

Comunicações Não-coerentes em Sistemas MIMO: Desenho do Receptor e Construção de Códigos

MB

E.4 CODING AND INFORMATION THEORY

Resumo

Este trabalho aborda o problema do desenho de códigos espaço-temporais para sistemas de comunicação multiple-input multiple-output (MIMO) sem fios. Considera-se o contexto realista e desafiante da recepção não-coerente (a realização do canal é desconhecida no receptor). O detector conhecido como generalized likelihood ratio test (GLRT) é implementado no receptor e, ao contrário da maioria das abordagens actuais, permite-se uma estrutura de correlação arbitrária para o ruído gaussiano de observação. Apresenta-se uma análise teórica para a probabilidade de erro do detector, em ambos os regimes assintóticos de relação sinal-ruído (SNR) alta e baixa. Essa análise conduz a um critério de optimalidade para desenho de códigos e permite uma re-interpretação geométrica do problema abordado como um problema de empacotamento óptimo num producto Cartesiano de espaço projectivos. A construção dos códigos implica a resolução de um problema de optimização não-linear, não-diferenciável e de dimensão elevada, o qual foi abordado aqui em duas fases. A primeira fase explora uma relaxação convexa do problema original para obter uma estimativa inicial. A segunda fase, refina essa estimativa através de um algoritmo iterativo de descida do gradiente ao longo de geodésicas, explorando-se assim a geometria Riemanniana imposta pelas restrições de potência sobre os códigos espaço-temporais. Mostra-se que o desempenho dos novos códigos obtidos por este método excede o das soluções previamente conhecidas. De facto, para algumas configurações particulares, estas novas constelações atingem o limiar de Rankin e são por isso garantidamente óptimas.

Palavras-chave: MIMO, comunicação não-coerente, códigos espaço-temporais, variedades Grassmannianas, capacidade de canal.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	MIMO Comunicações Não-Coerentes	3
1.2	Conteúdo do Trabalho, Contribuições e Publicações	6
1.2.1	Capítulo 2	6
1.2.2	Capítulo 3	7
1.2.3	Publicações	8
2	Desenho do Receptor e Construção de Códigos no Regime de Alta SNR	9
2.1	Sumário	9
2.2	Formulação do Problema	9
2.3	Construção de Códigos	14
2.4	Resultados	18
3	Desenho do Receptor e Construção de Códigos no Regime de Baixa SNR	24
3.1	Sumário	24
3.2	Canal com Desvanecimento Determinístico: Análise da PEP para o regime de Baixa SNR	24
3.3	Resultados	26
4	Conclusão	28
	Bibliografia	29

Lista de Figuras

1.1	Sistema MIMO	2
1.2	Cenário downlink. O ruído é obviamente colorido.	6
1.3	Caracterização dos diferentes casos de ruído para o desenho de códigos. . .	7
2.1	Interpretação geométrica de $\mathbf{\Pi}_j^\perp \mathcal{X}_i$	13
2.2	Fase 2: Optimização de uma função não-diferenciável num variedade diferenciável	19
2.3	Categoria 1 - ruído branco no espaço e no tempo: $T = 8, M = 3, N = 1, K = 256$, $\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{I}_{NT}$. Linha contínua com o símbolo “+”: códigos propostos; linha a tracejado com o símbolo “o”: códigos unitários.	21
2.4	Categoria 2 - ruído branco no espaço e colorido no tempo: $T = 8, M = 2, N = 1, K = 67, \boldsymbol{\rho} = [1; 0.85; 0.6; 0.35; 0.1; \text{zeros}(3,1)]$. Linhas contínuas: códigos propostos; linhas tracejadas: códigos unitários; linhas com o símbolo “+”: receptor GLRT; linhas com o símbolo “quadrado”: receptor ML.	22
2.5	Categoria 2 - ruído branco no espaço e colorido no tempo: $T = 4, M = 2, N = 2, K = 256, \boldsymbol{\rho} = [1; 0.8; 0.6; 0.1]$. Linhas contínuas: códigos propostos; linhas tracejadas: códigos unitários encontrados em [32]; linhas com o símbolo “+”: receptor GLRT; linhas com o símbolo “quadrado”: receptor ML.	23
2.6	Categoria 3: $T = 8, M = 2, N = 2, K = 32$. Linhas contínuas: códigos propostos; linhas tracejadas: códigos unitários; linhas com o símbolo “+”: receptor GLRT; linhas com símbolo “quadrado”: receptor ML.	23
3.1	Categoria 2 - ruído branco no espaço e colorido no tempo: $T = 6, \text{SNR} = -6$ dB, $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.85; 0.6; 0.35; 0.1; 0]$. A linha contínua, a tracejada-pontilhada e a linha tracejada -constelações com oito pontos que são adaptadas a estatística do ruído para $M = 1, M = 2$ e $M = 3$, respectivamente. A linha pontilhada com o símbolo “+”-constelações com oito pontos que foram construídas para o caso do ruído branco no espaço e no tempo $\mathbf{\Upsilon} = \mathbb{E}[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \mathbf{I}_{NT}$ e $M = 1$. A linha contínua com o símbolo “+”-constelações com 17 pontos que são adaptadas a estatística do ruído e $M = 1$. A linha tracejada com o símbolo “o”-constelações com 17 pontos que foram construídas para $\mathbf{\Upsilon} = \mathbb{E}[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \mathbf{I}_{NT}$ e $M = 1$. Constelações com 8 pontos usam GLRT receptor. Constelações com 17 pontos usam MAP receptor.	27

- 3.2 Categoria 2 - ruído branco no espaço e colorido no tempo: $T = 8$, $K = 32$, SNR = -10 dB, $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.8; 0.5; 0.15; \text{zeros}(4,1)]$. A linha continua-constelações para $M = 1$ adaptadas ao $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.8; 0.5; 0.15; \text{zeros}(4,1)]$, a linha continua com o símbolo “o”-constelações para $M = 2$ adaptadas ao $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.8; 0.5; 0.15; \text{zeros}(4,1)]$, a linha tracejada-constelações para $M = 1$ adaptadas ao $\boldsymbol{\rho} = [1; \text{zeros}(7,1)]$, a linha tracejada com o símbolo “o”-constelações para $M = 2$ adaptadas ao $\boldsymbol{\rho} = [1; \text{zeros}(7,1)]$. Todas as constelações usam GLRT receptor. 27

Lista de Tabelas

2.1	Algoritmo para Desenho de Códigos	14
2.2	Algoritmo GDA	18
2.3	EMPACOTAMENTO NO ESPAÇO PROJECTIVO COMPLEXO: Com- paração entre as melhores configurações dos códigos propostos (MB) de K pontos em $\mathbb{P}^{T-1}(\mathbb{C})$ com os codigos de Tropp (JAT) e o limiar do Rankin [27]. O raio de empacotamento duma constelação mede-se como o ângulo agudo entre as linhas mais próximas. O simbolo menos (-) significa que, para o par específico (T, K) , o empacotamento não está disponível.	20

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos houve um grande aumento na procura de sistemas móveis de comunicações de dados, com altas taxas de transmissão e qualidade apurada na ligação, destinados às mais variadas aplicações. Embora os benefícios da utilização de receptores com múltiplas antenas sejam conhecidos há muito tempo, o ganho de diversidade e aumento da capacidade alcançados pelo uso de antenas múltiplas, quer do lado do receptor quer do lado do emissor, apenas foram recentemente entendidos.

Winters [1] foi um dos primeiros a provar que os sistemas *multiple-input multiple-output* (MIMO) proporcionam o aumento da capacidade de transmissão. Por outro lado, Paulraj e Kailath demonstraram que sistemas de acesso múltiplo por divisão de código (CDMA—Code Division Multiple Access) e equipados com antenas múltiplas podem aumentar consideravelmente a capacidade de transmissão, quando comparados com sistemas *single-input single-output* (SISO). Apenas mais tarde, Telatar [2] provou os resultados fundamentais sobre a capacidade de transmissão de um sistema MIMO. Estes resultados foram desenvolvidos independentemente e tiveram por base considerações práticas da autoria de Foschini et al. [3]. Em termos da teoria de informação, um grande avanço destes resultados é que, quando a relação sinal-ruído (SNR—Signal-to-Noise Ratio) é alta, a capacidade de canais com antenas múltiplas aumenta linearmente com o menor dos números de antenas de transmissão e recepção. Isto foi decisivo para o início do desenvolvimento de códigos espaço-temporais (STC—Space Time Codes), com o objectivo de explorar as diversidades, tanto espaciais como temporais, com vista à maximização da capacidade do canal.

