se os diagramas, tabelas, exercícios com diferentes representações do mesmo número e actividades com a recta numérica e a subtracção não é introduzida como sendo a operação inversa da adição.

No manual do 2ºano, apesar de não incluídos no Programa nacional a descrição de variações existe em problemas propostos para ser resolvidos com ajuda de um adulto, referentes à variação de pesos, com uma balança, assim como no que diz respeito à resolução de equações, presentes em exercícios de preenchimento de lacunas em parcelas da adição/subtracção, embora sem utilização de simbologia para a incógnita como ? ou $\square$, apenas para completar o espaço em branco, tal como já havia acontecido relativamente ao manual do

1ºano. Surgem pela primeira vez alguns conteúdos matemáticos como medidas de massa, capacidade e área, investigação de regularidades numéricas com estímulo para a generalização, leitura e desenho de plantas simples, identificação da metade, dobro, quarta parte, quádruplo, etc, a multiplicação, nomeadamente as tabuadas do 2 ao 6 e do 10, e ainda a divisão, como sendo a operação inversa da multiplicação.

Sobre o manual do 3ºano, generalizar não surge dentro do contexto de sequências numéricas mas sim a propósito de propriedades como $par + par = par$, a noção de variável/surge no contexto de uma proposta de jogo, a noção de parêntesis surge de forma clara, a propósito do cálculo mental, na decomposição de números e na utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. De salientar a existência de propostas para o aluno inventar o enunciado de um problema. Neste mesmo manual já se encontram propostas de actividades com recurso à calculadora, o que não aconteceu nos manuais dos dois anos anteriores.

Quanto ao manual do 4ºano, generalizar encontra-se por exemplo a propósito de actividades com sequências numéricas, para descobrir o termo de ordem 100 ou para explicar o critério formação, bastantes são os problemas em que a análise da variação se encontra presente, como a variação do dinheiro/combustível ou variação da água bebida/nº de dias. Destacam-se problemas que envolvem o raciocínio proporcional, sendo mais trabalhado neste manual que no do 3ºano, e ainda a divisão com destaque para diferentes estratégias de cálculo mental.

Salienta-se a organização, a apresentação gradual de conteúdos e situações problemáticas que vão crescendo no seu grau de dificuldade, acompanhando o crescimento dos alunos, a diversidade de situações problemáticas e uma quantidade considerável de exercícios de cálculo.

No capítulo que se segue discutem-se resultados e formulam-se conclusões.

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

No capítulo 8 obtiveram-se os resultados das entrevistas aplicadas aos professores e à observação e avaliação de manuais. Estes resultados serão agora analisados por comparação com os principais referenciais teóricos anteriormente identificados, dando resposta às questões de investigação colocadas neste trabalho.

DO ESTUDO 1

A primeira questão pretendia averiguar que concepções têm os professores acerca do desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos seus alunos, relativamente a alguns aspectos-chave. Estes aspectos serão referidos seguidamente à medida que se for procedendo à sua análise.

Sobre o significado que os docentes atribuíram à Álgebra Inicial a maioria relacionou o tema somente com números, outros com números e operações e outros ainda com números e relações. O conceito apresentado por Kieran (2007a) é de que Álgebra é muito mais do que um conjunto de conhecimentos e técnicas, é uma maneira de pensar e envolve a criança no desenvolvimento de pelo menos seis tipos de habilidades de pensamento matemático: generalização, abstracção, pensamento analítico, dinâmica de pensamento, modelagem e organização. Quanto às actividades que permitem desenvolver o Pensamento Algébrico dos seus alunos, os professores deram exemplos relacionados com formas de representação e raciocínio e com actividades que dizem respeito ao desenvolvimento do sentido do número. A capacidade de raciocinar foi valorizada por 74% dos professores seguindo-se a verbalização do raciocínio, com 48%. Actividades que envolvam generalização foram citadas por 11 professores.

Relativamente à idade que consideram adequada introduzir pensamento algébrico nos seus alunos, cerca de 1/3 dos professores consideraram poder-se iniciar o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir dos 3/4 anos. Quase 40% dos professores consideraram adequado o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos durante o ensino Pré-Escolar. O desenvolvimento do sentido do número foi apontado com bastante frequência como um dos modos de iniciar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, para

ambas as faixas etárias. Na comunidade científica internacional espera-se que os alunos nos primeiros anos de escolaridade pensem algebricamente, pois efectivamente eles são capazes de tal (Cai & Moyer, 2008) apesar de a pesquisa sobre o Pensamento Algébrico do aluno em tenra idade ser relativamente recente (Kieran, 2006).

Quanto ao foco que cada professor identificou, do Pensamento Algébrico, trabalhar as Operações como Funções foi o que reuniu mais votos, 50%, por se considerar que desta forma é possível trabalhar diferentes estratégias de resolução e desenvolver o raciocínio.

De facto, para Carraher et al. (2006), as operações aritméticas podem ser vistas como funções e dar-lhes um maior destaque no currículo da Matemática Elementar ajuda a facilitar a integração da Álgebra no currículo em vigor, em anos de escolaridade mais avançados. A chave da sua proposta é que as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão sejam tratadas desde o início como funções.

Relembre-se que pelos autores estudados, outros dois focos foram apontados: a Estrutura da Aritmética e Actividades de Generalização. A propósito da Estrutura da Aritmética, destacou-se uma pesquisa orientada por Kieran (2007b) na qual se concluiu que o desenvolvimento do raciocínio algébrico, nos primeiros anos de escola, reforça o facto de que a Aritmética pode ser abordada de forma algébricas e que construir uma compreensão da Álgebra começa com a aprendizagem da Aritmética. Num artigo publicado pelo NCISLA (2000) os resultados da investigação mostraram que os alunos envolvidos aprenderam a formular generalizações sobre as propriedades e estrutura implícita na Aritmética.

Para Carraher et al. (2006) a abordagem à Álgebra nos primeiros anos de escola deve ser orientada pela perspectiva de que a generalização é o alicerce do raciocínio algébrico. Também Curcio (1997) partilha desta opinião, acrescentando que considera que a generalização ultrapassa o simples reconhecimento de padrões e muitas vezes envolve conceitos de multiplicação e também de proporção.

Quanto à forma de abordagem dos diferentes significados do sinal de igual, a quase totalidade dos professores deu respostas que se incluíam no significado de Relação e de Resultado do sinal de igual, cinco referiram actividades que apenas abordavam o conceito de relação deste sinal e outros cinco actividades que tratavam o sinal de igual como um símbolo processual. Ora, a utilização de frases numéricas como $78 - 49 + 49 = 78$ ajuda os alunos a desenvolverem um pensamento relacional sobre o sinal de igual, adianta Welder (2008). Segundo este autor, pode trabalhar-se o sentido de equivalência do sinal de igual através de

expressões numéricas como $8+4=7+5$, numa fase mais inicial da escolaridade ou $8=3+?$, pedindo-se aos alunos que coloquem um número no local do ponto de interrogação, que torne o texto verdadeiro e neste caso os professores devem ser incentivados a usar a frase «é o mesmo que» quando se lê o sinal de igual. Para Welder (2008), nos primeiros anos de escolaridade, os estudantes são muitas vezes ensinados a olhar para o sinal de igual como um símbolo que lhes diz para calcularem algo, ou como um símbolo que separa o problema da sua resposta, em vez de o olharem também como um símbolo relacional ou de equivalência.

Como já foi referido neste trabalho, os investigadores acreditam que as crianças, quando contam, estão realmente a explorar o primeiro padrão regular que vêm na Matemática: as dezenas têm um padrão e depois de cada 10 o que se faz é adicionar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

A respeito desta temática, sobre exemplos de actividades em que os docentes trabalhassem sequências numéricas com os seus alunos, a resposta mais frequente, perto de 60% dos professores, relacionava-se com a continuação da sequência, escrevendo os termos seguintes. O reconhecimento do padrão numérico ou a verbalização do padrão foram referidas por cerca de metade dos docentes. Na opinião de Poulos (1998), quanto ao nosso sistema de numeração, este investigador explica que ele é construído sobre um sistema de padrões previsível, e portanto que os alunos devem ser capazes não apenas de identificar os padrões que eles vêm, mas também de encontrar razões e provas de que os padrões existem. A NAEYC e o NCTM redigiram um documento, no qual explicitaram exemplos de habilidades que são adequadas desenvolver em crianças entre os três e os seis anos, na área curricular de Padrões/Pensamento Algébrico sendo um deles discutir padrões em aritmética, por exemplo, adicionando um a um número qualquer resulta no «número de contagem» seguinte.

Quanto a actividades de generalização de uma sequência numérica, foram mencionadas com reduzida frequência. De facto, Ginsburg (em entrevista), Poulos (1998) e Kieran (2007a) defendem o início do estudo de padrões a partir dos 4 e 5 anos de idade, no entanto, é remetidas para mais tarde, a generalização de padrões, por Poulos (1998) o aumento da complexidade de padrões simples, por Cox (2003) e a simbolização formal dos padrões, por Kieran (2007a). De forma clara, Steen (1998) afirma que os padrões não só envolvem os alunos em todas as áreas da Matemática como também em actividades matemáticas como: reconhecer, visualizar, verbalizar, simbolizar e analisar.

A propósito de actividades que considerassem relevantes para desenvolver nos alunos o conceito de proporção, 22 dos 50 professores não responderam a esta questão. Doze deram respostas em que relacionavam duas variáveis ou medidas, cinco referiram apenas actividades em que trabalhavam os conceitos de dobro/metade, triplo/terça-parte, etc. Parece ter ficado aquém do esperado o entendimento e consequente importância dada ao raciocínio proporcional por muitos dos docentes entrevistados. O desafio proposto por Curcio (1997) é olhar para formas de exploração que envolvam explicitamente as crianças em pensamento proporcional e segundo Murray (2010) o raciocínio algébrico é um componente essencial ao estudo dos números racionais e do raciocínio proporcional.

Quanto às dificuldades mais sentidas pelos professores, quando abordam em sala de aula actividades que impliquem passagem de Pensamento aritmético para Pensamento Algébrico, sete docentes identificaram dificuldades exclusivamente relacionadas com a temática *Números*, enquanto treze nomearam dificuldades exclusivamente relacionadas com a temática *Resolução de Problemas*. A dificuldade mais vezes referida foi a compreensão do enunciado de um problema, seguindo-se a realização de algoritmos com números grandes e a descoberta de diferentes estratégias de resolução. Kieran (2004) investigou sobre este assunto e a sua opinião é de que os alunos que operam numa estrutura aritmética de referência tendem a não ver os aspectos relacionais e as propriedades das operações, focam-se no cálculo, assim, para uma transição bem sucedida da Aritmética para a Álgebra é necessário que: o pensamento não se limite ao cálculo de uma resposta numérica mas que tenha o seu foco nas relações, exista foco nas operações, bem como nas suas inversas, os alunos dêem importância à representação e não apenas à resolução de um problema, se dê atenção aos números e letras e não apenas aos números e se reoriente o significado do sinal de igual.

Sobre a ordenação das estratégias de introdução das operações de adição e subacção, três das ordenações mais votadas, reunindo 20 votos, têm os exercícios de preenchimento de lacunas referidos em último lugar e a contagem pelos dedos em segunda posição, e na sua maioria, a subacção como sendo o inverso da adição aparece em penúltimo lugar, já depois de os algoritmos terem sido referidos.

Brocardo et al. (n.d.) explicam que ao se apresentarem aos alunos problemas que se relacionem com a vivência dos alunos, ajudam-nos a direccionar os seus conhecimentos e métodos informais para a sua resolução, atribuindo assim um significado real às operações: a

adição surgirá associada a situações de acrescentar, e a subtracção a situações de retirar ou separar.

Sobre a intenção com que o docente coloca problemas simples de multiplicar e dividir, 43 dos professores mantiveram a resposta anterior.

O cálculo mental surge quase em igualdade com os algoritmos, seguidos da subtracção como sendo o inverso da adição, com 15, 14 e 13 votos respectivamente. O desenvolvimento de estratégias de cálculo vê a sua importância atribuída por Gonçalves (2008) e também Brocardo et al. partilham desta mesma opinião ao afirmar que “O desenvolvimento do sentido do número surge muito associado à aquisição de destrezas de cálculo mental, porque essas destrezas requerem um bom conhecimento e compreensão dos números e das relações entre eles.” (n.d., p.18).

Os exercícios de preenchimento de lacunas foram os mais votados em último lugar, pelos professores. Gonçalves (2008) chama a atenção para a compreensão das propriedades das operações, assunto que pode ser trabalhado a partir do tipo de exercício que se acabou de referir.

Um dos temas explicitados pelo Programa nacional é precisamente a abordagem a padrões geométricos. Onze das actividades de investigação sobre padrões geométricos relacionaram-se exclusivamente com sequências geométricas enquanto quatro das actividades disseram respeito exclusivamente a frisos. As actividades mais apontadas foram a continuação dos termos seguintes de uma sequência geométrica, seguida da criação de frisos e de completar frisos. A identificação do padrão gerador da sequência foi referida por 20% dos docentes. Mais uma vez a NAEYC e o NCTM nomearam as habilidades que são adequadas desenvolver em crianças entre os três e os seis anos, na área curricular de Padrões/Pensamento Algébrico: avisos e cópias simples de padrões repetitivos, como uma parede de blocos de longo, curto, longo, curto, longo, curto, longo. A opinião de Borralho e Barbosa (n.d.) defendem que a interacção dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado pois irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na aprendizagem e permite pensar no estudo da Álgebra desde o pré-escolar.

Quanto a formas de exploração de situações problemáticas e sobre como orientariam uma actividade exploratória em sala de aula sobressai nos resultados empíricos, a discussão de estratégias ou resultado, se bem logo seguido de diferentes formas de representação como

tabelas, desenhos, correspondências ou algoritmos. A ideia de exploração de uma tarefa problemática pareceu estar bem perto da de Blanton (2008), segundo o qual, neste tipo de tarefas as crianças aprendem a usar ferramentas de representação como: tabelas de funções, interpretação de correspondências e relações nos dados, desenvolvem entendimento das quantidades que variam e linguagem matemática para simbolizar relações funcionais. Na opinião de Ameron (2003), a ruptura entre a Aritmética e Álgebra está muitas vezes relacionada com o tipo de abordagem praticada durante a resolução de problemas, uma vez que problemas aritméticos podem ser resolvidos directamente, através de respostas directas, enquanto problemas algébricos terão necessariamente que se traduzir para uma linguagem e representação formais, e só depois resolvidos. Esta temática da resolução de problemas, quando devidamente trabalhada tem um enorme contributo para uma frutuosa iniciação ao Pensamento Algébrico.

Sobre o conteúdo das entrevistas concedidas pelos professores que haviam frequentado o PFCM, observou-se uma maior facilidade de expressão, um maior domínio técnico dos conteúdos matemáticos e uma linguagem mais explicativa, técnica e segura. Relativamente a algumas questões abordadas ao longo das entrevistas, contrastaram explicações mais extensas, claras e objectivas, com recurso a vocabulário matemático, por parte de docentes que frequentaram o PFCM, com explicações mais curtas, vagas e numa linguagem menos técnica, por parte dos docentes que não frequentaram essa mesma formação, de um modo geral.

Os professores do 1ºCiclo entrevistados partilham da concepção que a actual comunidade científica internacional tem de Álgebra Inicial embora exista ainda uma distância considerável ao nível da identificação das habilidades implicadas no Pensamento Algébrico e das actividades que promovem este tipo de pensamento. Observou-se também que os professores implementam algumas práticas que promovem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos seus alunos, contudo umas consideram-se mais adequadas e melhor exploradas do que a outras.

Dos 40 professores que estão a utilizar manual, todos enumeraram alguns atributos, sendo os mais referidos: o visual apelativo, o estímulo ao raciocínio e a diversidade de exercício ou problemas. Também Ponte et al. (2007) avaliam o texto e ilustrações adequados

ao aluno, tendo em conta o seu nível de ensino, a contribuição do manual escolar para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar matematicamente, a apresentação de propostas de resolução de exercícios e a promoção da prática compreensiva de procedimentos.

De entre os professores acima indicados, todos enumeraram alguns defeitos, tendo sido mencionado em maior número os enunciados de problemas de difícil compreensão. Seguiu-se a referência a defeitos como: não promover a autonomia do aluno, ter muitos exercícios repetidos e não se poder escrever no manual. Mais uma vez, no seu documento de avaliativo de manuais escolares de matemática, Ponte et al. (2007) propõem a análise do discurso do manual, averiguando se é claro, coerente e linguisticamente correcto. Estes autores acrescentam ainda ser um factor relevante para avaliação, a promoção do trabalho autónomo do aluno que utiliza o manual.

DO ESTUDO 2

A segunda questão de investigação interrogava de que forma os Manuais Escolares de Matemática do 1ºCiclo, promovem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos. Foi feita a análise de uma determinada colecção de Manuais Escolares, tal como referido em secções anteriores, pelo que se apresenta em seguida uma análise muito sucinta dos principais resultados.

Sobre classificar e investigar regularidades, no manual do 2ºano surgem pela primeira vez alguns conteúdos matemáticos como medidas de massa, capacidade e área, investigação de regularidades numéricas estimulando a generalização, leitura e desenho de plantas simples, e a identificação da metade, dobro, quarta parte, quádruplo, etc, No manual do 3ºano, generalizar não surge dentro do contexto de sequências numéricas mas inserida em propriedades como $par + par = par$. No manual do 4ºano, generalizar encontra-se a propósito de actividades com sequências numéricas, para descobrir o termo de ordem 100 ou para explicar o critério formação de uma sequência numérica.

Quanto a actividades que envolvam representar, no manual do 1ºano destacam-se os diagramas, tabelas, exercícios com diferentes representações do mesmo número e actividades com a recta numérica.

Sobre a descrição de variações, no manual do 2ºano, existem problemas propostos para ser resolvidos com ajuda de um adulto, sobre variação de pesos, com uma balança.

No que diz respeito à resolução de equações, estão presentes em exercícios de preenchimento de lacunas em parcelas da adição/subtracção, embora sem utilização de simbologia para a incógnita como ? ou $\square$, apenas para completar o espaço em branco, tal como já havia acontecido relativamente ao manual do 1ºano. No manual do 4ºano, são bastantes os problemas em que a análise da variação se encontra presente, como por exemplo, a variação do dinheiro a pagar com o combustível a utilizar.