O ponto chave do desenvolvimento de STC foi originalmente proposto em [4], sob a forma de códigos de *trellis*, os quais exigem a utilização do algoritmo de Viterbi no receptor. Estes códigos, chamados códigos espaço-temporais de *trellis* (STTC—Space Time Trellis Codes), proporcionam um ganho de diversidade igual ao número de antenas de transmissão, para além de um ganho de codificação que depende da complexidade do código, ou seja, do número de estados de *trellis*, sem qualquer perda de eficiência de banda. Quando o número de antenas é fixo, a complexidade de decodificação de STTC, medido pelo número de estados de *trellis* no decodificador, aumenta exponencialmente em função do ordem da diversidade e da taxa de transmissão.

Em termos da complexidade de decodificação, Alamouti [5] introduziu um notável esquema espaço-temporal de codificação por blocos, para a transmissão com duas ante-

nas. Este esquema, suportado no método de máxima verossimilhança (ML–Maximum Likelihood), é baseado no processamento linear e na detecção escalar no receptor. A sua estrutura muito simples e a transformação linear da construção de Alamouti, tornam-na num esquema muito atractivo de tal forma que actualmente faz parte dos *wideband* (CDMA) e CDMA-2000.

Tarokh et al. [6] estabeleceu a teoria de códigos espaço-temporais por blocos (STBC–Space Time Block Codes), usando desenhos ortogonais [7, 8] para criar uma analogia com o código de Alamouti, para o uso de mais de duas antenas de transmissão. A estrutura ortogonal destes códigos permite o uso do descodificador linear ML. À medida que o número de antenas de transmissão cresce, a taxa de dados disponíveis com desenhos ortogonais torna-se pouco atraente. Daí provém o recente interesse no desenho dos códigos lineares não ortogonais, como por exemplo, os códigos de dispersão linear (LDC–Linear Dispersion Codes) [9] e o código de Golden [10].

Os STC em camadas, desenvolvido nos laboratórios Bell (BLAST) [3], podem ser considerados como uma categoria especial de STBC, onde fluxos de dados independentes são transmitidos através de diferentes antenas, maximizando assim a taxa média de dados do sistema MIMO.

As arquitecturas espaço-temporais por camadas existentes são várias, diferenciando entre si pelo uso ou não de código para o controlo de erros e/ou pela maneira como os símbolos modulados são associados às antenas de transmissão. Neste contexto incluem-se as arquitecturas verticais [11], horizontais [12], diagonais [12] e as arquitecturas espaço-temporais por camadas *threaded* [13]. De forma a realizar a detecção de símbolo, o receptor deve estimar (descodificar) o canal, usando uma das várias formas possíveis. A complexidade da descodificação ML pode ser elevada, quando são utilizadas muitas antenas ou modulações de ordem superior. Neste contexto, foram propostas variantes a estas arquitecturas, como por exemplo a *sphere decoding* [14]. Outra estratégia popular de descodificação, baseada no BLAST vertical, é conhecida como anulação e cancelamento, que é parecida com o cancelamento sucessivo da interferência (SIC–Successive Interference Cancellation), proposto para a detecção de múltiplos utilizadores em receptores CDMA [15]. Embora existam várias arquitecturas para o receptor, as quais podem suportar a diversidade espacial máxima do canal MN^1 , a técnica de anulação e cancelamento, em combinação com a estimativa de mínimo erro quadrático médio (MMSE–Minimum Mean Square Error), permite atingir a capacidade do canal. Para obter mais detalhes veja, e.g., [16, Chapter 8].

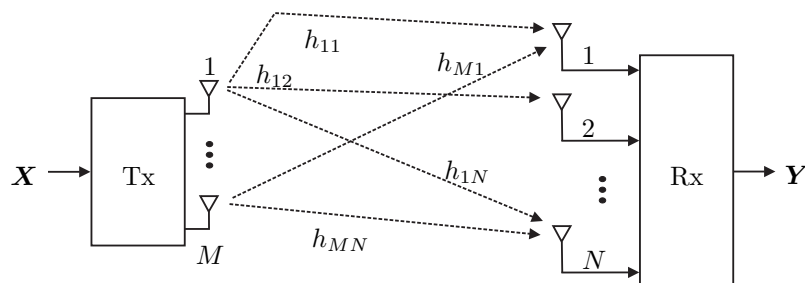


Figura 1.1: Sistema MIMO

¹Mede-se pelo número de caminhos diferentes possíveis entre o transmissor e o receptor, ver figura 1.1. Note-se que no regime de alta SNR, $P_e \leq c \cdot SNR^{-d}$ onde P_e representa a probabilidade de erro média, c é uma constante e d é a diversidade do canal.

Na sequência das primeiras publicações, a codificação espaço-temporal foi rapidamente reconhecida por parte do meio académico, da indústria e dos governos. Nos últimos anos, um grande número de livros e artigos sobre a codificação espaço-temporal, foi publicado em todo o mundo. Informação detalhada acerca de algumas tecnologias fundamentais, juntamente com um levantamento dos principais contributos deste campo e as generalizações para os canais com frequência-selectiva, pode ser encontrada em [17, 18, 19, 20].

A descodificação de STC requer o conhecimento do canal por parte do receptor. No caso do cenário de canal com desvanecimento lento (*slow fading*), quando o canal permanece aproximadamente constante, para muitos intervalos de símbolo, a estabilidade do canal permite que o receptor seja treinado (e.g., enviando símbolos piloto), a fim de adquirir a informação de estado do canal (CSI—Channel State Information). Isto é normalmente designado por detecção coerente. No entanto, no caso do canal com desvanecimento rápido (*fast fading*), a CSI muda para um novo valor, quase independente, antes do receptor conseguir aprendê-la através dos símbolos piloto. Usando antenas múltiplas no transmissor aumenta-se o número de parâmetros a serem estimados no receptor, o que torna este problema ainda mais difícil. Isto faz com que a detecção não-coerente, no qual o receptor detecta os símbolos transmitidos sem ter a informação da realização do canal, seja atractiva para o cenário de canal com desvanecimento rápido.

Este trabalho trata exclusivamente de comunicação não-coerente. Segue-se o resumo das mais recentes tecnologias MIMO para comunicações não-coerentes.

1.1 MIMO Comunicações Não-Coerentes

Trabalho anterior. A capacidade dos sistemas não-coerentes com antenas múltiplas foi estudada em [21, 22]. Partindo das hipóteses: 1) ruído (de observação) branco gaussiano aditivo e, 2) canal Rayleigh, foi demonstrado que a matriz do sinal que atinge a capacidade, é escrita da seguinte forma: $\mathbf{S} = \mathbf{\Phi}\mathbf{V}$, em que $\mathbf{\Phi}$ é uma matriz $T \times T$ unitária e isotropicamente distribuída [23], e $\mathbf{V}$ é uma matriz $T \times M$ independente, real, não negativa e diagonal, em que M e T designam o número de antenas de transmissão e o comprimento do intervalo de coerência, respectivamente. Foi igualmente provado que, no regime de alta SNR ou quando T é muito maior do que M , a capacidade pode ser alcançada utilizando uma constelação de matrizes unitárias como códigos.