A abordagem das propriedades das operações, no manual do 1ºano evidencia-se pela propriedade comutativa da adição sendo a propriedade associativa da adição utilizada em estratégias de cálculo mental. Salienta-se o facto de a subtracção não ser introduzida como a operação inversa da adição. No manual do 2ºano, surge pela primeira vez a multiplicação, nomeadamente as tabuadas do 2 ao 6 e do 10, e ainda a divisão, como sendo a operação inversa da multiplicação. No manual do 3ºano surge a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. No manual do 4ºano evidencia-se a divisão com destaque para diferentes estratégias de cálculo mental.

Modelar e resolver situações problemáticas são uma constante em todos os manuais analisados. No manual do 3ºano salienta-se a existência de propostas para o aluno inventar o enunciado de um problema e de propostas de actividades com recurso à calculadora, o que não aconteceu nos manuais dos dois anos anteriores. No manual do 4ºano destacam-se os problemas que envolvem raciocínio proporcional, sendo mais trabalhado neste manual que no do 3ºano, e ainda a divisão com destaque para diferentes estratégias de cálculo mental.

Podem reunir-se agora algumas observações, transversais aos quatro manuais analisados até ao momento. São elas, a existência de problemas em contextos do quotidiano, uma secção de projecto - com uma proposta de trabalho - uma secção designada por zona de jogo sendo estas propostas de actividades definidas na análise e avaliação de manuais por Ponte et al. (2007). Além das anteriores tem-se também representações diversas de dados e informação e um tópico nomeado recapitulando, no final de cada capítulo, onde se resumem os assuntos mais importantes anteriormente abordados nos manuais.

As orientações curriculares assumidas como referência para a construção do quadro de avaliação de manuais, conforme já se deixou aqui explicitado, são as das Normas publicadas pelo NCTM, as da Coreia e as do Novo México, uma vez que são específicas quanto ao ensino da Álgebra no 1ºCiclo, o que não acontece com o Programa português. Dessas, apenas no caso da Coreia se encontrou publicação acerca de como os Manuais Escolares de matemática do 1ºCiclo podem promover este tipo de pensamento, através de diversos exemplos de actividades, também já mencionadas nesta dissertação. Por essa razão, a análise efectuada aos quatro manuais em observação no estudo empírico deste trabalho, será agora comparada com as metas estruturais definidas por Lew (2004) apresentadas anteriormente no quadro nº.13. Como tal, atentemos nas habilidades comuns analisadas nos quatro manuais e como estas se relacionam com essas metas:

QUADRO 48. COMPARAÇÃO ENTRE AS HABILIDADES COMUNS AOS QUATRO MANUAIS E AS METAS ESTRUTURAIS DEFINIDAS POR (Lew, 2004)

HABILIDADES COMUNS AOS QUATRO MANUAIS	TÓPICOS EM QUE INCIDEM	METAS ESTRUTURAIS A ATINGIR NO PENSAMENTO ALGÉBRICO, DEFINIDAS POR (Lew, 2004)
Investigar regularidades	Números	Generalizar
Representar e interpretar	1º/2ºano – Números	Pensamento Dinâmico
	3º/4ºano – Organização e Tratamento de Dados	Organização
Conhecer e aplicar as propriedades das operações	1º/2ºano – Propriedade comutativa da adição	Abstracção
	3º/4ºano – Propriedades utilizadas implicitamente no cálculo mental	
Modelar situações problemáticas	1º/2ºano – Operações; Relações matemáticas; Dinheiro	Modelar
	3º/4ºano – Números decimais; Relações espaciais e temporais	

Ter a noção de equação	Exercícios de preenchimento de lacunas, com espaços em branco	Pensamento analítico
Analisar a variação	Números	Pensamento dinâmico

Observa-se que todas as metas estruturais são cobertas pelos manuais de forma continuada ao longo de todo o 1ºciclo, e portanto, de certa forma as seis competências identificadas por Lew (2004) que caracterizam o Pensamento Algébrico. No entanto, reconhece-se que cada uma destas competências poderia ser melhor explorada pelos manuais. Algumas metas específicas a que os manuais poderiam ter dedicado mais atenção, propondo actividades nesse sentido:

- quanto à capacidade de generalização, podem propor-se mais problemas usando estratégias simplificadas;
- quanto à capacidade de abstracção, no que diz respeito às propriedades das operações, uma maior exploração pode ser efectuada, e relativamente à utilização de símbolos que se relacionem com conceitos e propriedades e à resolução de actividades operativas com símbolos abstractos, são raros nos manuais;
- para melhor se desenvolver pensamento analítico, um maior ênfase pode ser dado à resolução de problemas trabalhando de trás para a frente;
- o pensamento dinâmico pode ser mais estimulado através da resolução de problemas usando estratégias de tentativa e erro;
- a capacidade de modelar pode ser potenciada propondo exercícios em que o aluno invente o enunciado de um problema que se relacione com uma expressão numérica dada;
- quanto à organização, apesar de nos manuais ser uma constante a utilização de tabelas, diagramas ou figuras, poderia ainda proporem-se uma maior diversidade de problemas usando estratégias de dedução lógicas.

Tece-se agora uma síntese final das conclusões.

Quanto aos docentes do 1ºCiclo inquiridos, a sua concepção de Álgebra Inicial vai ao encontro da que a actual comunidade científica internacional tem, no entanto, existe ainda algum distanciamento ao nível da identificação das habilidades implicadas no Pensamento Algébrico. Estes professores inseridos no estudo propõem actividades aos seus alunos que

promovem o desenvolvimento deste tipo de Pensamento, porém, algumas dessas actividades consideram-se mais adequadas do que outras na promoção deste tipo de pensamento em crianças do 1ºCiclo. Os professores que haviam frequentado o PFCM, revelaram maior facilidade de expressão, maior domínio científico dos conteúdos e uma linguagem mais explicativa e técnica. Diversas vezes, ao longo das entrevistas, contrastaram explicações mais extensas, claras e objectivas, por parte de docentes que frequentaram o PFCM, com explicações mais curtas, vagas e numa linguagem menos técnica, por parte dos docentes que não frequentaram essa mesma formação.

Sobre os manuais, analisados e avaliados quanto à promoção do Pensamento Algébrico Inicial, através de um quadro construído para o efeito, tendo como primeira referência o Programa Nacional, conclui-se, para todos os níveis de escolaridade, de forma continuada ao longo de todo o 1ºciclo, estes livros promovem o desenvolvimento das seis competências identificadas por Lew (2004), investigador já com trabalho comprovado nesta área do conhecimento, sendo elas, generalizar, abstrair, ter pensamento analítico e dinâmico, modelar e organizar, contudo, reconhece-se que cada uma destas competências poderia ser melhor explorada. Mais atenção poderia ser dedicada, por parte dos manuais em estudo a um maior número de problemas usando estratégias simplificadas, para melhorar a capacidade de generalização, uma mais abrangente exploração das propriedades das operações e da utilização de símbolos abstractos, para melhor trabalhar com os alunos a capacidade em abstrair, à resolução de problemas trabalhando de trás para a frente, fomentando mais o pensamento analítico, ou usando estratégias de tentativa e erro, o que melhora a capacidade em desenvolver pensamento dinâmico e propondo exercícios em que o aluno crie o enunciado de um problema que se relacione com uma determinada expressão numérica, estimulando-se a capacidade em modelar situações problemáticas.

Depois de ponderar, identificaram-se algumas limitações a este trabalho de investigação:

- a amostra de professores teve um número limitado de participantes;
- a zona geográfica dos docentes inquiridos é limitada;
- os manuais analisados são apenas de uma colecção de manuais.

Dadas as limitações referidas, o trabalho aqui desenvolvido e os resultados de alguma pesquisa de autores inseridos numa comunidade científica que investiga sobre a temática abordada nesta dissertação, seguem-se algumas sugestões de continuação do estudo.

A primeira sugestão é a aplicação de estudos como os designados por Estudo 1 e 2, a uma maior amostra de professores, prolongável a docentes do 2º e 3º Ciclos, bem como a uma maior amostra de manuais.

A segunda, a construção de um Quadro de Análise e Avaliação de Manuais para o 2ºCiclo, no que diz respeito ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Outra sugestão é o recurso a meios tecnológicos para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Recentemente, a comunidade de ensino coreano de matemática tem sido incentivada pela potencialidade de instrução através de diferentes softwares, como: o SLogo, desenhado para explorar a matemática num mundo micro, o LiveMath, com excelentes funções simbólicas de manipulação, The Geometer's Sketchpad [GSP] e o Cabri para fácil construção e transformação dinâmica de figuras geométricas e o Excel como ferramenta para resolver vários problemas numéricos, segundo (Lew, 2004). Este investigador explica que o computador tem a vantagem de fornecer métodos concretos para representar a matemática abstracta e formal e a sua manipulação está sob o controle dos próprios alunos. Se for usado o software apropriado, os estudantes podem reflectir sobre as suas próprias actividades matemáticas e cognitivas e reforçar a comunicação matemática com os professores, representando as suas actividades concretas e operacionais através de linguagem matemática. De facto parecem surgir novos caminhos para promover o Pensamento Algébrico. Para Lew (2004), num futuro próximo, a utilização de tecnologia informática deve ser discutida e pensada para promover o Pensamento Algébrico no ensino da Matemática Elementar.

Por último, sugere-se investigação acerca de como é que as funções podem ser introduzidas em contextos aritméticos, opinião de Carraher et al. (2006). Para estes autores, ainda há muito a fazer quanto à acessibilidade e ao significado de conceitos algébricos com crianças pequenas. É vital compreender que sentido é que os alunos dão às suas questões, quais são as suas dúvidas, que tipo de conflitos e de interpretações múltiplas é que elas geram, como é que os seus desenhos icónicos iniciais eventualmente se envolvem em diagramas esquemáticos e notação e que tipo de entendimentos intermédios é que as crianças elaboram.

Espera-se ter contribuído para a melhoria da Formação de Professores bem como para a concepção e análise de Manuais Escolares de Matemática no que diz respeito ao Ensino e

Aprendizagem da Álgebra, em anos iniciais da escolaridade, designadamente no 1ºCiclo do Ensino Básico.

BIBLIOGRAFIA

Almeida, S. (2008). Formação Inicial de Educadores de Infância: competências e práticas matemáticas sobre padrões. Dissertação apresentada à Universidade de Lisboa para obtenção do grau de mestre orientada por Darlinda Moreira, Lisboa.

Ameron, A. (2003). Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic To Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, pp. 63-75.

Antunes, S., & Menino, H. (2005). As experiências de Terreno na Formação Inicial de Professores. *Educação e Comunicação*, 8, pp. 93-108.

Associação de Professores de Matemática [APM]. (1998). *Matemática 2001 - Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM

Arcavi, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, pp. 146-162.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Baroody, A. (2002). Incentivar a Aprendizagem Matemática das Crianças. In B. Spodek, *Manual de Investigação em Educação de Infância* (pp. 333-390). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice*. Heinmann: Victoria Merecki.

Blanton, M., & Kaput, J. (2003, Outubro). Developing Elementary Teachers - Algebra Eyes and Ears. *Teaching Children Mathematics*, pp. 70-77.

Borrvalho, A., & Barbosa, E. (n.d.). *Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões*. in www.apm.pt/. Acedido em 20 de Março de 2012 em http://www.apm.pt/files/_Cd_Borrvalho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf

Branco, N., & Ponte, J. (2011). A Álgebra na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos: Uma Experiência de Formação. *Indagatio Didactica*, 3(1), pp. 59-79.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Castro, I., Serrazina, L., & Rodrigues, M. (n.d.). Desenvolvendo o sentido do número In www.es.e.ips.pt. Acedido em 15 de Março de 2012 em <http://arquivo.es.e.ips.pt/es/e/projectos/sentidonumero/desenvolvendo.pdf>

Cai, J., & Moyer, J. (no prelo). *Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Some Insights from International Comparative Studies*. Reston: NCTM.

Campbell, R., & Bickhard, M. (1986). *Knowing Levels and Development Stages. Contributions to Human Development*. N.Y.: J.A. Meacham.

Canário, R. (1993). Ensino Superior e Formação Contínua de Professores. *Revista Aprender*, 15, pp. 11-18.

Canavarro, A. (2007). O Pensamento Algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, XVI(2), pp. 81-118.

Cardoso, M. (2010). O conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação continua? Dissertação apresentada ao Instituto de estudos da Criança da Universidade do Minho para obtenção do grau de doutor, orientada por Pedro Palhares e Isabel Vale, Minho.

Carraher, D., & Schliemann, A. Early algebra and algebraic reasoning. In K. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Carraher, D., Earnest, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2) pp. 87-115.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester, *Second Hanbook of research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-705). N.C: Information Age Publishing.

Castro, J., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de Número e Organização de Dados: Textos de Apoio para Educadores de Infância*. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular [DGIDC].

Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS] (2001). *The Mathematical Education of Teachers*. Providence, RI and Washington, DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

Clements, D. (2001). Mathematics in Pre-School. *Teaching Children Mathematics*, pp. 270-275.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math*. New York and London: Routledge.

Clements, D., Sarama, J., & Bibiase, A. (2002). Pre-School and Kindergarten Mathematics: A National Conference. *Teaching Children Mathematics*, pp. 510-514.

Cox, J. (2003, Janeiro). Algebra in the Early Years. *Young Children*, pp. 14-21.

Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas [CRUP] (2000). Por uma Formação Inicial de Professores de Qualidade In www.educ.fc.ul.pt/. Acedido em 4 de Outubro de 2011 em [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-etc\(CRUP\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-etc(CRUP).doc)

CRUP (2001). A Formação de Professores no Portugal de Hoje In *www.educ.fc.ul.pt/*. Acedido em 12 de Novembro de 2011 em *http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/97-Alarcao-Ponte(CRUP).rtf*

Curcio, F. (1997). What does Algebraic Thinking look like and sound like with Preprimary Children? *Teaching Children Mathematics*, pp. 296-300.

Czegledy, I., & Kovaes, A. (2008, Novembro). How to choose a textbook on Mathematics? *Acta Didactica Napocensia*, 1(2), pp.16-30.

Dâmaso, A. (2010). *Materiais de Apoio o Novo Programa de Matemática. Álgebra: sequências e regularidades*. Açores: Direcção Regional da Educação e Formação dos Açores.

Devlin, K. (1994). *Matemática. A Ciência dos Padrões*. Porto: Porto Editora.

Direcção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência [DGEEC], Direcção de Serviços de Estatísticas da Educação [DSEE], & Divisão de Estatísticas do Ensino Básico e Secundário [DEEBS]. (2012). *Perfil do Docente 2010/2011*. Lisboa: DGEEC.

Drouhard, J., Panizza, M., Puig, L., & Radford, L. (2005). *Algebraic Thinking*. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, (pp. 629-721). Spain.

Duarte, C. (2009). *Análise das Necessidades de Formação Contínua de Professores dos Cursos de Educação e Formação*. Dissertação apresentada à Universidade de Lisboa para obetnção do grau de mestre, orientada por Maria Manuela Esteves, Lisboa.

Fernandes, D., Queirós, M., Valente, C., & Ferreira, A. (2002). *Cadernos da Formação de Professores, 3. Perspectivas de ex-alunos e de professores cooperantes da ESE do Porto*. In L. Serrazina (Org.), *A Formação para o Ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1º Ciclo do Ensino Básico* (pp. 51-63). Porto: Porto Editora.

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G., & Phillips, E. (2000, Fevereiro). Experiences with Patterning. *Teaching Children Mathematics*, pp. 112-119.

Feynman, R. (1989). *O que é uma Lei Física?* Lisboa: Gradiva.

Flavell, J. (1985). *Cognitive Development*. New Jersey: Prentice-Hall.

Fox, J. (2007). *International Perspectives on Early Years Mathematics*. Proceedings 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2 (pp. 865-869). Tasmania, Australia: Watson, Jane and Beswick, Kim (Eds).

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2012). *Provas de Aferição 1.º Ciclo - Matemática. Relatório 2012.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Gérard, F., & Roegiers, X. (1998). *Conceber e Avaliar Manuais Escolares*. Porto: Porto Editora.

Ginsburg, H. (2002). Little Children, Big Mathematics: Learning and Teaching in the Pre-School. *PME26* (pp. 1-16). Washington: U.S. Department of Education.

Ginsburg, H., Greens, C., & Robert, B. (2004). Big Math for Little Kids. *Early Childhood Research Quarterly*, 19, pp. 159-166.

Gonçalves, A. (2008). Desenvolvimento do sentido de número num contexto de resolução de problemas em alunos do 1ºCiclo do Ensino Básico. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade de Lisboa para obtenção do grau de mestre, orientada por Ana Maria Boavida e Hélia Margaridade Oliveira, Lisboa.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2007). Algebra from a symbolization point of view. In D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in The Early Grades* (pp. 133-160). NewYork: Lawrence: Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139 - 151.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. A Broadening of Sources of Meaning. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematic Education. Past, Present and Future*. (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007a). *What do we know about the Teaching and Learning of Algebra in the Elementary Grades?* Reston: NCTM.

Kieran, C. (2007b). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, XVI(1), pp. 5-26.

Kulm, G. (1999, Maio). Evaluating Mathematics Textbooks [versão electrónica]. *Basic Education*. 43(9). Retirado a 7 de Outubro, 2012, em <http://www.project2061.org/publications/articles/articles/cbe.htm>

Lara, A., Tanamachi, E., & Junior, J. (2006, Set/Dez). Concepções de Desenvolvimento e de Aprendizagem no Trabalho do Professor. *Psicologia em Estudo*, 11(3), pp. 473-482.

Lew, H. (2004). Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. *The Mathematics Educator*, 8(1), pp. 88-106.

Livneh, D., & Linchevski, L. (1998). *Algebrification of Arithmetic: developing algebraic structure sense in the context of Arithmetic*. Proceedings XXXI Annual Conference of the International Group for the PME. Minnesota: Department of Children, Families, and Learning.

Luria, A., Leontiev, A., & Vygotsky, L. (1988). *Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo.

Marques, R. (2000). *Dicionário Breve de Pedagogia*. Lisboa: Editorial Presença.

Mendes, M., & Delgado, C. (n.d.). Geometria. Textos de Apoio para Educadores de Infância In www.dgidec.min-edu.pt/. Acedido em 6 de Março de 2012 em http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais_NPMEB/006_Brochura_geometria_pre_escolar.pdf

Mestre, C., & Oliveira, H. (2011a). *Generalizar Estratégias de Cálculo: Um Estudo sobre o Pensamento Relacional de Alunos do 4ºAno de Escolaridade*. XXII SIEM. Lisboa.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2011b). O Pensamento Algébrico e a Capacidade de Generalização de Alunos do 3ºano de Escolaridade do Ensino Básico. In C. Guimarães, & P. Reis (Orgs.), *Professores e Infâncias: Estudos e Experiências* (pp. 201-223). São Paulo: Junqueira & Marin Editores.

Monteiro, C. (2002). A Formação para o Ensino da Matemática na perspectiva da ESE de Lisboa. In L. Serrazina, *Cadernos da Formação de Professores, 3. A Formação para o Ensino da Matemática na perspectiva da ESE de Lisboa* (pp. 37-49). Porto: Porto Editora.

Morais, M. (2005). A formação de professores - Uma nova perspectiva do Ensino da Língua Inglesa no Ensino Secundário. Trabalho de investigação tutelado realizado para a obtenção do diploma de estudos avançados apresentado à Universidade Piaget, orientado por Maria Del Mar Lorenzo Moledo e Miguel Santos Rego, Praia.

Moreira, D., Ponte, J., Pires, M., & Teixeira, P. (2006). *Texto de Apoio ao Grupo de Discussão - Manuais Escolares: um ponto de situação*. XV EIEM. Algarve: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Murray, M. (2010). Early Algebra and Mathematics Specialists. *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations*, 12, pp. 73-81.

National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science [NCISLA] (2000). *Building a Foundation for Learning Algebra in the Elementary Grades, 1(2)* In www.wcer.wisc.edu/. Acedido em 8 de Outubro de 2012 em <http://www.wcer.wisc.edu/ncisla>

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2008). Algebra: What, When, and for Whom In <http://www.nctm.org/>. Acedido em 28 de Janeiro de 2012 em http://www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/Algebra%20final%2092908.pdf

NCTM. (2012). NCTM NCATE Standards Revision Draft – Elementary Mathematics Specialist In <http://www.nctm.org/>. Acedido em 20 de Outubro de 2012 em http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/NCTM%20NCATE%20Standards%20Revision%20and%20Math%20Content%20-%20Elementary.pdf

NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

- New Mexico State University [NMSU], (October de 2004). *New Mexic State University*. Obtido em 2012, de <http://mc2.nmsu.edu/>
- Palhares, P., & Mamede, E. (2002). Os Padrões na Matemática do Pré-Escolar. *Educare-Educere*, 12, pp. 107-123.
- Papic, M., & Mulligan, J. (2007). *The Growth of Early Mathematical Patterning: An Intervention Study*. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. MERGA: J. Watson & K. Beswick (Eds).
- Piaget, J. (1963). *Psychology of Intelligence*. New Jersey: C. K. Ogden.
- Piaget, J. (1972). *Psychology and Epistemology - Towards a Theory of Knowledge*. England: Penguin Books.
- Piaget, J. (1990). *Para onde vai a Educação?*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Pires, M. (2009). *O Manual Escolar: concepções e práticas de professores de Matemática*. VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Puerto Montt: Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática.
- Pires, F., & Sousa, M. (n.d.). Índícios de Concepções sobre o Conceito de Álgebra e de seu Ensino em Cursos de Formação de Professores In www.enrede.ufscar.br/. Acedido em 23 de Setembro de 2012 em http://www.enrede.ufscar.br/participantes_arquivos/E1_Pires_TA.pdf
- Ponte, J. (1998). Da Formação ao Desenvolvimento Profissional. *Actas do ProfMat*, (pp. 27-44). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. (2002). A Vertente Profissional da Formação Inicial da Professores de Matemática. *Educação Matemática em Revista*, 11A, pp. 3-8.
- Ponte, J. P. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM.
- Ponte, J., Barbosa, A., Fonseca, L., Santos, L., & Canavarro, P. (2006). Números e Álgebra no Currículo Escolar. In I. Vale, A. Barbosa, & L. Fonseca, *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no Ensino Básico In www.dgisd.min-edu.pt/. Acedido em 12 de Março de 2012 em [http://area.dgisd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_\(Set2009\).pdf](http://area.dgisd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf)
- Ponte, J., Oliveira, H., Pires, M., Nunes, C., & Janeiro, J. (2007). *Manual de Procedimentos de Análise e Avaliação de Manuais Escolares*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ponte, J., Pires, M., & Nunes, C. (2007). *Avaliação de Manuais Escolares*. XVI EIEM - Avaliação em Matemática: Problemas e Desafios (pp. 217-221). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, et al. (2010). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J., & Velez, I. (2011, Jul./Dez.). Projecto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008). *Boletim Gepem*, 59, pp. 69-80.

Poulos, K. (1998, Dezembro). What comes next? The mathematics of pattern in kindergarten. *Teaching Children Mathematics*, 5(4), pp. 230-233.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2003). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

Radford, L. (2010). Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. *PNA*, 4(2), pp. 37-62.

Revuz, A. (1969). *Matemática Moderna Matemática Viva*. Lisboa: Livros Horizonte.

Roa, A., & Questa, M. (2007). *Educadores de Infância. Guia de Actividades Lógico-Matemáticas. Nº1*. Lisboa: Ediba.

Rodrigues, M. (2010). O Sentido do Número: uma Experiência de Aprendizagem e Desenvolvimento no Pré-Escolar. Dissertação apresentada à faculdade de Educação da Universidade da Extremadura para obtenção do grau de doutor, orientada por José Luís Ramos Sánchez, Extremadura.

Santos, L., & Santos-Wagner, V. (2009). *Uma Investigação sobre o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico em alunos e o que pensam alguns professores e autores de livros didáticos*. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí.

Schliemann, A., & Carraher, D. (2002). The Evolution of Mathematical Reasoning: Everyday versus Idealized Understandings. *Developmental Review*, 22, pp. 242-266.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (n.d.). When Tables Become Function Tables In <http://www.tufts.edu/>. Acedido em 27 de Maio de 2012 em <http://ase.tufts.edu/education/faculty/docs/schliemannntables.pdf>

Serrazina, L. (2009). O Programa de Formação contínua em Matemática para professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico: balanço possível. *Interacções*, 12, pp. 4-22.

Serrazina, L., & Monteiro, C. (2000). Professores e Novas Competências em Matemática no 1º Ciclo In www.esse.ipl.pt/. Acedido em 6 de Outubro de 2012 em http://fordis.esse.ips.pt/conumero/textos/novas_comp_prof.pdf

Silva, C. (2010). Os Números e Operações: Investigações matemáticas com Alunos do 2º Ano do 1º Ciclo do Ensino Básico. Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho orientada por ... , Minho.

Silvestre, A. (2008). Dificuldades de Aprendizagem da Álgebra: Análise de Manuais do 7º e 8º anos de escolaridade. Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Superior de Psicologia Aplicada para obtenção do grau de mestre orientada por Glória Ramalho, Lisboa.

Sprinthall, N., & Sprinthall, R. (1993). *Psicologia Educacional*. Amadora: Mc Graw Hill.

Steen, L. (1998). Obtido em 16 de 02 de 2012, de http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/algebra_mn.pdf

Stewart, I. (2005, 11 de Março). O que é a Matemática?. Acedido em 19 de Agosto de 2012 em <http://www.srcoronado.com/smf/index.php?topic=15.0>

Stone-MacDonald, A. (2011). *Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings*. Washington, DC: NAEYC.

Thompson, P. (1988). *Quantitative Concepts as a Foundation for Algebraic Reasoning: Sufficiency, Necessity, and Cognitive Obstacles*. Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Dekalb, IL: M. Behr, C. Lacampagne, & M. Wheeler.

Thomson, P., & Smith III, J. (n.d.) Quantitative Reasoning and the Development of Algebraic Reasoning. In J. C. Kaput, *Employing Children's Natural Powers to Build Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics*. (no prelo).

Tunde, B., & Gabriella, S. (2011). Examination of Mathematics Textbooks in use in Hungarian Primary Schools in Romania. *Acta Didactica Napocensia*, 4(2-3), pp. 47-58.

Vala, J. (1986). A Análise de Conteúdo. In A. Silva, & J. Pinto, *Metodologia das Ciências Sociais* (pp. 101-128). Porto: Edições Afrontamento.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. *Números e Álgebra*, pp. 193-211.

Viseu, F., Fernandes, Â., & Gonçalves, M. (2009). *O Manual Escolar na Prática Docente*. X Congresso Internacional Galego Português de Psicopedagogia, Braga, Actas. Braga: Universidade do Minho.

Vlassis, J., & Demonty, I. (2008). *A Álgebra Ensinada por Situações-Problemas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Cristou, K. (2007). Students' Interpretations of Literal Symbols. In S. Vosniadou, *Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 285-299). United Kingdom: Emerald Group Publishing.

Almeida, S. (2008). Formação Inicial de Educadores de Infância: competências e práticas matemáticas sobre padrões. Dissertação apresentada à Universidade de Lisboa para obtenção do grau de mestre orientada por Darlinda Moreira, Lisboa.

Ameron, A. (2003). Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic To Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, pp. 63-75.

Antunes, S., & Menino, H. (2005). As experiências de Terreno na Formação Inicial de Professores. *Educação e Comunicação*, 8, pp. 93-108.

Associação de Professores de Matemática [APM]. (1998). *Matemática 2001 - Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM

Arcavi, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, pp. 146-162.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Baroody, A. (2002). Incentivar a Aprendizagem Matemática das Crianças. In B. Spodek, *Manual de Investigação em Educação de Infância* (pp. 333-390). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice*. Heinmann: Victoria Merecki.

Blanton, M., & Kaput, J. (2003, Outubro). Developing Elementary Teachers - Algebra Eyes and Ears. *Teaching Children Mathematics*, pp. 70-77.

Borralho, A., & Barbosa, E. (n.d.). *Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões*. in www.apm.pt/. Acedido em 20 de Março de 2012 em http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf

Branco, N., & Ponte, J. (2011). A Álgebra na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos: Uma Experiência de Formação. *Indagatio Didactica*, 3(1), pp. 59-79.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Castro, I., Serrazina, L., & Rodrigues, M. (n.d.). Desenvolvendo o sentido do número In www.es.eip.pt. Acedido em 15 de Março de 2012 em <http://arquivo.es.eip.pt/es/eip/projectos/sentidonumero/desenvolvendo.pdf>

Cai, J., & Moyer, J. (no prelo). *Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Some Insights from International Comparative Studies*. Reston: NCTM.

Campbell, R., & Bickhard, M. (1986). *Knowing Levels and Development Stages. Contributions to Human Development*. N.Y.: J.A. Meacham.

Canário, R. (1993). Ensino Superior e Formação Contínua de Professores. *Revista Aprender*, 15, pp. 11-18.

Canavarro, A. (2007). O Pensamento Algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, XVI(2), pp. 81-118.

Cardoso, M. (2010). O conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação continua? Dissertação apresentada ao Instituto de estudos da Criança da Universidade do Minho para obtenção do grau de doutor, orientada por Pedro Palhares e Isabel Vale, Minho.

Carraher, D., & Schliemann, A. Early algebra and algebraic reasoning. In K. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Carraher, D., Earnest, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2) pp. 87-115.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester, *Second Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-705). N.C: Information Age Publishing.

Castro, J., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de Número e Organização de Dados: Textos de Apoio para Educadores de Infância*. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular [DGIDC].

Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS] (2001). *The Mathematical Education of Teachers*. Providence, RI and Washington, DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

Clements, D. (2001). Mathematics in Pre-School. *Teaching Children Mathematics*, pp. 270-275.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math*. New York and London: Routledge.

Clements, D., Sarama, J., & Bibiase, A. (2002). Pre-School and Kindergarten Mathematics: A National Conference. *Teaching Children Mathematics*, pp. 510-514.

Cox, J. (2003, Janeiro). Algebra in the Early Years. *Young Children*, pp. 14-21.

Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas [CRUP] (2000). Por uma Formação Inicial de Professores de Qualidade In www.educ.fc.ul.pt/. Acedido em 4 de Outubro de 2011 em [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-etc\(CRUP\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-etc(CRUP).doc)

CRUP (2001). A Formação de Professores no Portugal de Hoje In www.educ.fc.ul.pt/. Acedido em 12 de Novembro de 2011 em [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/97-Alarcao-Ponte\(CRUP\).rtf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/97-Alarcao-Ponte(CRUP).rtf)

- Curcio, F. (1997). What does Algebraic Thinking look like and sound like with Preprimary Children? *Teaching Children Mathematics*, pp. 296-300.
- Czegledy, I., & Kovaes, A. (2008, Novembro). How to choose a textbook on Mathematics? *Acta Didactica Napocensia*, 1(2), pp.16-30.
- Dâmaso, A. (2010). *Materiais de Apoio o Novo Programa de Matemática. Álgebra: sequências e regularidades*. Açores: Direcção Regional da Educação e Formação dos Açores.
- Devlin, K. (1994). *Matemática. A Ciência dos Padrões*. Porto: Porto Editora.
- Direcção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência [DGEEC], Direcção de Serviços de Estatísticas da Educação [DSEE], & Divisão de Estatísticas do Ensino Básico e Secundário [DEEBS]. (2012). *Perfil do Docente 2010/2011*. Lisboa: DGEEC.
- Drouhard, J., Panizza, M., Puig, L., & Radford, L. (2005). *Algebraic Thinking*. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, (pp. 629-721). Spain.
- Duarte, C. (2009). *Análise das Necessidades de Formação Contínua de Professores dos Cursos de Educação e Formação*. Dissertação apresentada à Universidade de Lisboa para obetnção do grau de mestre, orientada por Maria Manuela Esteves, Lisboa.
- Fernandes, D., Queirós, M., Valente, C., & Ferreira, A. (2002). *Cadernos da Formação de Professores, 3. Perspectivas de ex-alunos e de professores cooperantes da ESE do Porto*. In L. Serrazina (Org.), *A Formação para o Ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1º Ciclo do Ensino Básico* (pp. 51-63). Porto: Porto Editora.
- Ferrini-Mundy, J., Lappan, G., & Phillips, E. (2000, Fevereiro). Experiences with Patterning. *Teaching Children Mathematics*, pp. 112-119.
- Feynman, R. (1989). *O que é uma Lei Física?* Lisboa: Gradiva.
- Flavell, J. (1985). *Cognitive Development*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Fox, J. (2007). *International Perspectives on Early Years Mathematics*. Proceedings 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2 (pp. 865-869). Tasmania, Australia: Watson, Jane and Beswick, Kim (Eds).
- Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2012). *Provas de Aferição 1.º Ciclo - Matemática. Relatório 2012.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Gérard, F., & Roegiers, X. (1998). *Conceber e Avaliar Manuais Escolares*. Porto: Porto Editora.
- Ginsburg, H. (2002). Little Children, Big Mathematics: Learning and Teaching in the Pre-School. *PME26* (pp. 1-16). Washington: U.S. Department of Education.

Ginsburg, H., Greens, C., & Robert, B. (2004). Big Math for Little Kids. *Early Childhood Research Quarterly*, 19, pp. 159-166.

Gonçalves, A. (2008). Desenvolvimento do sentido de número num contexto de resolução de problemas em alunos do 1ºCiclo do Ensino Básico. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade de Lisboa para obtenção do grau de mestre, orientada por Ana Maria Boavida e Hélia Margaridade Oliveira, Lisboa.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2007). Algebra from a symbolization point of view. In D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in The Early Grades* (pp. 133-160). NewYork: Lawrence: Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139 - 151.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. A Broadening of Sources of Meaning. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematic Education. Past, Present and Future*. (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007a). *What do we know about the Teaching and Learning of Algebra in the Elementary Grades?* Reston: NCTM.

Kieran, C. (2007b). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, XVI(1), pp. 5-26.

Kulm, G. (1999, Maio). Evaluating Mathematics Textbooks [versão eletrónica]. *Basic Education*. 43(9). Retirado a 7 de Outubro, 2012, em <http://www.project2061.org/publications/articles/articles/cbe.htm>

Lara, A., Tanamachi, E., & Junior, J. (2006, Set/Dez). Concepções de Desenvolvimento e de Aprendizagem no Trabalho do Professor. *Psicologia em Estudo*, 11(3), pp. 473-482.

Lew, H. (2004). Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. *The Mathematics Educator*, 8(1), pp. 88-106.

Livneh, D., & Linchevski, L. (1998). *Algebrification of Arithmetic: developing algebraic structure sense in the context of Arithmetic*. Proceedings XXXI Annual Conference of the International Group for the PME. Minnesota: Department of Children, Families, and Learning.

Luria, A., Leontiev, A., & Vygotsky, L. (1988). *Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo.

Marques, R. (2000). *Dicionário Breve de Pedagogia*. Lisboa: Editorial Presença.

Mendes, M., & Delgado, C. (n.d.). Geometria. Textos de Apoio para Educadores de Infância In www.dgidec.min-edu.pt/. Acedido em 6 de Março de 2012 em http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais_NPMEB/006_Brochura_geometria_pre_escolar.pdf

Mestre, C., & Oliveira, H. (2011a). *Generalizar Estratégias de Cálculo: Um Estudo sobre o Pensamento Relacional de Alunos do 4º Ano de Escolaridade*. XXII SIEM. Lisboa.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2011b). O Pensamento Algébrico e a Capacidade de Generalização de Alunos do 3º ano de Escolaridade do Ensino Básico. In C. Guimarães, & P. Reis (Orgs.), *Professores e Infâncias: Estudos e Experiências* (pp. 201-223). São Paulo: Junqueira & Marin Editores.

Monteiro, C. (2002). A Formação para o Ensino da Matemática na perspectiva da ESE de Lisboa. In L. Serrazina, *Cadernos da Formação de Professores, 3. A Formação para o Ensino da Matemática na perspectiva da ESE de Lisboa* (pp. 37-49). Porto: Porto Editora.

Morais, M. (2005). A formação de professores - Uma nova perspectiva do Ensino da Língua Inglesa no Ensino Secundário. Trabalho de investigação tutelado realizado para a obtenção do diploma de estudos avançados apresentado à Universidade Piaget, orientado por Maria Del Mar Lorenzo Moledo e Miguel Santos Rego, Praia.