Além disso, em [24] foi demonstrado que, sob a hipótese de uso de códigos com igual potência no regime de alta SNR, os códigos unitários optimizam o *union bound* (UB) para a probabilidade de erro. Consequentemente, quando a SNR é alta, as constelações unitárias são óptimas, tanto do ponto de vista da capacidade como da probabilidade de erro por símbolo (SER—Symbol Error Rate). As constelações unitárias óptimas correspondem aos empacotamentos óptimos em variedades de Grassmann [25]. Em [26, 27] foi apresentado um método sistemático para a construção de constelações unitárias espaço-temporais. Em [28], os algoritmos de Sloane [29] para produção dos empacotamentos no espaço real de Grassmann, foram generalizados ao espaço de Grassmann complexo. Para um pequeno número de antenas de transmissão, utilizando a distância *chordal* [30] como critério de desenho, certas constelações sofreram melhorias em termos da taxa de erro por bit (BER—Bit Error Rate), quando comparadas com as constelações unitárias espaço-temporais apre-

ntadas em [26]. Em [31] foi estudado o problema do desenho das constelações do sinal para canais não-coerentes multiantena, com desvanecimento de Rayleigh. A consideração do UB para a probabilidade de erro introduziu uma nova noção de distância para a variedade de Grassmann. Assim, foi introduzido um método iterativo para a construção de códigos chamado actualização sucessiva. Os códigos obtidos através deste método, em contraste com [26, 28], alcançam a diversidade espacial máxima do canal.

Em [32] foi apresentada uma família de códigos espaço-temporais adaptados para sistemas MIMO não-coerentes. Estes códigos utilizam todos os graus de liberdade do sistema, e foram construídos como os códigos sobre variedades de Grassmann, pelo mapa exponencial [33]. Recentemente, em [34, 35] foram apresentadas algumas simplificações sub-óptimas de decodificação para a classe de códigos unitários espaço-temporais, obtidos também através do mapa exponencial. Em [36] os autores consideraram comunicações não-coerentes em canais MIMO, com desvanecimento não-selectivo de Rayleigh. Usando uma análise de perturbação no sub-espaço foi determinada uma métrica para a definição da distância entre pontos de constelação de Grassmann, seguida de uma técnica *greedy* [37] de concepção de constelações, que se assemelha à distribuição isotrópica. A estrutura geométrica inerente destas constelações é utilizada para desenvolver um novo detector sub-ótimo. Os desempenhos deste detector são comparáveis aos do detector ML, tendo em conta que exige menos esforço computacional. Ao leitor mais interessado, aconselha-se a seguinte referência [19, Chapter 10], por forma a obter um resumo das propostas mais referenciadas na bibliografia sobre comunicações não-coerente em canais MIMO.

Os sistemas MIMO no regime de baixa SNR, têm atraído recentemente a atenção da comunidade científica. Uma das principais razões deve-se ao facto de que, na terceira geração de sistemas móveis de dados, quase 40% das áreas geográficas têm níveis de recepção com SNR inferiores a 0 dB, enquanto apenas menos de 10% exibe níveis acima dos 10 dB. A exigência de uma SNR alta nem sempre é possível satisfazer, devido a limitações de potência no dispositivo celular. Além disso, os recentes progressos tecnológicos levaram ao aparecimento de dispositivos mais pequenos, de baixa potência, incluindo dispositivos móveis que, quando presentes em grande número, têm a capacidade de formar uma rede inteligente, e.g. *sensor network*, a qual permite monitorizar grandes áreas, detectar a presença ou ausência de alvos, etc. Estas aplicações motivam a análise e o desenho de esquemas de comunicação que devem funcionar no regime de baixa SNR. Ver por exemplo [38, 39, 40] para uma discussão mais aprofundada sobre este tema.

Os sistemas MIMO que funcionam no regime de baixa SNR, com a CSI disponível no receptor foram tratados em [38]. A interacção entre taxa de transmissão, largura de banda e potência, é também analisada no campo de energia por bit, perto de seu valor mínimo. Em [41] foi considerado o cenário em que a CSI não está disponível no receptor. Foi demonstrado que a sinalização óptima no regime de baixa SNR alcança a mesma capacidade que no caso coerente quando o receptor conhece a CSI e inclui apenas uma antena de transmissão. Em [42] Verdu demonstrou que o conhecimento da primeira e segunda derivada da capacidade, quando a SNR é baixa, fornece uma medida da largura de banda e da eficiência energética do sinal transmitido. Mais precisamente, esse conhecimento revela como cresce a eficiência espectral com o aumento da energia por bit. Em [43] é apresentada uma expansão de segunda ordem para a informação mútua entre a entrada e

a saída, válida para o regime de baixa SNR. Em [44] considera-se a capacidade e a função de fiabilidade, para um canal discreto sem memória e entrada limitada, quando esse limite máximo tende para zero. Em [45] obtiveram-se resultados semelhantes aos de [43, 44], com pressupostos menos exigentes relativos aos sinais de entrada. No mesmo trabalho, Rao e Hassibi demonstraram que a sinalização *on-off*, apresentada em [41] e generalizada para o caso MIMO, atinge a capacidade coerente (i.e., o receptor tem acesso à CSI).

O compromisso entre o ritmo de transmissão e a taxa média da probabilidade de erro, usando a teoria de *error-exponent* foi estudada em [46]. A vantagem na utilização de múltiplas antenas é maximizada em cenários de desvanecimento completamente correlacionados, observando-se um ganho de desempenho de MN e ganho de *peakiness* de M^2NT , onde M , N , e T representam o número de antenas de transmissão, recepção e duração do intervalo de coerência, respectivamente.

A análise da SER no caso do canal Rayleigh independente e identicamente distribuído (iid), não-coerente e no regime de baixa SNR é mais recente, embora Hochwald et al. [26] sugira, nesse regime, a utilização de apenas uma antena de transmissão. Borran et al. [39] apresentou, sob a hipótese de palavras de código igualmente prováveis, uma técnica que utiliza a divergência de *Kullback-Liebler* entre a função densidade de probabilidade, induzida no receptor por distintos códigos transmitidos, como um critério para o desenho de códigos. Em condições de baixa SNR, os pontos da constelação ocupam níveis múltiplos (os pontos de sinal situam-se em esferas concêntricas), com um ponto normalmente na origem. Foi demonstrado que os códigos assim construídos têm melhor desempenho do que algumas construções de códigos existentes no regime de baixa SNR, principalmente [26]. Srinivasan et al. [47] considerou o caso de apenas uma antena de transmissão para o regime de baixa SNR. Os resultados da teoria de informação, sobre o canal Rayleigh iid não-coerente, no regime de baixa SNR e com restrição na potência média [45, 46], permitem palavras de código com *priors* diferentes, *priors* estes que foram otimizados por forma a obter um melhor desempenho. Daqui resulta que, as constelações assumam um ponto na origem com probabilidade de símbolo $\frac{1}{2}$, e com probabilidades iguais para os pontos situados nas esferas. Em [48] foi estudado o modelo com desvanecimento Rayleigh correlacionado e demonstrou-se que, para qualquer SNR, o uso de uma única antena, utilizando uma pré-codificação adequada num cenário MIMO, obtém melhor desempenho do que num único canal SIMO. Consequentemente, no caso de MIMO, foram apresentados desenhos para códigos que exploram as correlações nas antenas de transmissão, por forma a obter ganhos em relação ao SIMO correspondente, para o regime de baixa SNR.

Segue-se a motivação do presente trabalho.

Motivação. As técnicas acima mencionadas não podem ser facilmente generalizadas para os cenários mais realistas e desafiantes, em que o ruído de observação é gaussiano e apresenta uma estrutura arbitrária de correlação. O pressuposto do ruído de observação gaussiano espaço-temporal é comum, pelo menos por duas razões. Em primeiro lugar, porque resultam em expressões relativamente fáceis de tratar matematicamente. Em segundo lugar porque, em alguns cenários, isso pode ser justificado através do teorema do limite central. Embora seja comum, o pressuposto de ruído branco gaussiano no espaço e no tempo é claramente uma aproximação.

Geralmente, em cenários realistas, o termo de ruído pode ter uma estrutura de corre-

lação rica; ver por exemplo pp. 554 em [16], pp. 100 em [19], pp. 10, 159, 171 em [20] e [38]. A generalização que leva a matrizes de covariância do ruído arbitrárias, engloba muitos cenários de interesse: cenários em que o ruído é ou não colorido no espaço, juntamente com cenários em que o ruído é ou não colorido no tempo, bem como em ambientes multi-utilizador, etc. Intuitivamente, pode concluir-se que constelações unitárias espaço-temporais não são óptimas nestes cenários.