Moreira, D., Ponte, J., Pires, M., & Teixeira, P. (2006). *Texto de Apoio ao Grupo de Discussão - Manuais Escolares: um ponto de situação*. XV EIEM. Algarve: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Murray, M. (2010). Early Algebra and Mathematics Specialists. *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations*, 12, pp. 73-81.

National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science [NCISLA] (2000). *Building a Foundation for Learning Algebra in the Elementary Grades, 1(2)* In www.wcer.wisc.edu/. Acedido em 8 de Outubro de 2012 em <http://www.wcer.wisc.edu/ncisla>

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2008). Algebra: What, When, and for Whom In <http://www.nctm.org/>. Acedido em 28 de Janeiro de 2012 em http://www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/Algebra%20final%2092908.pdf

NCTM. (2012). NCTM NCATE Standards Revision Draft – Elementary Mathematics Specialist In <http://www.nctm.org/>. Acedido em 20 de Outubro de 2012 em http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/NCTM%20NCATE%20Standards%20Revision%20and%20Math%20Content%20-%20Elementary.pdf

NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

New Mexico State University [NMSU], (October de 2004). *New Mexic State University*. Obtido em 2012, de <http://mc2.nmsu.edu/>

Palhares, P., & Mamede, E. (2002). Os Padrões na Matemática do Pré-Escolar. *Educare-Educere*, 12, pp. 107-123.

- Papic, M., & Mulligan, J. (2007). *The Growth of Early Mathematical Patterning: An Intervention Study*. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. MERGA: J. Watson & K. Beswick (Eds).
- Piaget, J. (1963). *Psychology of Intelligence*. New Jersey: C. K. Ogden.
- Piaget, J. (1972). *Psychology and Epistemology - Towards a Theory of Knowledge*. England: Penguin Books.
- Piaget, J. (1990). *Para onde vai a Educação?*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Pires, M. (2009). *O Manual Escolar: concepções e práticas de professores de Matemática*. VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Puerto Montt: Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática.
- Pires, F., & Sousa, M. (n.d.). Índícios de Concepções sobre o Conceito de Álgebra e de seu Ensino em Cursos de Formação de Professores In www.enrede.ufscar.br/. Acedido em 23 de Setembro de 2012 em http://www.enrede.ufscar.br/participantes_arquivos/E1_Pires_TA.pdf
- Ponte, J. (1998). Da Formação ao Desenvolvimento Profissional. *Actas do ProfMat*, (pp. 27-44). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. (2002). A Vertente Profissional da Formação Inicial da Professores de Matemática. *Educação Matemática em Revista*, 11A, pp. 3-8.
- Ponte, J. P. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM.
- Ponte, J., Barbosa, A., Fonseca, L., Santos, L., & Canavarro, P. (2006). Números e Álgebra no Currículo Escolar. In I. Vale, A. Barbosa, & L. Fonseca, *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no Ensino Básico In www.dgidc.min-edu.pt/. Acedido em 12 de Março de 2012 em [http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_\(Set2009\).pdf](http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf)
- Ponte, J., Oliveira, H., Pires, M., Nunes, C., & Janeiro, J. (2007). *Manual de Procedimentos de Análise e Avaliação de Manuais Escolares*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Ponte, J., Pires, M., & Nunes, C. (2007). *Avaliação de Manuais Escolares*. XVI EIEM - Avaliação em Matemática: Problemas e Desafios (pp. 217-221). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, et al. (2010). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J., & Velez, I. (2011, Jul./Dez.). Projecto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008). *Boletim Gepem*, 59, pp. 69-80.

Poulos, K. (1998, Dezembro). What comes next? The mathematics of pattern in kindergarten. *Teaching Children Mathematics*, 5(4), pp. 230-233.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2003). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

Radford, L. (2010). Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. *PNA*, 4(2), pp. 37-62.

Revuz, A. (1969). *Matemática Moderna Matemática Viva*. Lisboa: Livros Horizonte.

Roa, A., & Questa, M. (2007). *Educadores de Infância. Guia de Actividades Lógico-Matemáticas. Nº1*. Lisboa: Ediba.

Rodrigues, M. (2010). O Sentido do Número: uma Experiência de Aprendizagem e Desenvolvimento no Pré-Escolar. Dissertação apresentada à faculdade de Educação da Universidade da Extremadura para obtenção do grau de doutor, orientada por José Luís Ramos Sánchez, Extremadura.

Santos, L., & Santos-Wagner, V. (2009). *Uma Investigação sobre o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico em alunos e o que pensam alguns professores e autores de livros didáticos. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Ijuí.

Schliemann, A., & Carraher, D. (2002). The Evolution of Mathematical Reasoning: Everyday versus Idealized Understandings. *Developmental Review*, 22, pp. 242–266.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (n.d.). When Tables Become Function Tabela In <http://www.tufts.edu/>. Acedido em 27 de Maio de 2012 em <http://ase.tufts.edu/education/faculty/docs/schliemanntables.pdf>

Serrazina, L. (2009). O Programa de Formação contínua em Matemática para professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico: balanço possível. *Interacções*, 12, pp. 4-22.

Serrazina, L., & Monteiro, C. (2000). Professores e Novas Competências em Matemática no 1º Ciclo In www.es.eip.pt/. Acedido em 6 de Outubro de 2012 em http://fordis.es.eip.pt/conumero/textos/novas_comp_prof.pdf

Silva, C. (2010). Os Números e Operações: Investigações matemáticas com Alunos do 2º Ano do 1º Ciclo do Ensino Básico. Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho orientada por ... , Minho.

Silvestre, A. (2008). Dificuldades de Aprendizagem da Álgebra: Análise de Manuais do 7º e 8º anos de escolaridade. Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Superior de Psicologia Aplicada para obtenção do grau de mestre orientada por Glória Ramalho, Lisboa.

- Sprinthall, N., & Sprinthall, R. (1993). *Psicologia Educacional*. Amadora: Mc Graw Hill.
- Steen, L. (1998). Obtido em 16 de 02 de 2012, de http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/algebra_mn.pdf
- Stewart, I. (2005, 11 de Março). O que é a Matemática?. Acedido em 19 de Agosto de 2012 em <http://www.srccoronado.com/smf/index.php?topic=15.0>
- Stone-MacDonald, A. (2011). *Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings*. Washington, DC: NAEYC.
- Thompson, P. (1988). *Quantitative Concepts as a Foundation for Algebraic Reasoning: Sufficiency, Necessity, and Cognitive Obstacles*. Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Dekalb, IL: M. Behr, C. Lacampagne, & M. Wheeler.
- Thomson, P., & Smith III, J. (n.d.) Quantitative Reasoning and the Development of Algebraic Reasoning. In J. C. Kaput, *Employing Children's Natural Powers to Build Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics*. (no prelo).
- Tunde, B., & Gabriella, S. (2011). Examination of Mathematics Textbooks in use in Hungarian Primary Schools in Romania. *Acta Didactica Napocensia*, 4(2-3), pp. 47-58.
- Vala, J. (1986). A Análise de Conteúdo. In A. Silva, & J. Pinto, *Metodologia das Ciências Sociais* (pp. 101-128). Porto: Edições Afrontamento.
- Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. *Números e Álgebra*, pp. 193-211.
- Viseu, F., Fernandes, Â., & Gonçalves, M. (2009). *O Manual Escolar na Prática Docente*. X Congresso Internacional Galego Português de Psicopedagogia, Braga, Actas. Braga: Universidade do Minho.
- Vlassis, J., & Demonty, I. (2008). *A Álgebra Ensinada por Situações-Problemas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Cristou, K. (2007). Students' Interpretations of Literal Symbols. In S. Vosniadou, *Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 285-299). United Kingdom: Emerald Group Publishing.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). *Generalising Mathematical Structure in Years 3-4: A Case Study of Equivalence of Expression*. Proceedings International Group for the Psychology of Mathematics Education: proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX 2 (pp. 369-376). Mexico: Figueras, O., Cortina, J., Alatorre, S., Rojano, T., Sepulveda, A. (Eds.).

Welder, R. (Novembro de 2008). *Improving Algebra Preparation: Implications From Research on Student Misconceptions and Difficulties*. Annual Conference of the School Science and Mathematics . New York.

Wertsch, J., & Michael, C. (2012). Beyond the Individual-Social Antinomy in Discussions of Piaget and Vygotsky. *Human Development*, 39, pp.250-256.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The Tension Between Algebraic Thinking and Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, pp. 379-402.

LEGISLAÇÃO

Decreto-Lei 344/89 de 11 de Outubro. Ordenamento jurídico da formação de educadores de infância e de professores dos ensinos básico e secundário, tomando como quadro referencial a Lei de Bases do Sistema Educativo.

Decreto-Lei n.º 241/2001 de 30 de Agosto. Aprova os perfis específicos de desempenho profissional do educador de infância e do professor do 1.º ciclo do ensino básico.

Decreto-Lei N.º261/2007 de 17 de Julho. Regulamenta a Lei n.º 47/2006 de 28 de Agosto sobre o sistema de avaliação, certificação e adopção dos manuais escolares do ensino básico e do ensino secundário.

Despacho N.º25190/2009 de 17 de Novembro. Lista de entidades acreditadas como avaliadoras e certificadoras de manuais escolares.

Despacho N.º. 29864/2007 de 27 de Dezembro. Avaliação e Certificação de Manuais Escolares.

Lei N.º47/2006 de 28 de Agosto. Define o regime de avaliação, certificação e adopção dos manuais escolares do ensino básico e do ensino secundário, bem como os princípios e objectivos a que deve obedecer o apoio sócio - educativo relativamente à aquisição e ao empréstimo de manuais escolares.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Habilidades características do Pensamento Algébrico, a identificar no Programa Nacional de Matemática, nas Normas e nos currículos Coreano e do Novo México.

APÊNDICE B - Guião de Entrevista Semi-Estruturada para Professores do 1ºCiclo

APÊNDICE C – Fundamentação Teórica da construção do Guião de entrevista

APÊNDICE D – Pedido de colaboração para desenvolvimento de um projecto de Investigação

APÊNDICE E - Base se dados das entrevistas aos docentes do 1ºciclo

APÊNDICE A - Habilidades características do Pensamento Algébrico, a identificar no Programa Nacional de Matemática, nas Normas e nos currículos Coreano e do Novo México.

	Programa/Metas	NCTM	New Mexico	Coreano
1ºano	Números naturais Classificar e ordenar de acordo com um dado critério. Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números. Geometria Comparar, transformar e descrever objectos, fazendo classificações e justificando os critérios utilizados. Reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações Medida Comparar e ordenar comprimentos, massas, capacidades e áreas. Organização e tratamento de dados Classificar dados utilizando diagramas de Venn e de Carroll. Números naturais Utilizar a simbologia $<$, $>$ e $=$. Identificar e dar exemplos de diferentes	Norma 1. Compreender padrões, relações e funções Agrupar, classificar e ordenar objectos Reconhecer, descrever e ampliar padrões Analisar a forma como são gerados os padrões de repetição e os de crescimento Norma 2. Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos Ilustrar os princípios e as propriedades gerais das operações, como a comutatividade Usar representações concretas, pictóricas e verbais para	Referência1: Compreender padrões, relações e funções - Reconhecer, reproduzir, descobrir, estender e criar padrões de repetição (p.e. cor, forma, tamanho, som, movimento e números simples e traduzir de uma representação para outra - contar com um gráfico de centenas (de 2 em 2 até 20, de 5 em 5 e de 10 em 10 até cem) - identificar padrões numéricos num gráfico de centenas Referência2: representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos - escrever frases numéricas que usem objectos concretos, pictóricos e representações verbais para expressar situações matemáticas usando símbolos convencionais e inventados (p.e. +, -, =) - demonstrar e descrever o conceito de igual usando objectos e escalas de equilíbrio - resolver frases numéricas abertas Referência3: Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas - representar formas equivalentes do mesmo número através do uso de modelos físicos, diagramas e expressões de números até 20 (p.e., $3+5=8$, $2+6=8$) - descrever situações que envolvam adição e subtração de números inteiros que incluam objectos, desenhos e símbolos (p.e. o Roberto tem 4 maçãs, a Maria tem mais 5) Referência4: Analisar a variação em diversos contextos - descrever mudanças qualitativas (p.e., um estudante vai crescendo em altura, as árvores tornam-se maiores, o gelo derrete)	Generalização - Desenhar figuras apropriadas que identifiquem um padrão que as crianças reconheçam - Pintar desenhos coloridos com base num padrão - Encontrar várias regras na tabela da multiplicação - Fazer a tabela da multiplicação 12x12 com base em regras para a tabela da multiplicação de 9x9 Abstracção - Compreender a propriedade comutativa da adição - Compreender a relação entre adição e subtração - Usar o símbolo $\square$ para representar valores desconhecidos Pensamento Analítico

2ºano	representações para o mesmo número. Representar números na recta numérica. Geometria Realizar, representar e comparar diferentes itinerários ligando os mesmos pontos (inicial e final) e utilizando pontos de referência. Ler e desenhar plantas simples. Organização e tratamento de dados Ler, explorar e interpretar informação (apresentada em listas, tabelas de frequências, gráficos de pontos e pictogramas) respondendo a questões e formulando novas questões. Números naturais Usar os sinais +, -, x e : na representação horizontal do cálculo Resolver problemas envolvendo adições, subtracções, multiplicações e divisões. Números naturais Resolver problemas envolvendo relações numéricas. Identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção. Geometria Comparar e descrever sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças.	desenvolver uma compreensão das notações simbólicas inventadas e convencionais Norma3. Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas Modelar situações que envolvam a adição e a subtracção de números inteiros através da utilização de objectos, figuras e símbolos Norma 4. Analisar a variação em diversos contextos Descrever variações qualitativas, como o facto de um aluno ter crescido e também quantitativas	Referência1: Compreender padrões, relações e funções - Reconhecer, reproduzir, descobrir, estender e criar padrões de repetição (p.e. cor, forma, tamanho, som, movimento e números simples e traduzir de uma representação para outra - Contar usando calculadoras ou gráficos de centenas, para diferenciar hábitos de contagem versus significado dos números - construir e resolver frases abertas que tenham variáveis (p.e., $10 = ? + 7$) - Relacionar situações problemáticas do dia-a-dia com frases numéricas que envolvam adição e subtracção (p.e., 25 alunos vão a uma loja. Sabendo que cabem 5 em cada carro, quantos carros serão necessários?) Referência2: representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos - usar linguagem matemática para descrever uma variedade de representações, ideias e situações matemáticas - explicar o conceito de igual, usando objectos ou dando exemplos (p.e., as quantidades em ambos os lados da equação são as mesmas) construir e resolver frases abertas que tenham variáveis até 20 (p.e., $20 = ? + 6$) - usar objectos, palavras e símbolos para explicar o conceito de adição Referência3: Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas - modelar situações de adição e subtracção de números inteiros, usando objectos, figuras e símbolos - resolver problemas relacionados com o comércio (p.e., com dinheiro e medidas) - resolver problemas de adição e subtracção usando dados simples a partir de gráficos, pictogramas e frases numéricas Referência4: Analisar a variação em diversos contextos	- Resolver uma equação encontrando condições necessárias - Resolver um problema usando uma estratégia “de trás para a frente” Pensamento Dinâmico - Decompor todos os números até 10, inclusivé, usando diferentes métodos Modelação - Criar uma história que combine com uma expressão que envolva as operações de adição e subtracção - Colocar um problema a partir de expressões dadas que envolva as operações de adição e subtracção - Modelar uma situação usando uma expressão com □ Organização - Classificar uma situação segundo certos critérios - Investigar uma situação problemática através de uma tabela que represente relações entre as condições do problema

	Medida Resolver problemas envolvendo dinheiro.		- descrever mudanças qualitativas (p.e., um estudante cresceu 2 polegadas num ano, a água aquece até ferver)	
	Programa/Metas	NCTM	New Mexico	Coreano
3ºano	Regularidades Investigar regularidades numéricas. Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional. (Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos) Operações com números naturais Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades. Operações com números naturais Resolver problemas que envolvam as operações em	Norma 1. Compreender padrões, relações e funções Descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos Norma 2. Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos Identificar propriedades, como a comutatividade, a associatividade e a	Referência1: Compreender padrões, relações e funções - Representar relações entre quantidades sob a forma de expressões matemáticas, equações ou desigualdades - resolver problemas que envolvam equações numéricas - seleccionar símbolos operacionais e relacionais apropriados para tornar uma expressão verdadeira (p.e., completar $4\square=12$, qual o símbolo operacional que falta?) - usar modelos de pés e polegadas para expressar conversões simples da unidade em formas simbólicas (p.e., 36 polegadas=$\square$pés x 12) que desenvolvam a compreensão conceptual versus as habilidades procedimentais - reconhecer e usar a propriedade comutativa da multiplicação (p.e., se $5\times 7=35$ então $7\times 5=?$) - criar e estender padrões numéricos e geométricos incluindo padrões da multiplicação - representar relações funcionais simples: a) resolver problemas simples envolvendo uma relação funcional entre duas quantidades (p.e., encontrar o custo total de múltiplos itens dado o custo/unidade) b) estender e reconhecer um padrão linear pelas suas regras (p.e., o nº de pernas de um certo n. de cavalos pode ser calculado: contando de 4 em 4, multiplicando o n. de cavalos por 4 ou usando tabelas) Referência2: representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos - determinar o valor de lacunas (p.e., $139+\square=189$) - Reconhecer e usar as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação (p.e., se $5\times 7=35$, então quanto é $7\times 5?$, se $5\times 7\times 3=15$, então quanto é $7\times 3\times 5?$) - explorar a utilidade das propriedades de comutatividade, distributividade, elemento identidade e elemento neutro quando se opera com números Referência3: Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas - modelar situações problemáticas com objectos e usar representações tais como: figuras, gráficos, tabelas e equações para desenhar conclusões - resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade incluindo as de	Generalização - Fazer figuras até ao 5º número triangular e 5º número quadrangular - determinar a 13ª figura de um padrão descoberto - Encontrar o número de triângulos equiláteros numa figura através de uma estratégia de simplificação Abstracção - compreender a relação inversas entre as operações de multiplicação e divisão - determinar o valor de alguns dígitos representados por $\square$ ou de símbolos alfabéticos na multiplicação vertical Pensamento Analítico - resolver um

	contextos diversos. Números racionais não negativos Resolver problemas envolvendo números na sua representação decimal. Orientação espacial Ler e utilizar mapas e plantas, e construir maquetas simples. Figuras no plano e sólidos geométricos Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais. Comprimento, massa, capacidade e área Resolver problemas respeitantes a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida SI. Tempo Ler e interpretar calendários e horários. Resolver problemas envolvendo situações temporais.	distributividade, e aplicá-las ao cálculo com números inteiros Representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo. Expressar relações matemáticas através de equações Norma3. Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas Modelar situações problemáticas, usando objectos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões Norma 4. Analisar	preço unitário (p.e., se 4 maçãs custam 80 centavos então uma maçã custa 20 centavos) - descrever relações entre quantidades sob a forma de expressões matemáticas, equações e inequações - seleccionar símbolos operacionais e relacionais apropriados para tornar uma expressão verdadeira (p.e., qual o símbolo em falta que torna verdadeira a frase $4 \square 3 = 12$) Referência4: Analisar a variação em diversos contextos - demonstrar como é que a variação de uma variável pode estar relacionada com a variação de outra variável (p.e., através de tabelas de valores)	problema utilizando uma estratégia de sustentação - resolver uma equação usando a relação inversa entre as operações de multiplicação e divisão Pensamento Dinâmico - resolver problemas utilizando estratégias de tentativa e erro - reconhecer a idade relacional entre dois irmãos - representar a relação entre dois conjuntos de números em termos de $\square$ e O - resolver um problema usando a proporcionalidade directa Modelação - colocar um problema que envolva uma expressão numérica sobre divisão - colocar um problema que envolva uma expressão numérica com cálculos mistos - modelar situações usando uma
4ºano			Referência1: Compreender padrões, relações e funções - representar e analisar padrões e funções simples, usando palavras, tabelas e gráficos - criar e descrever padrões numéricos e geométricos incluindo padrões de multiplicação e divisão - expressar relações matemáticas usando equações - usar e interpretar variáveis, símbolos matemáticos e propriedades para escrever e simplificar expressões e frases a) usar letras, caixas ou outros símbolos que suportem números em expressões simples ou equações (p.e., demonstrar compreensão do conceito de variável) b) interpretar e avaliar expressões matemáticas usando parêntesis c) usar e interpretar fórmulas (p.e, Área=comp x largura) para responder a questões sobre quantidades e as suas relações Referência2: representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos - identificar símbolos e letras que representem o conceito de variável como uma quantidade desconhecida - explorar o uso de propriedades (comutativa, distributiva, associativa) nas operações com números inteiros - expressar relações matemáticas usando equações - determinar o valor de variáveis em equações simples (p.e., $80 \times 15 = 40 \times \square$) - desenvolver fórmulas simples explorando quantidades e as suas relações Referência3: Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas - resolver problemas que envolvam relações proporcionais (incluindo preço unitário e interpretações de mapas, p.e., se 1 polegada=5 milhas, então 5 polegadas=$\square$ milhas) - modelar situações problemáticas e usar gráficos, tabelas, desenhos e equações para desenhar conclusões (p.e., diferentes padrões de variação)	

	Representação e interpretação de dados e situações aleatórias Ler, explorar, interpretar e descrever tabelas e gráficos, e, responder e formular questões relacionadas com a informação apresentada. Construir e interpretar gráficos de barras. Tempo Identificar intervalos de tempo e comparar a duração de algumas actividades.	a variação em diversos contextos Investigar a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável Identificar e descrever situações com taxas de variação constantes ou variáveis e compará-las	- usar e interpretar fórmulas para responder a questões sobre quantidades e as suas relações Referência4: Analisar a variação em diversos contextos - identificar e descrever situações com taxas constantes ou variáveis de mudança, e compará-las - determinar como é que a variação de uma variável pode estar relacionada com a variação de outra variável (p.e., através d tabelas de valores) - encontrar e analisar padrões usando tabelas de valores - demonstrar e descrever taxas de variação de mudança que se relacionem com situações do mundo real (p.e., crescimento de plantas, idades dos alunos)	expressão com $\square$ - modelar situações usando um diagrama Organização - organizar uma situação problemática sistematicamente recorrendo a uma tabela de uma dimensão para representar as condições do problema

APÊNDICE B - Guião de Entrevista Semi-Estruturada para Professores do 1ºCiclo

Antes de começarmos agradeço a sua disponibilidade participando nesta entrevista que me permite aferir no estudo realizado no âmbito da minha tese de doutoramento, como é introduzido o Pensamento Algébrico, por alguns professores em crianças pequenas. Muitas das respostas serão fechadas e algumas (4) serão abertas pelo que a entrevista será gravada. É garantido o anonimato.

Entrevista N°:

Categoria 1. Formação Académica

1.1. Assinale com uma cruz a sua **Formação Académica**, identifique-a e indique as **Universidade(s)/Instituto(s)** onde estudou:

- () Licenciatura em
no(a).....
- () Licenciatura em
no(a).....
- () Mestrado em
no(a).....
- () Doutoramento em
no(a).....
- () Outras.....
no(a).....

1.2. Indique os **nomes das disciplinas** da área de Matemática que teve durante essa(s) formação(ões):

.....
.....
.....

Categoria 2. Experiência profissional

2.1. Indique o **número de anos de docência**:

2.2. Os **níveis de escolaridade** que já leccionou:

2.3. Indique o **nome da Escola** e **nível de escolaridade** leccionado, relativos ao ano lectivo **2011/2012**:

Categoria 3. Concepções

3.1. O que é Álgebra para si?

.....
.....
.....

Segundo o NCTM, Álgebra é um modo de pensar um conjunto de conceitos e de desenvolver habilidades, que permite aos estudantes generalizar, modelar e analisar situações matemáticas (NCTM, 2008).

Por sua vez, Pensamento Algébrico é uma actividade intelectual que se manifesta na habilidade em representar, generalizar e verbalizar, que no fundo são capacidades que se podem

estimular e que podem evoluir num contexto de uma crescente abstracção, à medida que as crianças crescem.

3.2. Quais os **temas/actividades** (abordados ou realizadas em sala de aula) que acha que permitem **desenvolver o pensamento algébrico** dos alunos? Indique **três**.

.....

Categoria 4. Linguagem e Pensamento Algébrico

4. Acredita que é possível **iniciar** o desenvolvimento do Pensamento Algébrico em **alunos de que idades? Como?**

.....

Categoria 5. Representação – Resposta Aberta - gravar

5.1. Quando realiza com os seus alunos actividades de resolução de problemas dá mais importância ao cálculo e resposta final **ou** à representação do problema? Escolha **apenas uma das opções** assinalando com uma cruz:

- ☐ cálculo e resposta final
☐ representação

Indique dois motivos e acrescente o que considerar pertinente na sua explicação:

.....

5.2. Se numa prova uma questão valer 10 pontos, como classificaria os seguintes tipos de respostas **escrevendo a pontuação que atribuiria** a cada uma das situações, **antes de cada frase**, no espaço preenchido pelas reticências:

- a) Apenas o resultado final, correcto, sem representação do problema
 b) O resultado final, incorrecto e uma representação correcta do problema
 c) Apenas uma representação correcta do problema, sem resultado final nem cálculos intermédios

5.3. Indique **três** diferentes actividades que realize com os seus alunos nas quais trabalhem o **significado do sinal de igual**.

.....

Categoria 6. Relações Aritmética/Álgebra

6.1. O Programa de Matemática em vigor do ME, refere que os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam **sequências numéricas**. **Dê dois exemplos de actividades** que já tenha realizado com os seus alunos sobre esta temática, que considere relevantes.

.....

6.2. Dê dois exemplos de actividades que considere relevantes e que já tenha realizado com os seus alunos com o objectivo de desenvolver neles o conceito de **proporcionalidade**.

6.3. Vê algum inconveniente em que a Álgebra seja introduzida depois da Aritmética ou considera preferível que ambas sejam introduzidas paralelamente logo desde os primeiros anos de escolaridade? Escolha apenas uma das opções assinalando com uma cruz:

- () Álgebra introduzida depois da Aritmética
() Ambas sejam introduzidas paralelamente

6.4. A **passagem da Aritmética à Álgebra** costuma levantar algumas dificuldades aos alunos. Identifique **três** dessas dificuldades desse tipo de pensamento.

6.5. Há autores que colocam o **foco do pensamento algébrico** na estrutura da Aritmética (como as propriedades das operações: comutatividade,...), outros no facto de as **operações poderem ser tratadas como funções** (como por exemplo no exercício que se segue: o preenchimento da tabela seguinte,

Caixas de bolachas	Preço
	3€
2	6€
3	
	12€
5	
6	
	21€
8	
9	
10	30€

percebendo que existe uma correspondência entre os valores do número de caixas de bolachas e o preço que lhe corresponde, em vez de ser preenchida cada coluna de valores separadamente, a 1ª de um em um e a 2ª de três em três) e outros ainda na capacidade de **generalização**.

6.5.1. Indique com qual destas perspectivas mais se identifica, assinalando com uma cruz (apenas) uma das opções seguintes:

- () estrutura da Aritmética
() operações como funções
() generalização

6.5.2. Indique dois motivos para a sua escolha:

6.6. Qual a **intenção** com que coloca problemas simples de “**juntar e retirar**”?
Resposta Aberta - gravar

Assinale com os números 1,2, ... cada uma das opções seguintes, de acordo com a ordem pela qual o costuma fazer (não é obrigatório referir-se a todas). Acrescente o que considerar pertinente na sua explicação.

- ☐ Exercícios de preenchimento de lacunas
- ☐ Algoritmos
- ☐ Cálculo mental
- ☐ A subtração como sendo o inverso de adição
- ☐ Contagem pelos dedos

.....

6.7. Qual a **intenção** com que coloca problemas simples de “**multiplicar e dividir**”?

Resposta Aberta - gravar

Assinale com os números 1,2, ... cada uma das opções seguintes, de acordo com a ordem pela qual o costuma fazer (não é obrigatório referir-se a todas). Acrescente o que considerar pertinente na sua explicação.

- ☐ Exercícios de preenchimento de lacunas
- ☐ Algoritmos
- ☐ Cálculo mental
- ☐ A divisão como sendo o inverso da multiplicação
- ☐ Contagem pelos dedos

.....

6.8. Na Matemática, atribui **maior importância** à realização de exercícios de mecanização ou à resolução de problemas? Acrescente o que considerar pertinente na sua explicação. **Resposta Aberta - gravar**

.....

Categoria 7. Relações Geometria//Álgebra e Generalizações, Representações/Álgebra

7.1. O Programa de Matemática em vigor do ME, refere que os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam **padrões geométricos**. **Dê dois exemplos de actividades** que já tenha realizado com os seus alunos sobre esta temática, que considere relevantes.

.....

7.2. Perante o clássico problema “5 amigos vão cumprimentar-se entre si com um aperto de mão. Quantos apertos de mão serão dados no final?”, como proporia aos seus alunos que **fosse explorado**?

.....

Categoria 8. Recursos Didácticos e Tecnológicos

8.1. Qual o nome, autores e editora do manual escolar que está a utilizar?

Nome

Manual:

.....

Autores:

.....

Editora:

.....

8.2. Com que frequência recorre ao Manual?

- ☐ Raramente
☐ Com frequência moderada
☐ Muito frequentemente

8.3. Identifique nele dois atributos:

.....

8.4. Identifique nele dois defeitos:

.....

8.5. Os conteúdos encontram-se em progressão?

- ☐ Sim
☐ não

8.6. Considera que o manual que utiliza introduz o Pensamento Algébrico nos alunos...

- ☐ Sim, de modo informal
☐ Sim, de modo formal
☐ Não

8.7. Além do manual identifique outros recursos didáticos/tecnológicos a que costume recorrer para o ensino da Álgebra/Pensamento Algébrico:

.....

Categoria 9. Prática Pedagógica

9. Identifique três parâmetros em que sinta desfasamento entre a sua formação académica e a sua prática docente na área da matemática.

.....

Categoria 10. Provas de Aferição

10. Nas (últimas) Provas de Aferição de Matemática do 4ºano, na sua Escola, quais os **domínios** em que os alunos revelaram **menor qualidade de desempenho**? Assinale a sua resposta com uma cruz.

- ☐ Números e Operações
☐ Geometria e Medida
☐ Organização e Tratamento de dados

Muito obrigada pela sua colaboração

APÊNDICE C – Fundamentação Teórica da construção do Guião de entrevista

QUADRO I – Grupo 1 de questões do Guião de Entrevista, seus objectivos e fundamentação teórica

QUESTÕES	OBJECTIVOS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	PÁG.
1.Formação Acadêmica			
1.1. Assinale com uma cruz a sua Formação Acadêmica , identifique-a e indique as Universidade(s)/Instituto(s) onde estudou	Caracterizar a formação acadêmica e profissional dos docentes	A dinâmica da aquisição do conhecimento matemático é importante para o desenvolvimento consistente de metodologias, apropriadas a um melhor desempenho profissional (Fernandes, Queirós, Valente, & Ferreira, 2002). Neste sentido, a formação inicial dos professores de Educação Básica para o ensino da Matemática deverá, segundo estes mesmos autores, ser problematizada do ponto de vista da construção individual e estruturante do conhecimento matemático. Para (Canário, 1993) as novas realidades do mundo do trabalho assim com os novos modos de pensar, têm conduzido à construção de novas metodologias e novas práticas de formação, em alternativa às acções pontuais estruturadas em função do paradigma escolar, isto é, nomeadamente respeitante às práticas em sala de aula que se têm alterado nas últimas décadas.	115 124
1.2. Indique os nomes das disciplinas da área de Matemática que teve durante essa(s) formação(ões)	Avaliar a carga horária de disciplinas de Matemática, na formação acadêmica e profissional	Mais recentemente, o (NCTM, 2012) publicou os “Standards Revision Draft – Elementary Mathematics Specialist” (Padrões dos Especialistas de Matemática dos anos Elementares). Segundo esta organização, todos os docentes certificados como especialistas matemáticos dos anos elementares devem conhecer, compreender e ensinar nos seguintes domínios: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Medida e Probabilidades e Estatística. Os professores precisam de conhecimentos científicos e pedagógicos de Matemática, para ensinar. (Ponte, Da Formação ao Desenvolvimento Profissional, 1998)	123 120

QUADRO II – Grupo 2 de questões do Guião de Entrevista, seus objectivos e fundamentação teórica

QUESTÕES	OBJECTIVOS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	PÁG.
2.Experiência profissional			
2.1. Indique o número de anos de docência	Caracterizar o nº de anos de docência	Segundo (Ponte, A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas, 2008) a Educação Matemática é constituída por três campos: um campo de práticas sociais (Ensino-Aprendizagem), cujo núcleo são as práticas de ensino e de aprendizagem de professores e alunos , mas que inclui igualmente outras vertentes como as práticas de apoio à aprendizagem extra-escolar e a produção de materiais didáctico...	114
2.2. Os níveis de escolaridade que já leccionou	Caracterizar os níveis de escolaridade leccionados pelo docente		
2.3. Indique o nome da Escola e nível de escolaridade leccionado, relativos ao ano lectivo 2011/2012	Identificar a escola e o nível de escolaridade, que o docente leccionou no último ano lectivo	-	

QUADRO III – Grupo 3 de questões do Guião de Entrevista, seus objectivos e fundamentação teórica

QUESTÕES	OBJECTIVOS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	PÁG.
3. Concepções			
3.1. O que é Álgebra para si?	Perceber qual o conceito de Álgebra que o docente tem e confrontá-lo com autores de referência	Para (Kieran, What do we know about the Teaching and Learning of Algebra in the Elementary Grades?, 2007), Álgebra é muito mais do que um conjunto de conhecimentos e técnicas, é uma maneira de pensar e o sucesso da criança na Álgebra depende de pelo menos seis tipos de habilidades de pensamento matemático: generalização, abstracção, pensamento analítico, dinâmica de pensamento, modelagem e organização.	40
3.2. Quais os temas/actividades (abordados ou realizadas em sala de aula) que acha que permitem desenvolver o pensamento algébrico dos alunos? Indique três .	Perceber qual o conceito de Pensamento Algébrico que o docente tem e confrontá-lo com autores de referência	O Quadro 3, que sintetiza quais os focos do Pensamento Algébrico dos diferentes autores referidos até ao momento. Uma pesquisa orientada por (Kieran, What do we know about the Teaching and Learning of Algebra in the Elementary Grades?, 2007) conclui que o desenvolvimento do raciocínio algébrico a um nível elementar da escolaridade enfatiza que a Aritmética pode ser conceptualizada sob formas algébricas e que construir um entendimento da Álgebra começa com a aprendizagem da Aritmética. Devemos esperar que os alunos nos primeiros anos de escolaridade pensem algebricamente, pois efectivamente eles são capazes de tal, dizem-nos (Cai & Moyer, 2008).	40 49 51

QUADRO IV – Grupo 4 de questões do Guião de Entrevista, seus objectivos e fundamentação teórica

QUESTÕES	OBJECTIVOS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	PÁG.
4.Linguagem e Pensamento Algébrico			
4. Acredita que é possível iniciar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico em alunos de que idades? Como?	Perceber com que idades o docente considera possível iniciar Pensamento Algébrico	A pesquisa sobre o Pensamento Algébrico do aluno em tenra idade é relativamente recente (Kieran, Research on the Learning and Teaching of Algebra.A Broadening of Sources of Meaning., 2006). Para (Carraher, Earnest, Schliemann, & Brizuela, 2006) a abordagem à Álgebra nos primeiros anos de escola deve ser orientada pela perspectiva de que a generalização é o coração do raciocínio algébrico, as operações aritméticas podem ser vistas como funções e a notação algébrica pode emprestar suporte ao raciocínio matemático, mesmo entre jovens estudantes.	36 36

QUADRO V – Grupo 5 de questões do Guião de Entrevista, seus objectivos e fundamentação teórica