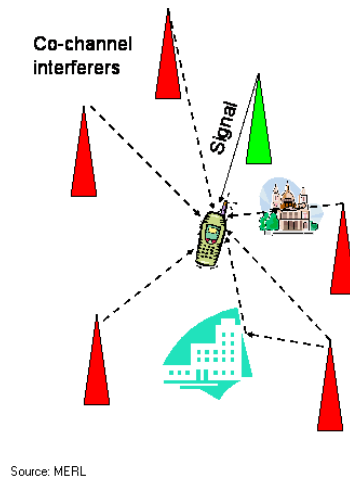


Figura 1.2: Cenário downlink. O ruído é obviamente colorido.

1.2 Contéudo do Trabalho, Contribuições e Publicações

O trabalho encontra-se dividida em 3 capítulos. Apresenta-se de seguida um sumário de cada capítulo, com o intuito de fornecer a motivação e o respectivo conteúdo. Referem-se também as publicações resultantes.

1.2.1 Capítulo 2

No capítulo 2, é abordado o problema do desenho de códigos espaço-temporais para comunicações não-coerentes, através de sistemas sem fios, com antenas múltiplas no regime de alta SNR. Procurou-se acima de tudo, um critério mais prático para o desenho de códigos baseado na probabilidade de erro, em detrimento da análise de capacidade. O cálculo da expressão exacta, da probabilidade média de erro dos sistemas não-coerentes não é geralmente fácil de conseguir. Ao invés, considerou-se a *pairwise error probability* (PEP) no regime de alta SNR por forma a encontrar um critério de desenho de código, i.e., uma função de mérito para uma estrutura arbitrária de correlação do ruído.

Contribuições. As contribuições deste trabalho nesta área são as seguintes:

1. A principal contribuição deste capítulo é a introdução de uma nova técnica sistemática de desenho de códigos espaço-temporais para sistemas de comunicação multi-antenas não-coerentes. Em comparação com outras abordagens, no presente trabalho

a matriz do canal é modelada como um parâmetro determinístico desconhecido, tanto no receptor como no transmissor. É permitida ainda uma estrutura de correlação arbitrária para o ruído de observação gaussiano, conhecida quer pelo transmissor quer pelo receptor. Nos casos de ruído colorido, as simulações mostram que os STC obtidos com o método aqui proposto ultrapassam, como seria de esperar, significativamente o desempenho dos códigos anteriormente conhecidos, os quais foram construídos para o caso de ruído branco no espaço e no tempo. Relembra-se que, a construção de códigos para estruturas de correlação de ruído arbitrárias não se encontrava previamente disponível nem publicada. Isto demonstra o interesse da metodologia no desenho de códigos proposto no presente trabalho.

2. Para o caso especial do ruído branco espaço-temporal, os códigos apresentados no presente trabalho, recuperam a estrutura unitária previamente conhecida, nomeadamente os códigos em [26] – mesmo neste caso, os códigos aqui construídos têm um desempenho marginalmente melhor. Para este cenário específico e para $M = 1$, mostra-se também que o problema de encontrar bons códigos coincide com o problema bem conhecido de empacotamento no espaço projectivo complexo. Comparam-se também as melhores configurações dos códigos propostos, face aos códigos em [27] e o limiar de Rankin. Verifica-se que os melhores resultados conhecidos são ultrapassados e, nalguns casos, os códigos aqui apresentados atingem o limiar de Rankin [29].
3. Uma análise teórica, que conduz a um limite superior para a PEP em cenário de alta SNR, quando o ruído de observação é gaussiano e apresenta uma estrutura de correlação arbitrária.

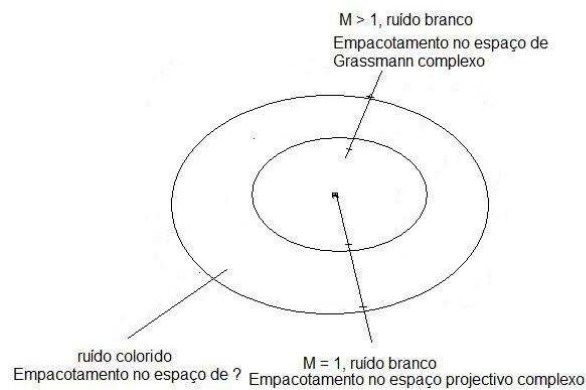


Figura 1.3: Caracterização dos diferentes casos de ruído para o desenho de códigos.

1.2.2 Capítulo 3

No capítulo 3, estuda-se o canal MIMO não-coerente no regime de baixa SNR, do ponto de vista da capacidade e da PEP. A inovação reside no facto de ser permitida uma estrutura de correlação arbitrária para o ruído de observação gaussiano, embora esta seja conhecida quer pelo receptor quer pelo transmissor.

Contribuições. Seguem-se os contributos do trabalho nesta área:

1. Contrariamente à maioria das abordagens feitas no regime de baixa SNR, assume-se que o canal é determinístico, i.e., nenhum modelo estocástico é assumido. É apresentada uma análise da PEP no regime de baixa SNR para o receptor GLRT, e o critério de desenho de códigos, que toma em linha de conta a informação sobre correlação do ruído. Para o caso especial de uma única antena de transmissão e ruído gaussiano branco no espaço e no tempo, é demonstrado que, o problema de encontrar bons códigos corresponde ao conhecido problema de empacotamento no espaço projectivo complexo [27]. São apresentados novas constelações espaço-temporais para cenários específicos.
2. Mostra-se igualmente que se deve construir códigos para apenas uma antena de transmissão, que estejam adaptados à estatística do ruído. As simulações mostram que estes novos códigos são também úteis para os receptores *maximum-a-posteriori* (MAP) que descodificam constelações com *priors* não-uniformes.

1.2.3 Publicações

Como prova da elevada receptividade, por parte da comunidade científica especializada a respeito desta nova linha de investigação, o trabalho desenvolvido neste trabalho foi materializado, até à presente data, na publicação de 2 artigos na revista internacional *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2 artigos na conferência internacional *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing* ICASSP'06 e ICASSP'07 e 2 artigos na conferência internacional *IEEE Workshop on Signal Processing Advances for Wireless Communications* SPAWC'06 e SPAWC'08.

Capítulo 2

Desenho do Receptor e Construção de Códigos no Regime de Alta SNR

2.1 Sumário

Na secção 2.2 introduz-se o modelo de dados e a formulação do problema estudado. Começa-se por descrever a estrutura do receptor não-coerente e apresenta-se a selecção do critério para o desenho de códigos. Na secção 2.3 descreve-se o novo algoritmo para o desenho sistemático de constelações não-coerentes espácio-temporais, dada uma matriz de covariância do ruído arbitrária, em que, M , N , K e T , representam o número de antenas de transmissão, o número de antenas de recepção, o tamanho de código e o intervalo de coerência do canal, respectivamente. Na secção 2.4 apresenta-se a construção de códigos para vários casos de interesse. Simultaneamente, é feita a comparação dos seus desempenhos com os resultados conhecidos.

2.2 Formulação do Problema

Modelo de dados e pressupostos. O sistema de comunicações estudado é composto por várias antenas de transmissão e de recepção, em que M e N designam o seu número, respectivamente. Assume-se um canal com desvanecimento não-selectivo com um intervalo de coerência T . Isto é, considera-se que os coeficientes de desvanecimento permanecem constantes durante a transmissão de cada bloco, que dura T instantes do tempo, mudando em seguida para novos valores independentes. Este modelo é uma representação precisa de muitas arquitecturas de acesso múltiplo por divisão no tempo (TDMA–Time Division Multiple Access), *frequency-hopping*, ou de sistemas *block-interleaved*. Ver por exemplo [26], para mais detalhes.