QUESTÕES	OBJECTIVOS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	PÁG.
5. Representação			
5.1. Quando realiza com os seus alunos actividades de resolução de problemas dá mais importância ao <u>cálculo e resposta final</u> ou à <u>representação</u> do problema? Escolha apenas uma das opções assinalando com uma cruz: () cálculo e resposta final () representação	Perceber se o docente valoriza mais o cálculo ou a representação de situações-problema e porquê	Também para (Cox, 2003) representar e analisar situações matemáticas e estruturas é um componente importante do pensamento algébrico. Outras ainda, recorrem às representações simbólicas utilizando os numerais (Castro & Rodrigues, 2008). As representações escritas feitas pelas crianças constituem um importante meio de registo e comunicação de ideias, estratégias e raciocínios.	51 104
5.2. Se numa prova uma questão valer 10 pontos, como classificaria os seguintes tipos de respostas escrevendo a pontuação que atribuiria a cada uma das situações, antes de cada frase , no espaço preenchido pelas reticências: Apenas o resultado final, correcto, sem representação do problema O resultado final, incorrecto e uma representação correcta do problema Apenas uma representação correcta do problema, sem resultado final nem cálculos intermédios	Perceber de que forma o docente valoriza o cálculo e a representação de situações-problema	O objectivo primordial do pensamento algébrico é conseguir que as crianças pensem, descrevam e justifiquem o que está acontecendo, em geral, em relação a algumas situações matemáticas (Blanton, Teaching Practices That Develop Children's Algebraic Thinking Skills, 2008). Segundo este investigador os três objectivos instrucionais implicados resumem-se a: representar, questionar e ouvir – são os componentes que ajudam as crianças a construir as suas próprias generalizações.	56
5.3. Indique três diferentes actividades que realize com os seus alunos nas quais trabalhem o significado do sinal de igual .	Perceber que significados do sinal de igual o docente transmite aos seus alunos e como	Segundo (Vlassis & Demonty, A Álgebra ensinada por situações-problemas, 2008) esta evolução foca-se na interpretação do significado da igualdade , de expressões algébricas e da letra, pois só assim se consegue que muitos alunos trabalhem em Álgebra sem conservarem um modo de pensar aritmético.	46

		Nos primeiros anos de escolaridade, os estudantes são muitas vezes ensinados a olhar para o sinal de igual como um símbolo processual, que lhes diz para calcularem algo, ou como um símbolo que separa o problema da sua resposta, em vez de o olharem também como um símbolo relacional ou de equivalência (Welder, 2008). ...enfazizando o sinal de igual como um símbolo de relação e neste caso os professores devem ser incentivados a usar a frase "é o mesmo que" quando se lê o sinal de igual (Welder, 2008). Pode trabalhar-se o sentido de equivalência do sinal de igual através de expressões numéricas como $8 + 4 = 7 + 5$ (numa fase mais inicial da escolaridade) ou $8 = 3 + ?$ Pedindo aos alunos que coloquem um número no local do ponto de interrogação que torne o texto verdadeiro (Welder, 2008). A utilização de frases numéricas como $78 - 49 + 49 = 78$ ajuda os alunos a desenvolverem um pensamento relacional sobre o sinal de igual. (Welder, 2008)	51 49 49 49

QUADRO VI – Grupo 6 de questões do Guião de Entrevista, seus objectivos e fundamentação teórica

QUESTÕES	OBJECTIVOS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	PÁG.
6.Relações Aritmética/Álgebra			
6.1. O Programa de Matemática em vigor do ME, refere que os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas. Dê dois exemplos de actividades que já tenha realizado com os seus alunos sobre esta temática, que considere relevantes.	Perceber como o docente trabalha as sequências numéricas com os alunos	Quanto ao nosso sistema de numeração , (Poulos, 1998) explica que ele é construído sobre um sistema de padrões e de previsibilidade, os alunos devem ser capazes não apenas de identificar os padrões que eles vêem, mas também de encontrar razões e provas de que os padrões existem.	53
		Segundo Ginsburg, os investigadores acreditam que as crianças, quando contam , estão realmente a explorar o primeiro padrão regular que vêem na Matemática . As dezenas têm um padrão e depois de cada 10 o que se faz é adicionar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.	53
		... Ginsburg, Poulos e Kieran defendem o início do estudo de padrões a partir dos 4 e 5 anos de idade. São remetidas para mais tarde, a generalização de padrões, por Poulos, o aumento da complexidade de padrões simples, por Cox e a simbolização formal dos padrões, por Kieran.	54
		... (Steen, 1998), que afirma que os padrões não só envolvem os alunos em todas as áreas da Matemática : Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade ou Estatística, como também em todos os tipos de actividades matemáticas, mais concretamente em actividades como: Reconhecer, Visualizar ,Verbalizar, Simbolizar ,Analisar .	54
		Existe um documento bastante recente (com data original de 2002 mas revisto em 2010) que resultou de uma tomada de posição conjunta entre a NAEYC (National Association for the Education of Young Children) e o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) intitulado Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings (Stone-MacDonald, 2011), no qual se encontram exemplos de habilidades que são adequadas desenvolver em crianças entre os três e os seis anos, na área curricular de Padrões/Pensamento Algébrico: ...discutir padrões em aritmética (por exemplo, adicionando um a um número qualquer resulta no "número de contagem" seguinte).	72

		O Programa de Matemática do Ensino Básico evidencia bastante atenção no que concerne à transição das competências algébricas que se pretendem desenvolver nos alunos do 1ºciclo e do 2ºciclo de estudos. Neste documento (Ponte et al, 2010) referem que os alunos no 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos. (Borralho & Barbosa, Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões, n.d.) defendem que a interacção dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado pois irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na aprendizagem e permite pensar no estudo da Álgebra desde o pré-escolar. A procura de relações próximas (recursivas) e distantes (estas envolvendo a generalização, modelação) entre os termos de uma sequência numérica gerada por um padrão exige a mobilização de um tipo de pensamento que é algébrico, promovendo-o e desenvolvendo-o (Borralho & Barbosa, Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões, n.d.).	87 105 105
6.2. Dê dois exemplos de actividades que considere relevantes e que já tenha realizado com os seus alunos com o objectivo de desenvolver neles o conceito de proporcionalidade .	Perceber como o docente transmite aos seus alunos o conceito de proporcionalidade	... mas o desafio proposto por(Curcio, 1997) é olhar para formas de exploração que envolvam explicitamente as crianças em pensamento proporcional. Segundo (Murray, 2010)..... o raciocínio algébrico é um componente essencial ao estudo dos números racionais e do raciocínio proporcional.	38 127
6.3. Vê algum inconveniente em que a <u>Álgebra seja introduzida depois da Aritmética</u> ou considera preferível que <u>ambas sejam introduzidas paralelamente logo desde os primeiros anos de escolaridade</u> ? Escolha apenas uma das opções assinalando com uma cruz: ☐ Álgebra introduzida depois da Aritmética ☐ Ambas sejam introduzidas paralelamente	Identificar a forma como o docente considera que a Álgebra deve ser introduzida, se antes, se em simultâneo com a Aritmética	Segundo (Ameron, 2003), a ruptura entre a Aritmética e Álgebra prende-se com o tipo de abordagem praticada durante a resolução de problemas, uma vez que, problemas aritméticos podem ser resolvidos directamente, através de respostas directas, enquanto que problemas algébricos terão necessariamente que se traduzir para uma linguagem e representação formais, e só depois resolvidos. Para (Kieran, What do we know about the Teaching and Learning of Algebra in the Elementary Grades?, 2007) ... estas actividades, que utilizam os números como quase-variáveis permitem aos professores ajudar os alunos a construir pontes entre o conhecimento existente e o conhecimento algébrico sem recorrer a símbolos algébricos. Trata-se do que se designa por algebrificação da Aritmética (Aritmética generalizada).	48 48

		(Borrvalho & Barbosa, Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões, n.d.) defendem que a interacção dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado pois irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na aprendizagem e permite pensar no estudo da Álgebra desde o pré-escolar.	105
6.4. A passagem da Aritmética à Álgebra costuma levantar algumas dificuldades aos alunos. Identifique três dessas dificuldades desse tipo de pensamento.	Identificar nos alunos, dificuldades da passagem da Aritmética para a Álgebra	Entre a aprendizagem dos números na Aritmética e a aprendizagem dos símbolos literais na Álgebra situa-se uma fase intermédia em que os números são utilizados como quase-variáveis, facto já referido anteriormente por Kieran.	51
		Para (kieran, 2004) os alunos que operam numa estrutura aritmética de referência tendem a não ver os aspectos relacionais e as propriedades das operações, focam-se no cálculo. Assim, para uma transição bem sucedida da Aritmética para a Álgebra é necessário que: 1. O pensamento não se limite ao cálculo de uma resposta numérica mas que tenha o seu foco nas relações; 2. Exista foco nas operações, bem como nas suas inversas (na ideia de fazer e desfazer); 3. Os alunos se concentrem na representação e não apenas na resolução de um problema; 4. Se dê atenção aos números e letras e não apenas aos números.... 5. Se reoriente o significado do sinal de igual.	48
		O (NCISLA, 2000) ... sumariza um conjunto de ideias que um professor dos primeiros anos de escolaridade pode aplicar na sua sala de aula e que conduzem os seus alunos a pensar em Aritmética de forma a providenciarem um alicerce para a aprendizagem da Álgebra...	122
6.5. Há autores que colocam o foco do pensamento algébrico na estrutura da Aritmética (como as propriedades das operações: comutatividade,...), outros no facto de as operações poderem ser tratadas como funções (como por exemplo no exercício que se segue: o preenchimento da tabela seguinte 	Identificar em que temática o docente coloca o foco do Pensamento Algébrico e porquê	Num artigo do (NCISLA, 2000).... Os resultados da investigação mostram ainda que estes alunos aprenderam a tecer e justificar generalizações sobre as propriedades e estrutura subjacentes da Aritmética , e ainda desenvolveram habilidades particulares de articulação e representação.	57
		Para (Carraher, Earnest, Schliemann, & Brizuela, 2006) ... as operações aritméticas podem ser vistas como funções e a notação algébrica pode emprestar suporte ao raciocínio matemático, mesmo entre jovens estudantes....dar às funções um	

	<table><tr><th>aixas de bolachas</th><th>reço</th></tr><tr><td></td><td>€</td></tr><tr><td></td><td>€</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>2€</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1€</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>0€</td></tr></table>	aixas de bolachas	reço		€		€				2€						1€					0	0€		
aixas de bolachas	reço																								
	€																								
	€																								
	2€																								
	1€																								
0	0€																								
percebendo que existe uma correspondência entre os valores do número de caixas de bolachas e o preço que lhe corresponde, em vez de ser preenchida cada coluna de valores separadamente, a 1ª de um em um e a 2ª de três em três) e outros ainda na capacidade de generalização .																									
6.5.1. Indique com qual destas perspectivas mais se identifica, assinalando com uma cruz (apenas) uma das opções seguintes: () estrutura da Aritmética () operações como funções () generalização																									
	maior destaque no currículo da Matemática Elementar ajuda a facilitar a integração da Álgebra no currículo existente, em etapas escolares mais avançadas. A chave da sua proposta é que as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão sejam tratadas desde o início como funções.		36																						
	Na verdade, a notação algébrica parecia ajudá-los a mudar de aspectos computacionais para generalizações sobre como dois conjuntos de valores estão interligados (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2012).		37																						
	Também (Curcio, 1997) ... considera que a generalização ultrapassa o simples reconhecimento de padrões e muitas vezes envolve conceitos de multiplicação e também de proporção .		38																						

6.5.2. Indique dois motivos para a sua escolha:			
6.6. Qual a intenção com que coloca problemas simples de “juntar e retirar”? Assinale com os números 1,2, ... cada uma das opções seguintes, de acordo com a ordem pela qual o costuma fazer (não é obrigatório referir-se a todas). Acrescente o que considerar pertinente na sua explicação. ☐ Exercícios de preenchimento de lacunas ☐ Algoritmos ☐ Cálculo mental ☐ A subtracção como sendo o inverso de adição ☐ Contagem pelos dedos	Identificar capacidades que são estimuladas nos alunos quando se trabalham as operações de adição e subtracção	Quadro 12. Aspectos chave no desenvolvimento do sentido de número segundo (Gonçalves, 2008) Contagem de objectos de forma sincronizada Compreensão do significado de valor de posição Compreensão das propriedades das operações Desenvolvimento de estratégias de cálculo Também (Brocardo, Delgado, Mendes, Castro, Serrazina, & Rodrigues, n.d.) partilham desta mesma opinião ao afirmar que “O desenvolvimento do sentido do número surge muito associado à aquisição de destrezas de cálculo mental, porque essas destrezas requerem um bom conhecimento e compreensão dos números e das relações entre eles.” (p.18). Estes problemas, ao relacionarem-se com a vivência dos alunos ajudam-nos a direccionar os seus conhecimentos e métodos informais para a sua resolução, atribuindo assim um significado real a tais operações: a adição surgirá associada a situações de acrescentar, e a subtracção a situações de retirar ou separar.	98 100 101
6.7. Qual a intenção com que coloca problemas simples de “multiplicar e dividir”? Assinale com os números 1,2, ... cada uma das opções seguintes, de acordo com a ordem pela qual o costuma fazer (não é obrigatório referir-se a todas). Acrescente o que considerar pertinente na sua explicação. ☐ Exercícios de preenchimento de lacunas ☐ Algoritmos ☐ Cálculo mental ☐ A divisão como sendo o	Identificar capacidades que são estimuladas nos alunos quando se trabalham as operações de multiplicação e divisão		

inverso da multiplicação () Contagem pelos dedos			
6.8. Na Matemática, atribui maior importância à realização de <u>exercícios de mecanização</u> ou à resolução de <u>problemas</u> ? Acrescente o que considerar pertinente na sua explicação.	Perceber qual a importância relativa que o docente atribui a exercícios de mecanização e à resolução de problemas	Relativamente às operações com os números, (Brocardo, Delgado, Mendes, Castro, Serrazina, & Rodrigues, n.d.) acrescenta que não só os números mas também as operações de adição e subtração devem surgir inseridas na resolução de problemas da vida real. No que toca ao desenvolvimento da capacidade de verbalização, o educador tem neste processo um papel fundamental, não só através da natureza das tarefas que propõe, mas também através do tipo de interação que estabelece com as crianças durante a sua realização. O educador deve incentivá-las a verbalizarem as suas acções e desafiá-las com questões que as ajudem a explicar o que vão observando nas suas experiências e a relacioná-las com outras experiências (Mendes & Delgado, Geometria: Textos de Apoio para Educadores de Infância, 2008).	101 111

QUADRO VII – Grupo 7 de questões do Guião de Entrevista, seus objectivos e fundamentação teórica

QUESTÕES	OBJECTIVOS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	PÁG.
7. Relações Geometria//Álgebra e Generalizações, representações/Álgebra			
7.1. O Programa de Matemática em vigor do ME, refere que os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam padrões geométricos. Dê dois exemplos de actividades que já tenha realizado com os seus alunos sobre esta temática, que considere relevantes.	Perceber como o docente trabalha os padrões geométricos com os alunos	Os três últimos autores referidos, Ginsburg, Poulos e Kieran defendem o início do estudo de padrões a partir dos 4 e 5 anos de idade. São remetidas para mais tarde, a generalização de padrões, por Poulos, o aumento da complexidade de padrões simples, por Cox e a simbolização formal dos padrões, por Kieran. A reiterar a ideia, de que os padrões unificam o universo Matemático, temos (Steen, 1998), que afirma que os padrões não só envolvem os alunos em todas as áreas da Matemática: Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade ou Estatística, como também em todos os tipos de actividades matemáticas, mais concretamente em actividades como: Reconhecer, Visualizar ,Verbalizar, Simbolizar ,Analisar . Existe um documento bastante recente (com data original de 2002 mas revisto em 2010) que resultou de uma tomada de posição conjunta entre a NAEYC (National Association for the Education of Young Children) e o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) intitulado Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings (Stone-MacDonald, 2011), no qual se encontram exemplos de habilidades que são adequadas desenvolver em crianças entre os três e os seis anos, na área curricular de Padrões/Pensamento Algébrico: avisos e cópias simples de padrões repetitivos, como uma parede de blocos de longo, curto, longo, curto, longo, curto, longo. (Borrinho & Barbosa, Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões, n.d.) defendem que a interacção dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado pois irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na aprendizagem e permite pensar no estudo da Álgebra desde o pré-escolar.	54 54 72 105
7.2. Perante o clássico problema “5 amigos vão	Averiguar a possibilidade de que os	Muitas vezes as ideias complexas necessitam de períodos prolongados de tempo, de dias, semanas, meses, até anos para produzir pensamento nas crianças (Blanton, Teaching Practices That	

cumprimentar-se entre si com um aperto de mão. Quantos apertos de mão serão dados no final?”, como proporia aos seus alunos que fosse explorado?	docentes efectuem actividades de generalização com os seus alunos	Develop Children’s Algebraic Thinking Skills, 2008). Por exemplo, no clássico Problema dos Apertos de Mão “5 amigos vão cumprimentar-se entre si com um aperto de mão. Quantos apertos de mão serão dados no final?”, a capacidade do aluno descrever uma relação simbólica entre o número de pessoas no grupo e o número de apertos de mão entre os elementos do grupo pode levar algum tempo, como explica este investigador. Tempo esse que dependerá da idade e experiência desses alunos. Segundo a sua experiência, neste tipo de tarefas as crianças aprendem a usar ferramentas (de representação) como: tabelas de funções, interpretação de correspondências e relações nos dados, entendimento das quantidades que variam e desenvolvimento de linguagem matemática para simbolizar relações funcionais. Segundo (Ameron, 2003), a ruptura entre a Aritmética e Álgebra prende-se com o tipo de abordagem praticada durante a resolução de problemas, uma vez que, problemas aritméticos podem ser resolvidos directamente, através de respostas directas, enquanto que problemas algébricos terão necessariamente que se traduzir para uma linguagem e representação formais, e só depois resolvidos. (Ponte, Branco, & Matos, Álgebra no Ensino Básico, 2009) referem-se ao pensamento algébrico incluindo três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas.	59 47 95

QUADRO VIII – Grupo 8 de questões do Guião de Entrevista, seus objectivos e fundamentação teórica

QUESTÕES	OBJECTIVOS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	PÁG.
8.Recursos Didáticos e Tecnológicos			
8.1. Qual o nome, autores e editora do manual escolar que utilizou no último ano de docência?	Identificar o manual escolar de Matemática utilizado		
8.2. Com que frequência recorre ao Manual? () Raramente () Com frequência moderada () Muito frequentemente	Conhecer a frequência com que o seu manual escolar de Matemática é utilizado	Outros estudos, como o que foi desenvolvido por (Moreira, Ponte, Pires, & Teixeira, Manuais Escolares: Um ponto de situação, 2006) centram-se mais nos modos como o manual escolar é usado pelos professores. Segundo (Viseu, Fernandes, & Gonçalves, 2009), o manual escolar, em geral, e o de matemática, em particular, constitui um auxiliar imprescindível no processo de ensino-aprendizagem ao servir de mediador da comunicação matemática entre o professor e o aluno, quer ao nível dos conteúdos a abordar, quer no que respeita às tarefas a desenvolver. A reitar esta ideia, temos (Pires M. , 2009), ao dizer-nos que o manual escolar é o material mais utilizado nas salas de aula, podendo influenciar o que professores e alunos pensam e fazem.	139 138 139
8.3. Identifique nele dois atributos	Conhecer o que o docente valoriza no seu manual de Matemática		
8.4. Identifique nele dois defeitos	Conhecer o que o docente desvaloriza no seu manual de Matemática		
8.5. Os conteúdos encontram-se em progressão? () Sim	Conhecer a opinião que o docente faz da progressão dos conteúdos no seu manual de Matemática		

() Não			
8.6. Considera que o manual que utilizou introduz o Pensamento Algébrico nos alunos... () Sim, de modo informal () Sim, de modo formal () Não	Conhecer a opinião que o docente faz do manual de Matemática, relativamente à introdução do Pensamento Algébrico		
8.7. Além do manual identifique outros recursos didáticos/tecnológicos a que costume recorrer para o ensino da Álgebra/Pensamento Algébrico:	Identificar recursos didáticos, além do manual, a que o docente recorra para introduzir Pensamento Algébrico nos seus alunos	Os estudos realizados sobre os modos como os professores usam o manual escolar, diz a(APM, 1998), confirmarem que este constitui um recurso de trabalho de grande importância. Esta Associação acrescenta que no essencial, os professores parecem usar o manual escolar sobretudo como fonte de tarefas para realizar na aula e como trabalho de casa	139

QUADRO IX– Grupo 9 de questões do Guião de Entrevista, seus objectivos e fundamentação teórica

QUESTÕES	OBJECTIVOS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	PÁG.
9.Prática Pedagógica			
9. Identifique três parâmetros em que sinta desfasamento entre a sua formação académica e a sua prática docente na área da matemática.	Conhecer parâmetros de desfasamento que o docente identifique entre a sua formação académica e a sua prática docente	Visando a aquisição de competências profissionais para a actividade profissional, (Ponte, A Vertente Profissional da Formação Inicial da Professores de Matemática, 2002) detalha as cinco metas a atingir na Formação Inicial (referidas na página anterior pelo Decreto-Lei 344/89 de 11 de Outubro) : a formação pessoal, social e cultural dos futuros docentes, a formação científica, tecnológica, técnica ou artística na respectiva especialidade, a formação no domínio educacional, as competências de ordem prática e as capacidades e atitudes de análise crítica, de inovação e de investigação pedagógica.	119

APÊNDICE D – Pedido de colaboração para desenvolvimento de um projecto de Investigação

Exmo. Sr. Director do
Agrupamento de Escolas ...

Ana Sofia Rézio
Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias (ULHT)
Instituto de Educação
Programa de Doutoramento em Educação (Matemática)

**ASSUNTO: PEDIDO DE COLABORAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DE UM
PROJECTO DE INVESTIGAÇÃO**

Encontro-me a desenvolver um Projecto de Investigação que visa a preparação do Doutoramento em Educação, especialidade em Educação Matemática, a apresentar na ULHT, sob orientação da Professora Doutora Maria da Glória Ramalho.

Este projecto trata o desenvolvimento do Pensamento Matemático de alunos do 1ºCiclo (em particular, do Pensamento Algébrico) e através da Psicologia da Aprendizagem da Matemática, tenta compreender as potencialidades cognitivas destes alunos perante certas especificidades do desenvolvimento do seu pensamento, bem como, perceber de forma empírica, quais as concepções que os professores do 1ºciclo têm sobre elas e como estas se reflectem na sua prática docente.

Para cumprir com o objectivo deste trabalho necessito entrevistar presencialmente docentes do 1ºciclo, dos diferentes níveis de escolaridade de Escolas Básicas do 1ºciclo.

Gostaria muito de poder contar com a Vossa colaboração partilhando a crença de que através da investigação científica se conseguem alcançar pequenos avanços, que para nós docentes nos vão permitindo melhorar a nossa prática docente e também a reformulação de orientações curriculares, contribuindo para o aumento do sucesso do Ensino-Aprendizagem da Matemática, daí decorrendo a importância da Vossa participação.

O anonimato dos professores entrevistados é totalmente garantido na apresentação dos resultados da investigação e estes ser-vos-ão dados a conhecer.

Agradecendo desde já a atenção que me foi dispensada.

Ana Sofia Rézio
Docente de QZP do grupo 500
4/Setembro/2012
Tlm: 964037931
e-mail: sofiareszio@hotmail.com

APÊNDICE E – Base se dados das entrevistas aos docentes do 1ºciclo

Questão 1.1. - formação

cat_1	apenas lic_ensino
cat_2	lic_ensino+PFCM
cat_3	lic_ensino+pós-grad/outra lic
cat_4	lic_ensino+PFCM+pós-grad/outra lic
cat_5	lic_ensino+outra form cred mat
cat_6	lic_ensino+outra form cred mat+pós-grad/outra lic

Nº. Quest	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*	*		*				*	*					*					*							*		*									*				*	*	*		*		*	*		
cat_2											*		*		*	*	*		*				*			*		*			*		*																	
cat_3			*		*		*			*		*						*						*										*		*	*				*									
cat_4						*														*					*					*					*															
cat_5																					*												*	*				*	*											
cat_6																																												*		*				

Questão 1.2. - formação académica específica em mat -disciplinas...

cat_1	mat+didat
cat_2	didat
cat_3	mat+didat+PFCM
cat_4	didat+PFCM
cat_5	mat+PFCM

Nº. Quest	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1		*	*	*	*		*	*	*			*	*	*				*		*	*	*	*		*							*		*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_2	*									*																		*		*																				
cat_3											*				*	*	*		*			*				*		*		*	*																			
cat_4						*																			*											*														
cat_5																																	*				*													

Questão 2.1. - experiência de docência (em anos)

cat_1 0-4
 cat_2 5-9
 cat_3 10-19
 cat_4 20-29
 cat_5 30 ou +

Nº. Quest	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1		*	*																																					*					*					
cat_2				*	*																			*						*								*	*	*						*		*	*	
cat_3	*						*		*	*	*	*				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_4													*	*							*									*																				
cat_5					*		*								*												*		*				*					*	*											

Questão 3.1. - Conceção de Álgebra

cat_1 numeros
 cat_2 numeros+geometria
 cat_3 numeros+operações
 cat_4 numeros+simbolos
 cat_5 numeros+relações

cat_6 equações
 cat_7 geometria
 cat_8 "não respondeu"
 cat_9 raciocínio
 cat_10 problemas

cat_11 numeros+operações+probl+equações
 cat_12 numeros+raciocínio

respostas + proximas
 prof do PFCM

obs: assinalado a verde os que importa ouvir

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1		*		*			*				*	*	*			*	*	*		*					*	*	*		*			*		*	*		*	*						*		*	*	*		
cat_2	*														*											*	*	*																						
cat_3			*					*		*											*	*		*							*			*					*	*				*	*					
cat_4					*																												*																	
cat_5						*																						*															*	*						
cat_6								*																					*																					
cat_7														*																																				
cat_8																			*																								*							
cat_9																						*																												
cat_10																										*																								
cat_11																																			*								*							

Questão 3.2. - exs actividades q desenvolvem PA

obs: assinalado a verde os que importa ouvir

cat_1 representações(ex:graficos,tabelas, dados)
 cat_2 calculo mental
 cat_3 sentido nº.
 cat_4 resol probl
 cat_5 verbalização

cat_6 generalização
 cat_7 res equações
 cat_8 regularidades

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*		*	*	*		*		*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_2		*	*		*					*															*		*							*				*								*	*			
cat_3		*				*	*	*		*					*		*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_4	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_5			*	*	*	*	*	*		*	*	*	*		*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_6			*			*							*	*			*					*	*				*				*			*		*	*													
cat_7														*															*			*																		
cat_8														*									*	*				*			*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Questão 4. - idades/modos iniciação ao PA**obs:** assinalado a verde os que importa ouvir

cat_1 bebés

cat_2 infantil(3/4 anos)

cat_3 pré-escolar

cat_4 1ºano

cat_5 2ºano

cat_6 3ºano

cat_7 manipular objectos

cat_8 sentido numero

cat_9 res probl quotid

cat_10 verbalização raciocinio

cat_11 desenhar

cat_12 pens abstracto

cat_13 calculo mental

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
cat_1			*					*													*																					*									
cat_2		*			*		*								*	*		*			*				*		*					*	*	*	*	*		*				*	*								
cat_3	*					*			*	*	*	*		*				*		*		*				*		*			*	*					*		*									*			
cat_4				*																				*				*	*												*	*		*	*						
cat_5																																															*				
cat_6																																												*							
cat_7			*			*		*						*	*						*																						*								
cat_8	*	*		*	*		*		*	*	*	*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
cat_9		*							*	*	*	*			*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
cat_10																								*				*													*	*		*							
cat_11																																*												*							
cat_12																																							*												
cat_13																																																	*		

Questão 5.1. - representação ou cálculos e motivos

cat_1 escolhe_representação
 cat_2 escolhe_cálculos
 cat_3 raciocínio
 cat_4 promove os cálculos
 cat_5 verbalização
 cat_6 compreensão enunciados
 cat_7 ambas (cálculo e representação)
 cat_8 independente da representação

obs: assinalado a verde os que importa ouvir

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_2																																											*		*	*	*	*	*	
cat_3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_4		*						*				*		*								*		*															*		*									
cat_5				*	*	*	*									Λ*																			*		*													
cat_6											*		*														*					*	*										*							
cat_7																														*																				
cat_8																																											*							

Questão 5.2. - importância da representação

cat_1 valor (médio) atribuído na opção a)
 cat_2 valor (médio) atribuído na opção b)
 cat_3 valor (médio) atribuído na opção c)

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	med
cat_1	2,5	1,0	5,0	3,5	4,0	3,0	10,0	8,5	4,0	1,0	2,5	5,0	10,0	7,0	5,0	5,0	3,5	2,0	5,0	9,0	10,0	8,5	3,5	2,0	8,0	3,0	4,0	0,0	1,0	5,0	4,0	2,0	1,0	2,5	5,0	5,0	8,5	5,0	2,0	0,0	5,0	2,0	1,0	6,0	10,0	5,0	3,0	3,0	3,0	3,0	4,4
cat_2	5,0	9,0	5,0	7,5	9,0	5,0	8,0	9,0	6,0	8,0	7,0	8,0	8,0	7,0	8,0	9,0	9,0	8,0	9,0	8,0	8,0	9,0	6,5	9,3	9,0	9,0	7,0	8,0	8,5	6,0	8,0	6,5	7,0	8,5	7,0	10,0	5,0	8,0	5,0	3,0	9,5	8,0	8,0	8,0	5,0	9,0	8,0	8,0	7,0	8,0	7,6
cat_3	10,0	6,0	6,5	10,0	9,0	5,0	9,0	7,0	4,0	5,0	5,0	8,0	6,5	6,0	8,0	7,0	9,0	8,0	9,0	10,0	8,0	7,0	6,5	7,3	9,0	8,0	7,0	6,0	7,0	6,0	5,0	6,5	7,0	7,0	5,0	10,0	3,5	5,0	5,0	6,0	9,0	5,0	6,5	7,0	5,0	5,0	5,0	6,0	5,0	7,0	6,8

Questão 5.3. - significado do sinal de igual

cat_1 decomposição de um número (ex: $10=5+4+1$)
 cat_2 escrita ordenada de n.º.s
 cat_3 exercícios de comparação ($>$, $<$, $=$)
 cat_4 como resultado de operação
 cat_5 unidades de medida (ex: $1m=100cm$)
 cat_6 relação equivalência (ex: $4+3=5+2$)
 cat_7 correspondência quantidade/n.º
 cat_8 números decimais (ex: $2,3=2,30$)
 ou frações ($1/2=2/4$)

obs: assinalado a verde os que importa ouvir

Nº. Que	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat 1	*					*					*	*									*						*						*																	
cat 2	*																																																	
cat 3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			*		*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat 4		*	*		*	*	*	*	*	*	*	*			*		*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat 5		*																				*												*		*														
cat 6				*	*		*					*	*	*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat 7									*	*						*	*															*	*			*		*		*				*						
cat 8																*											*												*											

Questão 6.1 - sequencias numericas

cat_1 frisos
 cat_2 continuar termos seguintes
 cat_3 contagens de 2/2.....
 cat_4 ordenar numeros
 cat_5 os alunos criam uma sequencia

cat_6 preencher lacunas na seq
 cat_7 reconhecer e verbalizar o padrao gerador
 cat_8 generalização
 cat_9 "não conseguiu responder"

obs: assinalado a verde os que importa ouvir

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*									*				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_2	*		*						*				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_3		*			*	*		*	*	*	*	*				*				*		*		*		*		*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_4		*		*		*	*					*														*			*						*								*			*				
cat_5			*						*						*																															*				
cat_6			*	*			*	*	*		*		*		*		*	*	*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_7				*	*	*			*	*		*		*		*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_8													*										*			*			*				*					*				*								
cat_9													*							*					*			*				*					*													

Questão 6.2 - proporcionalidade

obs: assinalado a verde os que importa ouvir

cat_1	calculo ingredientes de um bolo	cat_6	rel 2 var(no%alunos/copos sumo)	cat_9	dobros,metades,triplos, terça partes-altura/volume
cat_2	peso/alt	cat_7	numeros decimais/fracções	cat_10	planta sala à escala
cat_3	dobros,metades,triplos, terça partes-tabuada	cat_8	medidas capacidade, comprimento,....	cat_11	"não respondeu"
cat_4	dobros,metades,triplos, terça partes-pizza				
cat_5	dobros,metades,triplos, terça partes (ex:cuisinaire)				

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*			*						*												*																												
cat_2	*																*																																	
cat_3		*																																																
cat_4			*							*											*		*													*														
cat_5			*														*												*				*					*						*						
cat_6				*			*		*				*									*		*					*	*	*			*	*		*				*									
cat_7					*																*			*					*																					
cat_8								*															*						*							*										*	*			
cat_9														*																																				
cat_10																																	*																	
cat_11				*			*			*	*				*	*	*	*	*	*						*	*	*					*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		

Questão 6.3., 6.4. - Aritmetica/algebra

obs: assinalado a verde os que importa ouvir

cat_1 1ªalgebra dps aritmetica
 cat_2 ambas em paralelo
 cat_3 probl c + q 1 passo
 cat_4 encontrar estrategias
 cat_5 formas representação

cat_6 calculo mental
 cat_7 divisão
 cat_8 escrever ling mat
 cat_9 compreensao enunciado
 cat_10 nªs decimais

cat_11 verbalização raciocinio
 cat_12 generalização
 cat_13 abstração(ex:visualização 3D, concretizar c objectos)
 cat_14 estimativas "a olho"
 cat_15 ordens do numero ex:(10 unid=1 dezena)

cat_16 reduções (medidas capacidades)
 cat_17 algoritmos (c nªs maiores)
 cat_18 angulos
 cat_19 utilização parentesis
 cat_20 reconhecer padroes
 cat_21 "não responde"

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1																																																		
cat_2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_3	*																	*									*			*							*													
cat_4	*															*				*								*		*		*	*	*	*	*			*								*			
cat_5	*			*						*						*													*		*		*	*	*	*	*			*									*	
cat_6		*					*							*														*		*		*							*											
cat_7		*																																																
cat_8			*																				*									*																		
cat_9			*									*						*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_10			*			*															*							*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_11				*					*	*	*	*										*				*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_12				*																																					*	*								
cat_13					*		*	*	*	*	*	*					*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_14				*																																														
cat_15				*	*										*												*																							
cat_16							*						*																																					
cat_17							*						*	*			*				*			*							*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_18																			*				*																											
cat_19																															*																			
cat_20																																																		
cat_21																																							*											

Questão 6.5 - foco PA

obs: assinalado a verde os que importa ouvir

cat_1 estrut Aritmetica
 cat_2 Op cm Funções
 cat_3 Generalização
 cat_4 do concreto p abstracto
 cat_5 agilidade estratégias resolução/raciocinio

cat_6 descobrir relações
 cat_7 trabalhar propriedades/conceitos
 cat_8 encontrar regularidades
 cat_9 fomenta verbalização raciocinio
 cat_10 escolhe todas as 3 opções

cat_11 trabalho no concreto
 cat_12 não apresenta motivos
 cat_13 imp p provas aferição
 cat_14 permite contextualizar
 cat_15 fazer representações

cat_16 decomposição nºs
 cat_17 interpretação dados

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*									*				*	*					*							*				*						*						*	*						
cat_2				*		*						*	*			*			*		*	*	*	*		*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_3		*	*		*		*	*			*						*	*						*		*															*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_4	*		*								*			*	*																													*		*				
cat_5	*				*		*					*		*		*	*			*	*	*	*	*	*	*				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_6		*		*												*				*									*											*		*								
cat_7		*									*			*		*	*						*					*								*	*													
cat_8		*	*				*								*		*	*															*		*						*	*								
cat_9					*	*					*			*																																				
cat_10									*																							*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_11									*																		*									*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_12								*	*				*					*					*																					*						
cat_13													*																*																					
cat_14																					*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_15																							*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_16																										*																								*
cat_17																																*																		

Questão 6.6.-juntar/retirar

cat_1	4.1.3.2.5	cat_6	3.4.5.2.1	cat_11	4.2.3.5.1	cat_15	4.3.2.5.1	cat_20	1.5.2.4.3	cat_25	5.2.3.4.1
cat_2	3.5.1.2.4	cat_7	2.5.3.4.1	cat_12	1.4.2.3.5	cat_16	2.4.3.5.1	cat_21	2.3.4.5.1	cat_26	5.2.1.4.3
cat_3	4.5.2.3.1	cat_8	3.5.2.4.1	cat_13	5.3.1.4.2	cat_17	3.5.1.4.2	cat_22	2.5.4.3.1	cat_27	4.3.1.5.2
cat_4	2.5.1.3.4	cat_9	2.5.1.4.3	cat_14	2.4.1.3.5	cat_18	5.3.2.4.1	cat_23	3.2.5.4.1	cat_28	2.4.1.3.5
cat_5	4.5.3.2.1	cat_10	4.5.1.3.2			cat_19	1.5.3.4.2	cat_24	3.4.2.5.1	cat_29	5.4.2.3.1