O modelo de transmissão em banda base é descrito por,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{H}^H + \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{X}$ representa a matriz $T \times M$ de símbolos transmitidos (a matriz $\mathbf{X}$ designa-se por palavra de código espácio-temporal), $\mathbf{Y}$ é a matriz $T \times N$ de símbolos recebidos, $\mathbf{H}^H$ é

a matriz $M \times N$ dos coeficientes do canal (o símbolo H representa o operador transposta conjugada), e $\mathbf{E}$ é a matriz $T \times N$ que representa o ruído de observação aditivo com média nula. As entradas das matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{E}$ tomam valores no corpo dos complexos $\mathbb{C}$. No resto do capítulo assumem-se os seguintes pressupostos:

- A1. (Matriz do canal)** A matriz $\mathbf{H}$ não é conhecida no receptor, nem no transmissor, e não existe modelo estocástico associado;
- A2. (Restrição de potência)** A palavra de código $\mathbf{X}$ é escolhida a partir de um código finito $\mathcal{C} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K\}$ conhecido pelo receptor, em que K designa o tamanho do código. A restrição de potência é imposta pela condição $\text{tr}(\mathbf{X}_k^H \mathbf{X}_k) = 1$, para cada palavra de código. Assume-se igualmente que $T \geq M$, e que cada palavra de código tem característica completa, ou seja, $\text{rank}(\mathbf{X}) = M$;
- A3. (Distribuição do ruído)** O ruído de observação no receptor tem média nula e obedece a uma distribuição gaussiana, isto é, $\text{vec}(\mathbf{E}) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Upsilon})$. A matriz de covariância do ruído $\mathbf{\Upsilon} = \mathbb{E}[\text{vec}(\mathbf{E})\text{vec}(\mathbf{E})^H]$ é conhecida quer pelo transmissor quer pelo receptor ($\text{vec}(\mathbf{E})$ transforma uma matriz num vector, concatenando verticalmente as colunas da matriz $\mathbf{E}$).

O pressuposto **A3** permite que o modelo de dados considere outros casos para além do cenário comum de ruído de observação *branco* espaço-temporal gaussiano. No entanto, não é possível proceder a um “*pre-whitening*” do ruído, de forma a se reverter o caso do ruído colorido ($\mathbf{\Upsilon} \neq \mathbf{I}_{TN}$), para o caso em que o ruído é branco no espaço e no tempo ($\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{I}_{TN}$). Esta impossibilidade pode ser vista da seguinte forma. Considerem-se dois sistemas, onde o sistema 1 é descrito pela fórmula

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1 \mathbf{H}^H + \mathbf{E}_1, \quad (2.2)$$

com $\mathbf{e}_1 = \text{vec}(\mathbf{E}_1) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Upsilon})$, e o sistema 2 dado por

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 \mathbf{H}^H + \mathbf{E}_2, \quad (2.3)$$

em que $\mathbf{e}_2 = \text{vec}(\mathbf{E}_2) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{TN})$. O sistema de equações (2.2) e (2.3) é equivalente a

$$\mathbf{y}_1 = \text{vec}(\mathbf{Y}_1) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}_1) \text{vec}(\mathbf{H}^H) + \mathbf{e}_1 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y}_2 = \text{vec}(\mathbf{Y}_2) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}_2) \text{vec}(\mathbf{H}^H) + \mathbf{e}_2, \quad (2.5)$$

respectivamente (o símbolo $\otimes$ denota o produto de Kronecker). Após a operação de “*pre-whitening*”, a partir de (2.4) obtém-se

$$\widetilde{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{\Upsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_1 = \mathbf{\Upsilon}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}_1) \text{vec}(\mathbf{H}^H) + \widetilde{\mathbf{e}}_1, \quad (2.6)$$

com $\widetilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{\Upsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e}_1 \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{TN})$. Comparando as expressões (2.5) e (2.6), conclui-se que os sistemas 1 e 2 não são equivalentes, ou seja, as constelações unitárias (que são óptimas no caso de ruído branco no espaço e no tempo, no regime de alta SNR), não podem ser empregues para o “*pre-whitening*”, porque violam a estrutura da constelação.

Receptor. De acordo com o modelo (2.1) e os pressupostos acima mencionados, a função densidade de probabilidade condicionada (pdf–probability density function) do vector recebido $\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{Y})$, dada a matriz transmitida $\mathbf{X}$ e a realização do canal $\mathbf{g} = \text{vec}(\mathbf{H}^H)$

desconhecida, é dada por

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{g}) = \frac{\exp\{-\|\mathbf{y} - (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X})\mathbf{g}\|_{\mathbf{\Upsilon}^{-1}}^2\}}{\pi^{TN} \det(\mathbf{\Upsilon})},$$

onde $\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{A}}^2 = \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}$.

Uma vez que nenhum modelo estocástico foi associado à matriz do canal, assume-se que o receptor realiza um *generalized likelihood ratio test* (GLRT), que decide o índice k da palavra de código como sendo

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \underset{k=1,2,\dots,K}{\operatorname{argmax}} \quad p(\mathbf{y}|\mathbf{X}_k, \hat{\mathbf{g}}_k) \\ &= \underset{k=1,2,\dots,K}{\operatorname{argmin}} \quad \left\| \mathbf{y} - \widetilde{\mathbf{X}}_k \hat{\mathbf{g}}_k \right\|_{\mathbf{\Upsilon}^{-1}}^2 \end{aligned}$$

em que

$$\widetilde{\mathbf{X}}_k = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}_k, \quad \hat{\mathbf{g}}_k = (\mathbf{X}_k^H \mathbf{X}_k)^{-1} \mathbf{X}_k^H \mathbf{\Upsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}, \quad (2.7)$$

e $\mathbf{X}_k = \mathbf{\Upsilon}^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbf{X}}_k$. O GLRT [49, 50, 51] é composto por K processadores em paralelos, em que o k -ésimo processador calcula a probabilidade da observação, depois de substituir o canal pela sua estimativa ML e pressupondo a presença da k -ésima palavra de código. O detector GLRT escolhe assim a palavra de código associada ao processador que exibe a maior probabilidade de observação. Uma vez que o receptor ML explora o conhecimento da estatística do canal, o GLRT apresenta um comportamento sub-óptimo quando comparado com o receptor ML. No entanto, uma vez que o pressuposto **A1** está em vigor, o GLRT proporciona uma solução atractiva (implementável) para a configuração actual. Demonstra-se igualmente que, no caso especial das constelações unitárias, ou seja, $\mathbf{X}_k^H \mathbf{X}_k = \frac{1}{M} \mathbf{I}_M$ para qualquer k , na presença de ruído branco gaussiano no espaço e no tempo e com desvanecimento Rayleigh iid, os dois receptores coincidem. Como cada palavra de código tem característica completa (pressuposto **A2**), a expressão (2.7) para estimativa ML do canal está bem definida.

Critério para o desenho de códigos. O objectivo deste capítulo é determinar uma métrica para o desenho do código $\mathcal{C} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K\}$ de tamanho K , para a configuração actual. Um código $\mathcal{C}$ é um ponto no espaço

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_K) : \operatorname{tr}(\mathbf{X}_k^H \mathbf{X}_k) = 1\}.$$

Note que o espaço $\mathcal{M}$ pode ser visto como um *torus* multi-dimensional, ou seja, como o produto cartesiano de K esferas unitárias:

$$\mathcal{M} = \mathbb{S}^{2TM-1} \times \dots \times \mathbb{S}^{2TM-1} \quad (K \text{ vezes})$$

em que cada palavra de código $\mathbf{X}_k$ pertence ao espaço $\mathbb{C}^{T \times M}$. O símbolo $\mathbb{S}^{n-1}$ denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Em primeiro lugar, é necessário definir uma função de mérito $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que caracteriza a qualidade de uma constelação $\mathcal{C}$. A escolha natural para cada $\mathcal{C}$ seria a probabilidade média de erro, mas a sua determinação teórica é difícil. Em vez disso, tal como em [22]- [26], estudou-se a PEP de forma a obter a função de mérito.