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*																																																	
cat_2		*		*																																														
cat_3			*			*				*		*																								*														
cat_4					*																																													
cat_5																*																																		
cat_6							*															*														*														
cat_7								*			*				*							*					*									*											*			
cat_8								*					*									*		*			*		*		*		*				*							*						
cat_9																	*																																	
cat_10																		*																																
cat_11																			*																						*									
cat_12																				*																														
cat_13																					*																													
cat_14																						*																												
cat_15																								*															*											
cat_16																							*																					*						
cat_17																								*				*							*															
cat_18																									*				*																				*	
cat_19																												*																						
cat_20																																		*							*									
cat_21																																					*													
cat_22																																						*												
cat_23																																							*											
cat_24																																										*					*			
cat_25																																													*					

Questão 6.7.-multiplicar e dividir

[illegible]

Questão 6.8.-mecan/res probl**obs:** assinalado a verde os que importa ouvir

cat_1 res probl
 cat_2 exs mecanização
 cat_3 desenvolve raciocínio
 cat_4 implica estratégias de + q 1 passo
 cat_5 mobiliza conceitos

cat_6 des análise critica
 cat_7 atrib significados/contextualizar
 cat_8 estrat representação
 cat_9 des abstracção
 cat_10 engloba calculo mental/operações

cat_11 promove verb raciocínio
 cat_12 promove compreensão enunciado
 cat_13 importancia do treino
 cat_14 ambas
 cat_15 não explica

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50			
cat_1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
cat_2																		*																											*								
cat_3	*	*		*			*	*	*	*			*						*							*	*	*					*	*	*	*			*	*	*		*		*	*	*		*	*			
cat_4	*				*									*	*					*	*			*					*	*	*		*	*	*		*				*		*	*			*	*	*				
cat_5		*	*					*	*	*			*							*	*		*	*				*			*	*				*					*	*			*	*			*	*			
cat_6			*					*																												*																	
cat_7				*			*												*			*			*						*			*	*		*										*			*			
cat_8				*																																																	
cat_9				*																																																	
cat_10					*							*			*	*				*			*		*					*	*						*				*				*	*	*	*	*				
cat_11							*					*						*												*																							
cat_12									*										*			*		*		*	*			*	*					*	*			*		*		*			*						
cat_13																	*																																				
cat_14																																									*												
cat_15					*																*																													*			

Questão 7.1.-Relação Geometria/Álgebra**obs:** assinalado a verde os que importa ouvir

cat_1 descrição de sólidos/propriedades
 cat_2 colares de contas
 cat_3 id o padrão (verb)
 cat_4 reconhecer padrões vida real
 cat_5 continuar seq geom (1 var/2var)

cat_6 criar seq geom/friso
 cat_7 frisos_transf geom
 cat_8 frisos_completar
 cat_9 tangram(composição fig)
 cat_10 lacunas seq geom

cat_11 blocos lógicos
 cat_12 geoplano(des fig geom)
 cat_13 não respondeu

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*			*	*					*							*	*																													*			
cat_2		*							*								*	*																																
cat_3		*							*			*														*			*				*								*		*		*					
cat_4			*										*													*			*					*													*			
cat_5			*				*	*	*		*								*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
cat_6			*			*		*				*	*	*	*	*					*	*		*	*		*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
cat_7			*																												*	*		*	*			*		*		*		*		*		*		
cat_8						*											*	*	*	*			*	*						*	*			*	*			*		*		*		*		*		*		
cat_9									*												*									*																*		*		
cat_10										*																																								
cat_11																	*																	*	*															
cat_12				*	*																*									*					*															
cat_13																											*																							

Questão 7.2.-Relação Generalizações, Representações/Álgebra

cat_1 concretização
 cat_2 formas de representação ex:tabelas, desenhos, correspondências, algoritmos
 cat_3 discussão estratégias ou resultados
 cat_4 generalização

cat_5 não explicou

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*	*	*	*	*		*	*		*		*	*		*			*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*		*		*		*		*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_4				*	*								*							*							*												*	*	*	*	*	*	*	*	*			
cat_5				*																																					*									

Questao 8.1.-Manuais escolares

Categorias (Ano de Escolaridade)	Subcategorias (Nome do Manual)	Valor Absoluto	Valor Relativo
1ºano	A Grande Aventura	6	12%
	A Pasta Mágica	2	4%
	Tagarelas	1	2%
	Uma Aventura	1	2%
2ºano	A Grande Aventura	9	18%
	A Carochinha	1	2%
	Outros (Desafios, Alfa, Tagarelas, O Quadrado Mágico)	4	8%
3ºano	A Pasta Mágica	3	6%
	A Grande Aventura	2	4%
	Outros(O Segredo dos Números, Tagarelas, O Mundo da Carochinha)	3	6%
4ºano	A Grande Aventura	4	8%
	A Pasta Mágica	2	4%
	Outros(Alfa, Tagarelas)	2	4%

Questão 8.2._freq utiliz manual

obs: assinalado a verde os que importa ouvir

cat_1 raramente
cat_2 c frequencia moderada
cat_3 mto frequentemente

n usam manual

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1																		*																						*										
cat_2										*					*	*	*					*						*				*					*				*									
cat_3	*					*			*		*	*	*						*	*		*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

2
9
29

obs: assim rosa quem n usa manual

cat_1	não é denso	cat_6	claro	cat_11	act ludicas	cat_16	estim autonomia dos alunos	cat_22	mtas estrategia:
cat_2	exmos do quotidiano	cat_7	conexoes entre materias	cat_12	visual apelativo	cat_17	diversidade estrategias		em simultaneo
cat_3	mtos/diversos exs	cat_8	estimula raciocinio	cat_13	exercicios em contexto	cat_18	1ºexemplos dps conceitos		
cat_4	consonante c programa	cat_9	prepara p exames	cat_14	personagens q acompanham tds os anos de esc	cat_19	organizado	cat_23	poucos problerr
cat_5	caderno apoio (registos)	cat_10	mtos problemas	cat_15	historia da mat	cat_20	promove discussao entre alunos		
						cat_21	linguagem + formal		

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*																																								*									
cat_2	*																																																	
cat_3						*		*		*	*		*															*	*						*				*	*			*	*						
cat_4						*																					*									*				*						*	*			
cat_5						*											*																																	
cat_6							*																																											
cat_7																																																		
cat_8								*			*											*	*	*	*	*			*						*								*	*						
cat_9							*																																											
cat_10									*								*				*	*	*	*	*				*		*		*		*						*									
cat_11									*																																									
cat_12								*	*		*	*					*	*	*		*							*	*	*	*	*			*				*			*		*						
cat_13										*		*		*										*			*		*						*	*											*			
cat_14											*									*							*					*																		
cat_15														*																																				
cat_16															*																			*																
cat_17																		*						*										*										*						
cat_18																												*						*													*			
cat_19																															*		*					*								*				
cat_20																																*																		
cat_21																																							*	*										
cat_22																																											*							

obs: assim rosa quem n usa manual ou n identificou defeitos

cat_1	mtos mat acessorio	cat_6	não poderem escrever no manual	cat_11	mtos exs mecanização	cat_16	poucos exs treino	cat_22	mtas estrategias
cat_2	exs dificeis	cat_7	demasiado simples	cat_12	descontextual exs	cat_17	exige mta abstracção		em simultaneo
cat_3	não promove autonomia alunos	cat_8	mto grande	cat_13	difficuldade não gradual	cat_18	poucas act manuseamento		
cat_4	denso	cat_9	difficil compreensão enunciados	cat_14	visual pouco atractivo	cat_19	falha propr operações	cat_23	poucos problemas
cat_5	não promove trab c pais	cat_10	má distribuição quantidade/tema	cat_15	mto repetitivo	cat_20	fraca articulação entre temas		
						cat_21	falha apresentação conceitos		

[illegible]

Questão 8.5.-conteudos em progressao

obs: assim rosa quem n usa manual

cat_1 sim
 cat_2 não/nem sp

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*					*			*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*		*	*			*	*		*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
cat_2																											*	*			*				*															

36

4

Questão 8.6.-introd PA

cat_1 sim, informal
 cat_2 sim, formal
 cat_3 não

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1	*					*			*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*		*	*		*			*	*		*		*		*		*		*		*		*	*	*	*	*	*		
cat_2						*			*																	*	*			*		*		*		*		*	*		*	*	*	*	*	*	*	*		
cat_3						*			*						*																			*				*								*				

27

13

3

Questão 8.7.-outros recursos

prof do PFCM

cat_1	mat_construidos	cat_6	suportes vidareal(talao supermercado)	cat_11	jogos(puzzles,etc)
cat_2	mat_manipulaveis	cat_7	Programa ME	cat_12	actividades da FCM
cat_3	software esp(esc virtual, magalhaes)	cat_8	outros manuais	cat_13	fichas DGIDC
cat_4	internet geral	cat_9	outros livros	cat_14	brochuras
cat_5	site especifico	cat_10	fichas conbstruidas p prof	cat_15	provas aferição

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1					*										*								*											*								*		*						
cat_2	*		*	*	*	*		*	*		*	*	*		*		*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_3			*	*			*		*					*		*				*				*						*	*			*	*					*	*			*	*	*		*		
cat_4	*									*	*		*		*				*		*		*		*		*		*	*			*	*			*				*		*		*		*			
cat_5									*	*		*										*							*	*			*																	
cat_6						*																																												
cat_7		*	*	*																								*																						
cat_8	*		*	*	*		*		*	*	*			*		*		*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
cat_9		*	*	*	*		*		*	*			*											*						*	*			*	*			*	*			*	*			*	*	*	*	
cat_10	*	*	*	*	*		*			*				*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
cat_11						*	*		*				*									*				*									*	*						*								
cat_12							*												*		*		*				*																							
cat_13																								*					*																					
cat_14																									*			*																						
cat_15																												*																*						

Questão 9. - desfasamento form/pratica

cat_1 burocracia escola
 cat_2 relação pedagogica c alunos
 cat_3 defice didactico
 cat_4 defice científico
 cat_5 unid curricul sem aplicação
 cat_6 descontext dos temas tratados
 cat_7 alg necessid especif dos alunos(NEE, ritmos aprend dif)
 cat_8 nenhuma

cat_9 leccionar seg novo programa
 cat_10 org/planif aulas

prof do PFCM

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1																											*			*								*												
cat_2	*											*																												*	*									
cat_3					*	*				*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
cat_4	*				*	*		*		*		*		*				*		*		*		*								*				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
cat_5		*													*			*		*												*			*	*		*	*											
cat_6		*																																																
cat_7			*	*																										*		*					*	*												
cat_8	*					*							*								*							*												*					*					
cat_9								*		*								*			*																													
cat_10																																												*	*					

Questão 10. - provas aferição tema com menor qualidade desempenho

cat_1 nºs operações
 cat_2 geometria medida
 cat_3 org trat dados

Nº. Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
cat_1									*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_2																																						*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
cat_3	*					*	*	*																																										

20
13
4

ANEXOS

ANEXO A - Grelha de registo de apreciação de manuais da DGIDC

ANEXO B - Grelha de avaliação de manuais escolares de matemática, do 1ºCiclo, construída por Carol Knight

ANEXO A - Grelha de registo de apreciação de manuais da DGIDC

Critérios de Apreciação de manuais escolares ainda não submetidos a avaliação e certificação				
Ano de escolaridade:				
Área disciplinar/Disciplina:				
Título do manual:				
Editora:				
		Sim		Não
1. Organização e Método		Muito Bom	Bom	Suficiente
1.1.	Apresenta uma organização coerente e funcional, estruturada na perspectiva do aluno			
1.2.	Desenvolve uma metodologia facilitadora e enriquecedora das aprendizagens			
1.3.	Estimula a autonomia e a criatividade			
1.4.	Motiva para o saber e estimula o recurso a outras fontes de conhecimento e a outros materiais didácticos			
1.5.	Permite percursos pedagógicos diversificados			
1.6.	Contempla sugestões de experiências de aprendizagens diversificadas, nomeadamente de actividades de carácter prático/experimental			
1.7.	Propõe actividades adequadas ao desenvolvimento de projectos interdisciplinares			
2. Informação				
2.1.	Adequa-se ao desenvolvimento das competências definidas no currículo do respectivo ano e/ou nível de escolaridade			
2.2.	Responde aos objectivos e conteúdos do Programa/Orientações curriculares			
2.3.	Fornecer informação correcta, actualizada, relevante e adequada aos alunos a que se destina			
2.4.	Explicita as aprendizagens essenciais			
2.5.	Promove a educação para a cidadania			
2.6.	Não apresenta discriminações relativas a sexos, etnias, religiões, deficiências			
3. Comunicação				
3.1.	A concepção e a organização gráfica (1) do manual facilitam a sua organização e motivam o aluno para a aprendizagem			
3.2.	Os textos são claros, rigorosos e adequados ao nível de ensino e à diversidade dos alunos a que se destinam			
3.3.	Os diferentes tipos de ilustrações (2) são correctos, pertinentes e relacionam-se adequadamente com o texto			
(1)	Caracteres tipográficos, cores, destaques, espaços, títulos e subtítulos, etc.			
(2)	Fotografias, desenhos, mapas, gráficos, esquemas, etc.			
4. Características materiais				
4.1.	Apresenta robustez suficiente para resistir à normal utilização			
4.2.	O formato, as dimensões e o peso do manual (ou de cada um dos seus volumes) são adequados ao nível etário do aluno			
4.3.	Permite a reutilização			

ANEXO B - Grelha de avaliação de manuais escolares de matemática, do 1ºciclo, construída por Carol Knight

Prince William County Schools Elementary Textbook Adoption Form

Reviewer's Name _____ School _____ Position _____

Textbook _____ Grade Level _____

Prince William County Mathematics Vision Statement

Prince William County Schools mathematics program promotes an environment in which students develop a comprehensive and enduring understanding of the concepts of mathematics. Students learn to effectively apply these concepts and use a variety of problem solving strategies. The program nurtures a productive disposition toward mathematics and supports further investigations in this field.

Textbook Selection Guidelines

As you review each set of textbook materials, consider the intent of the materials. How well do they reflect the Prince William County Schools Mathematics Vision Statement, the NCTM Standards, and the Prince William County Mathematics Curriculum? Also reflect on the content, methodology and assessment strategies by using the following form to evaluate how well the materials support teachers in helping students construct understanding and develop proficiency in mathematics at your grade level.

26

<u>Presentation of Content</u>	<u>Score</u>	<u>Evidence</u>
The textbook...		
Provides opportunities for students to perform at high cognitive levels		
Helps teachers understand the content for themselves and fosters a better understanding of teaching and learning mathematics		
Supports conceptual understanding of traditional algorithms and treats them as just one of the ways students may choose to solve problems		
Provides sufficient opportunities to promote depth of application		
Supports students' application of mathematics beyond the classroom		
Supports learning through a variety of strategies such as writing and using manipulatives		

3 – Exemplary

2 – Adequate

1 – Inadequate

0 – Not Present

Prince William County Schools Elementary Textbook Adoption Form

<u>Processes</u>	<u>Score</u>	<u>Evidence</u>
The textbook...		
Problem Solving		
Provides students opportunities to build new mathematical knowledge through relevant, real-life problem contexts		
Provides students opportunities to develop, apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems		
Provides a variety of rich problems to continue concept development		
Provides students the opportunity to formulate and solve problems and reflect critically on their thinking		
Reasoning and Proof		
Supports an inquiry-based approach to learning		
Fosters students' development and logical reasoning through justifying and explaining their thinking		
Recognizes reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics		
Provides students opportunities to make and investigate mathematical conjectures		
Provides students opportunities to select, use, develop, and evaluate mathematical arguments and proofs		

3 – Exemplary

2 – Adequate

1 – Inadequate

0 – Not Present

Prince William County Schools Elementary Textbook Adoption Form

<u>Processes</u>	<u>Score</u>	<u>Evidence</u>
The textbook...		
Communication		
Provides opportunities for students to organize and consolidate their mathematical thinking through communication in small and large group settings		
Provides students opportunities to use the language of mathematics to express mathematical ideas precisely both orally and in written form		
Provides opportunities for students to analyze and evaluate the mathematical thinking and strategies of others		
Connections		
Provides opportunities for students to recognize and use connections among mathematical ideas		
Provides opportunities for students to understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole		
Provides students opportunities to recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics		
Representations		
Provides students opportunities to create and use multiple representations to organize, record, and communicate mathematical ideas		
Provides students opportunities to select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems		
Provides students opportunities to use representations to model mathematical phenomena		

28

3 – Exemplary

2 – Adequate

1 – Inadequate

0 – Not Present

Prince William County Schools Elementary Textbook Adoption Form

<u>Assessment</u>	<u>Score</u>	<u>Evidence</u>
The textbook...		
Integrates assessment into the teaching and learning process		
Offers a comprehensive approach to assessment by providing multiple types of assessment tools (short answer, projects, open ended questions, writing prompts, and multiple choice)		
Provides rubrics for scoring student work		
Suggests ways for teachers to formatively assess student learning for the purpose of instruction		
Provides opportunities for students' self-assessment		
<u>Technology</u>		
The textbook...		
Provides multiple opportunities for students to develop and apply concepts through the use of calculators		
Provides multiple opportunities for students to develop and apply concepts through the use of computers and other technologies		
Integrates technology in a meaningful way that enhances instruction		

3 – Exemplary

2 – Adequate

1 – Inadequate

0 – Not Present

Prince William County Schools Elementary Textbook Adoption Form

<u>Diversity</u>	<u>Score</u>	<u>Evidence</u>
The textbook...		
Provides appropriate opportunities for differentiation of instruction		
Provides instructional suggestions for advanced learners		
Provides instructional suggestions for struggling learners		
Provides instructional suggestions for English language learners		
Provides illustrations and text that are representative of the diversity of the general population		

30

3 – Exemplary

2 – Adequate

1 – Inadequate

0 – Not Present