A expressão exacta, bem como o limite superior de Chernoff para a PEP, foram obtidos em [22] para o caso específico de códigos unitários ($\mathbf{X}_k^H \mathbf{X}_k = \frac{1}{M} \mathbf{I}_M$), em canal com desvanecimento Rayleigh iid, na presença de ruído branco gaussiano no espaço e no tempo ($\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{I}_{TN}$). Contudo, o cálculo destas expressões para o caso geral, isto é, para uma matriz arbitrária de constelações $\mathcal{C}$ e uma matriz de correlação do ruído $\mathbf{\Upsilon}$, é extremamente difícil. Seguindo uma abordagem semelhante a [22]- [26], recorre-se à expressão assintótica para a PEP no regime de alta SNR, e valores arbitrários de $\mathcal{C}$ e $\mathbf{\Upsilon}$. Considera-se um código com apenas duas palavras de código, ou seja, $\mathcal{C} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$. Assume-se que $P_{\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j}$ é probabilidade do receptor GLRT decidir por $\mathbf{X}_j$, quando o emissor enviou $\mathbf{X}_i$. Pode mostrar-se que, para uma SNR suficientemente alta tem-se a seguinte aproximação

$$P_{\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j} \approx \mathcal{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mathbf{g}^H \mathbf{L}_{ij} \mathbf{g}}\right), \quad (2.8)$$

com

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{X}_i^H \mathbf{\Pi}_j^\perp \mathbf{X}_i \quad \text{and} \quad \mathbf{\Pi}_j^\perp = \mathbf{I}_{TN} - \mathbf{X}_j (\mathbf{X}_j^H \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^H$$

em que $\mathcal{Q}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ e $\mathbf{\Pi}_j^\perp$ é o complemento ortogonal do espaço das colunas de $\mathbf{X}_j$.

A equação (2.8) mostra que a probabilidade de uma detecção errada, $\mathbf{X}_j$ em vez de $\mathbf{X}_i$, depende da realização do canal $\mathbf{g} = \text{vec}(\mathbf{H}^H)$ e da geometria relativa das palavras de código $\mathbf{X}_i$ e $\mathbf{X}_j$. A acção de $\mathbf{g}$ e $\mathbf{L}_{ij}$ pode ser separada usando a desigualdade

$$\mathbf{g}^H \mathbf{L}_{ij} \mathbf{g} \geq \lambda_{\min}(\mathbf{L}_{ij}) \|\mathbf{g}\|^2,$$

que resulta numa igualdade quando $M = 1$ e $\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{I}_{NT}$. Dado que $\mathcal{Q}(\cdot)$ é monotonamente decrescente, o limite superior para a PEP, no regime SNR alta, é dado por

$$P_{\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j} \leq \mathcal{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \|\mathbf{g}\| \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{L}_{ij})}\right). \quad (2.9)$$

Embora a potência do canal $\mathbf{g} = \text{vec}(\mathbf{H}^H)$ não possa ser controlada, é sempre possível conceber códigos com vista à maximização de $\lambda_{\min}(\mathbf{L}_{ij})$.

Interpretação geométrica. A maximização de $\lambda_{\min}(\mathbf{L}_{ij})$, tem uma interpretação geométrica imediata. Definindo $\mathbf{V} = \mathbf{\Pi}_j^\perp \mathbf{X}_i$, $\mathbf{\Pi}_j^\perp \mathbf{X}_i$ é a projecção ortogonal de $\mathbf{X}_i$ no complemento ortogonal do $\text{span}\{\mathbf{X}_j\}$ (o span de $\mathbf{X}_j$ define-se como o sub-espaço linear em $\mathbb{C}^{TN}$, de dimensão $TN \times MN$, gerado pelas suas MN colunas), ver figura 2.1.

Note-se que

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{V}^H \mathbf{V} = (\mathbf{\Pi}_j^\perp \mathbf{X}_i)^H (\mathbf{\Pi}_j^\perp \mathbf{X}_i)$$

é a matriz correspondente de Gram e

$$\sqrt{\det(\mathbf{V}^H \mathbf{V})} = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{V}^H \mathbf{V}) \cdot \dots \cdot \lambda_{\max}(\mathbf{V}^H \mathbf{V})} \geq \lambda_{\min}(\mathbf{V}^H \mathbf{V})^{\frac{MN}{2}}.$$

Assim, ao maximizar $\lambda_{\min}(\mathbf{V}^H \mathbf{V})$, aumenta-se o limite inferior de $\sqrt{\det(\mathbf{V}^H \mathbf{V})}$, que é proporcional ao volume do paralelepípedo definido pelas colunas de $\mathbf{\Pi}_j^\perp \mathbf{X}_i$. Ou seja, está-se a tentar colocar $\mathbf{X}_i$ no complemento ortogonal do span de $\mathbf{X}_j$.

Formulação do problema. Tomando (2.9) como base, propõe-se seguir uma estratégia de “worst-case”, isto é, a função de mérito

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_K\} \mapsto f(\mathcal{C})$$

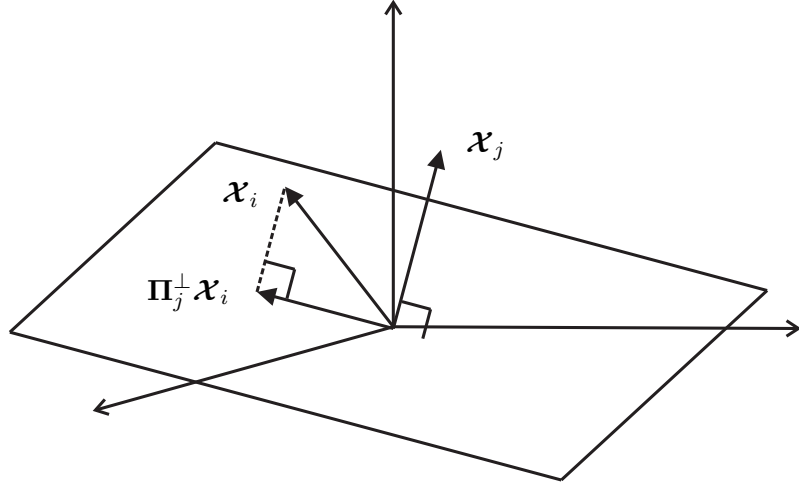


Figura 2.1: Interpretação geométrica de $\Pi_j^\perp \mathbf{x}_i$.

em que

$$f(\mathcal{C}) = \min\{f_{ij}(\mathcal{C}) : 1 \leq i \neq j \leq K\} \quad (2.10)$$

e $f_{ij}(\mathcal{C}) = \lambda_{\min}(\mathbf{L}_{ij}(\mathcal{C}))$. A construção de um código óptimo $\mathcal{C} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K\}$ faz-se resolvendo o problema de otimização

$$\mathcal{C}^* = \arg \max_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}} f(\mathcal{C}). \quad (2.11)$$

O problema definido na equação (2.11), é um problema de otimização de dimensão elevada, não-linear e não-diferenciável. A título de exemplo, para um código do tamanho $K = 256$ o número de funções f_{ij} é $K(K-1) = 65280$. Além disso, para $T = 8$ e $M = 2$, existem $2KTM = 8192$ variáveis reais para otimizar.

O problema (2.11) é um problema não-diferenciável, no sentido em que a função f , definida como o mínimo das funções f_{ij} , geralmente não é diferenciável nos pontos onde várias f_{ij} atingem o seu valor mínimo. No caso do presente problema, as f_{ij} não são diferenciáveis devido ao operador $\lambda_{\min}$. A título de exemplo, considere $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \lambda_{\min} \left(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix} \right).$$

Embora a matriz envolvida seja uma função diferenciável dos seus elementos, $\phi(t) = -|t|$ não é diferenciável em todos os pontos.

Além disso, note-se que

$$f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K) = f(\mathbf{X}_1 e^{i\theta_1}, \mathbf{X}_2 e^{i\theta_2}, \dots, \mathbf{X}_K e^{i\theta_K}),$$

para qualquer $\theta_k \in \mathbb{R}$. Isto significa que f depende de cada $\mathbf{X}_k$ ($\|\mathbf{X}_k\| = 1$), apenas ao longo da linha definida por $\mathbf{X}_k$ (i.e., $\{\lambda \mathbf{X}_k : \lambda \in \mathbb{C}\}$).

2.3 Construção de Códigos

Para resolver o problema de otimização (2.11), propõe-se uma metodologia em duas fases. Na primeira fase resolve-se um problema convexo da classe semi-definida positiva (SDP–Semi Definite Positive), para obter uma aproximação do código óptimo. Na fase seguinte, essa estimativa é refinada através de um algoritmo de descida geodésica (GDA–Geodesic Descent Algorithm), que explora de forma eficiente a restrição da geometria Riemanniana, imposta sobre a potência dos códigos. Suponha-se que se procura desenhar um código de tamanho K . Na tabela 2.1, página 14 apresenta-se a estratégia proposta. O algoritmo apresentado na tabela 2.1 é do tipo *greedy*. Seguidamente detalham-se os passos (3) e (6), respectivamente.

entrada:	M, N, T, K, Υ
passo 1)	Escolher a primeira palavra de código (aleatoriamente gerada, etc.);
passo 2)	Definir $k = 2$;
passo 3)	Correr a relaxação SDP para obter a k -ésima palavra do código;
passo 4)	Definir $k = k + 1$;
passo 5)	se $k \leq K$, voltar ao passo 3);
passo 6)	Executar o algoritmo de descida por geodésicas (GDA) para obter o código final;
saida:	A matriz $\mathcal{X} = [\text{vec}(\mathbf{X}_1) \ \dots \ \text{vec}(\mathbf{X}_K)]$

Tabela 2.1: Algoritmo para Desenho de Códigos

Fase 1: Relaxação SDP. Nesta fase constrói-se um código sub-óptimo $\mathcal{C}^* = \{\mathbf{X}_1^*, \dots, \mathbf{X}_K^*\}$. O código é construído incrementalmente, onde cada palavra de código k obtém-se a partir das $k - 1$ palavras de código entretanto geradas. Existem várias estratégias para a escolha da primeira palavra de código $\mathbf{X}_1^*$. Por exemplo, pode gerar-se aleatoriamente, ou preenchendo as colunas da matriz com os vectores próprios associados aos menores valores da matriz da covariância do ruído. Ao resolver um problema SDP, introduz-se assim uma nova palavra de código.

Supondo que o $\mathcal{C}_{k-1}^* = \{\mathbf{X}_1^*, \dots, \mathbf{X}_{k-1}^*\}$ é o código na $(k - 1)$ -ésima iteração, a palavra de código k é obtida resolvendo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_k^* &= \arg \max_{\text{tr}(\mathbf{X}_k^H \mathbf{X}_k) = 1} f(\mathbf{X}_1^*, \dots, \mathbf{X}_{k-1}^*, \mathbf{X}_k) \\
 &= \arg \max_{\text{tr}(\mathbf{X}_k^H \mathbf{X}_k) = 1} \min_{1 \leq m \leq k-1} \{\lambda_{\min}(\mathbf{L}_{mk}), \lambda_{\min}(\mathbf{L}_{km})\}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Pode mostrar-se que, o problema de optimização definido em (2.12), é equivalente ao

seguinte problema

$$(\mathfrak{X}_k^*, \text{vec}(\mathbf{X}_k^*), t^*) = \arg \max t \quad (2.13)$$

juntamente com as restrições

$$\begin{aligned} \text{LMI}_{A_m}(\mathfrak{X}_k, \text{vec}(\mathbf{X}_k), t) &\succeq \mathbf{0}, \quad m = 1, \dots, k-1 \\ \text{LMI}_{B_m}(\mathfrak{X}_k, \text{vec}(\mathbf{X}_k), t) &\succeq \mathbf{0}, \quad m = 1, \dots, k-1 \\ \text{tr}(\mathfrak{X}_k) &= 1, \quad \mathfrak{X}_k = \text{vec}(\mathbf{X}_k) \text{vec}^H(\mathbf{X}_k) \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que as abreviaturas $\text{LMI}_{A_m}(\mathfrak{X}_k, \text{vec}(\mathbf{X}_k), t)$ e $\text{LMI}_{B_m}(\mathfrak{X}_k, \text{vec}(\mathbf{X}_k), t)$ designam *linear matrix inequalities* (LMIs) nas variáveis $\mathfrak{X}_k$, $\text{vec}(\mathbf{X}_k)$, e t do tipo A e B , respectivamente, para $m = 1, \dots, k-1$. Devido ao limite máximo de páginas, não se define aqui $\text{LMI}_{A_m}(\mathfrak{X}_k, \text{vec}(\mathbf{X}_k), t)$ e $\text{LMI}_{B_m}(\mathfrak{X}_k, \text{vec}(\mathbf{X}_k), t)$.

Devido à condição (2.14) para o *rank* (note que as equações $\mathfrak{X}_k = \text{vec}(\mathbf{X}_k) \text{vec}^H(\mathbf{X}_k)$ e $\text{tr}(\mathfrak{X}_k) = 1$ implicam a condição $\text{rank}(\mathfrak{X}_k) = 1$), o desenho de código traduz-se, uma vez mais, num problema difícil de optimização não-linear. No entanto, com a relaxação desta restrição

$$\mathfrak{X}_k \succeq \text{vec}(\mathbf{X}_k) \text{vec}^H(\mathbf{X}_k) \quad (2.15)$$

e reescrevendo a equação (2.15) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{X}_k & \text{vec}(\mathbf{X}_k) \\ \text{vec}^H(\mathbf{X}_k) & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}$$

o problema de optimização (2.13) é equivalente a

$$(\mathfrak{X}_k^*, \text{vec}(\mathbf{X}_k^*), t^*) = \arg \max t \quad (2.16)$$

com as seguintes restrições

$$\begin{aligned} \text{LMI}_{A_m}(\mathfrak{X}_k, \text{vec}(\mathbf{X}_k), t) &\succeq \mathbf{0}, \quad m = 1, \dots, k-1 \\ \text{LMI}_{B_m}(\mathfrak{X}_k, \text{vec}(\mathbf{X}_k), t) &\succeq \mathbf{0}, \quad m = 1, \dots, k-1 \\ \text{tr}(\mathfrak{X}_k) &= 1, \quad \begin{bmatrix} \mathfrak{X}_k & \text{vec}(\mathbf{X}_k) \\ \text{vec}^H(\mathbf{X}_k) & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

A relaxação da restrição de *rank* 1 é geralmente conhecida como o relaxamento de Shor [52]. O problema de optimização (2.16) é um problema convexo nas variáveis $\mathfrak{X}_k$, $\text{vec}(\mathbf{X}_k)$ e t ; de facto é um problema SDP. Repare-se que, para $K = 256$, $M = 2$, $N = 2$, $T = 8$ e na última passagem pelo ciclo, ou seja, para $k = K$, a variável da saída $\mathfrak{X}_k$ é de dimensão 16×16 , não depende de N nem de K (o número das LMIs é de ordem K). Para resolver o problema de optimização (2.16) usou-se o pacote de software SeDuMi 1.1 [53]. Uma vez resolvido o problema (2.16), é preciso extrair a k -ésima palavra da variável de saída $\mathfrak{X}_k$. Para isso, adoptou-se uma técnica semelhante à descrita em [54]. A técnica consiste na geração de L vectores aleatórios independentes, que obedecem à distribuição gaussiana de média nula, e matriz de covariância $\mathfrak{X}_k$, i.e., $\mathbf{z}_l \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathfrak{X}_k)$, para $l = 1, 2, \dots, L$ (em todas as simulações assumiu-se $L = 1000$). Impondo a restrição de norma unitária, ou

seja, $\mathbf{v}_l = \mathbf{z}_l / \|\mathbf{z}_l\|$ para $l = 1, 2, \dots, L$, pode escolher-se a k -ésima palavra de código a partir de $\mathbf{X}_k^* = \text{ivec}(\mathbf{v}_{l^*})$, onde

$$l^* = \arg \max_{l=1,2,\dots,L} f(\mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, \dots, \mathbf{X}_{k-1}^*, \text{ivec}(\mathbf{v}_l)). \quad (2.17)$$

A função “ivec” é o operador inverso do “vec” (reestrutura o vector TM dimensional numa matriz $T \times M$). Note que $\mathbf{X}_k^*$ é uma palavra de código válida dado que $\text{tr}(\mathbf{X}_k^{*H} \mathbf{X}_k^*) = 1$.

Fase 2: Algoritmo de Descida por Geodésicas. O problema (2.11) requer a optimização de uma função não-diferenciável numa variedade diferenciável $\mathcal{M}$ (produto cartesiano de K esferas). Após a fase 1, ou seja, depois de se ter resolvido o problema de optimização (2.16) $K - 1$ vezes consecutivas, para $k = 2, 3, \dots, K$, obteve-se um código sub-óptimo de tamanho K . Para refiná-lo, recorre-se agora a um algoritmo iterativo, denominado GDA. O algoritmo encontra-se descrito em pormenor na tabela 2.2.

Considere que $\mathcal{C}_k$ é a k -ésima iteração (a inicialização $\mathcal{C}_0$ foi feita na fase 1). Note que a restrição de potência $\text{tr}(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i) = 1$, para $i = 1, 2, \dots, K$, pode ser escrita de forma equivalente

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = 1,$$

onde

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \Re \{\text{vec}(\mathbf{X}_i)\} \\ \Im \{\text{vec}(\mathbf{X}_i)\} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2TM},$$

e $\Re \{\cdot\}$ e $\Im \{\cdot\}$ designam a parte real e imaginária da quantidade complexa, respectivamente. No passo 3, cada $\mathbf{x}_i$ para $i = 1, \dots, K$ é usado para construir o vector $\mathbf{x}$. No passo 4, determina-se um índice do conjunto $\mathcal{A}$ de pares activos de restrição (i, j) , ou seja, $\mathcal{A} = \{(i, j) : f_{ij}(\mathcal{C}_k) \leq f(\mathcal{C}_k) + \epsilon\}$ onde ϵ é arbitrariamente pequeno (em todas as simulações apresentadas optou-se por $\epsilon = 10^{-5}$). No passo 8 verifica-se se existe uma direcção $\mathbf{d}$ de subida simultaneamente para todas as funções f_{ij} com $(i, j) \in \mathcal{A}$. Se existir um $\mathbf{d}$ tal que $\nabla^T f_{i_a j_a}(\mathbf{x}) \mathbf{d} > 0$, para $1 \leq i_a \neq j_a \leq K, a = 1, 2, \dots, z$, a função de custo pode ser melhorada localmente. De forma a resolver o problema de optimização do passo 8, é necessário determinar o gradiente $\nabla f_{i_a j_a}$. Esta direcção $\mathbf{d}$ de subida é procurada em $T_{\mathcal{C}_k} \mathcal{M}$, que corresponde ao espaço tangente de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{C}_k$, e resulta num problema de programação linear. Para garantir que $\mathbf{d}$ pertence ao $T_{\mathcal{C}_k} \mathcal{M}$, a restrição $\mathbb{H} \mathbf{d} = \mathbf{0}_{K \times 1}$ (equivalentemente, $\mathbf{x}_i^T \mathbf{d}_i = 0$ para $i=1, 2, \dots, K$) é introduzida no passo 8.

A restrição $-\mathbf{1}_{2KTM \times 1} \leq \mathbf{d} \leq +\mathbf{1}_{2KTM \times 1}$ limita a solução do problema de programação linear no passo 8. Se a direcção de subida não existir, o algoritmo pára; caso contrário, realiza-se uma pesquisa de Armijo para $f(\mathcal{C})$, ao longo da geodésica que emana de $\mathcal{C}_k$ na direcção $\mathbf{d}$, ver figura 2.2. A pesquisa de Armijo permite assim obter $\mathcal{C}_{k+1}$, e seguidamente repete-se o ciclo. A expressão da geodésica no passo 11), permite verificar que a pesquisa de Armijo resume-se a um problema de procura na superfície esférica $\mathbb{S}^{2TM-1}$, i.e., $\mathbf{x}_i(t)^T \mathbf{x}_i(t) = 1$ para cada $i=1, 2, \dots, K$.

Uma geodésica não é mais do que a generalização de uma linha recta no espaço Euclidiano a uma superfície com curvatura [55]. Dito de uma forma mais clara, o GDA assemelha-se a um método de sub-gradiente, razão pela qual o algoritmo geralmente converge lentamente para os mínimos locais (sublinearmente). Note-se no entanto, que isto não é uma desvantagem, uma vez que os códigos podem ser gerados *off-line*. É importante

Entrada: A matriz $\mathcal{X} = [\text{vec}(\mathbf{X}_1) \ \dots \ \text{vec}(\mathbf{X}_K)]$

passo 1) Determinar o valor da função de mérito,

$$\text{cost} = f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K);$$

passo 2) Definir $\epsilon = 10^{-5}$;

passo 3) Construir o vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re\{\text{vec}(\mathbf{X}_1)\} \\ \Im\{\text{vec}(\mathbf{X}_1)\} \\ \vdots \\ \Re\{\text{vec}(\mathbf{X}_K)\} \\ \Im\{\text{vec}(\mathbf{X}_K)\} \end{bmatrix}$;

passo 4) Determinar z , o número de combinações $(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$, $1 \leq i \neq j \leq K$, de tal modo que $f_{ij}(\mathcal{C}) = \lambda_{\min}(\mathbf{L}_{ij}(\mathcal{C}))$ pertence ao intervalo $[\text{cost}, \text{cost} + \epsilon]$, ou seja, f_{ij} atinge o mínimo. Às combinações $(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ que atingem o mínimo chamam-se combinações activas;

passo 5) Determinar o gradiente, $\nabla f_{i_a j_a}(\mathbf{x})$, para cada combinação activa $(\mathbf{X}_{i_a}, \mathbf{X}_{j_a})$, $1 \leq i_a \neq j_a \leq K, a = 1, 2, \dots, z$;

passo 6) Construir a matriz de gradiente

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \nabla^T f_{i_1 j_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla^T f_{i_z j_z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{z \times 2KTM};$$

passo 7) Construir a matriz

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2^T & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mathbf{x}_K^T \end{bmatrix}_{K \times 2KTM};$$

passo 8) Resolver o programa linear

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}^*, s^*) = & \arg \max s; \\ & \mathbf{G}\mathbf{d} \geq s\mathbf{1}_{z \times 1} \\ & \mathbb{H}\mathbf{d} = \mathbf{0}_{K \times 1} \\ & -\mathbf{1}_{2KTM \times 1} \leq \mathbf{d} \leq +\mathbf{1}_{2KTM \times 1} \end{aligned}$$

passo 9) Se $s \leq 0$, passar para o passo (16);

passo 10) Iniciar $\beta = 0.9$, $c = 0$, $c_{max} = 400$ e $t = 1$;

passo 11) Construir a geodésica

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cos(\|\mathbf{d}_1\|t) + \frac{\mathbf{d}_1}{\|\mathbf{d}_1\|} \sin(\|\mathbf{d}_1\|t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_K \cos(\|\mathbf{d}_K\|t) + \frac{\mathbf{d}_K}{\|\mathbf{d}_K\|} \sin(\|\mathbf{d}_K\|t) \end{bmatrix};$$

passo 12) Determinar o valor temporário da função de mérito,
 $\text{tempcost} = f(\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_K(t))$, onde $\mathbf{X}_i(t) = \text{ivec}(\mathbf{x}_i(t)(1:TM) + j\mathbf{x}_i(t)(TM+1:2TM))$ para $i = 1, 2, \dots, K$;

passo 13) Se $\text{tempcost} > \text{cost}$, então $\text{cost} = \text{tempcost}$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t)$ para $i=1, 2, \dots, K$. Voltar para o passo (3);

passo 14) Incrementar c , actualizar $t = \beta^c$;

passo 15) Se $c \leq c_{\max}$, voltar para o passo (12);

passo 16) Devolver a matriz $\mathcal{X} = [\text{vec}(\mathbf{X}_1) \ \dots \ \text{vec}(\mathbf{X}_K)]$,
 onde $\mathbf{X}_i = \text{ivec}(\mathbf{x}_i(1:TM) + j\mathbf{x}_i(TM+1:2TM))$ para $i = 1, 2, \dots, K$;

Saida: A matriz $\mathcal{X} = [\text{vec}(\mathbf{X}_1) \ \dots \ \text{vec}(\mathbf{X}_K)]$

Tabela 2.2: Algoritmo GDA

salientar que outras abordagens não-geodésicas também podem ter interesse neste problema. Veja-se por exemplo [56], para mais detalhes. O parâmetro ϵ no passo 2 controla a complexidade do problema de optimização no passo 8. Um valor de ϵ demasiado pequeno implica uma convergência lenta do algoritmo, enquanto que um valor grande aumenta a complexidade do problema de programação linear (aumentando z , número de funções activas f_{ij}). Para um código de tamanho $K = 256$, com $T = 8$ e $M = 2$, a matriz do gradiente $\mathbf{G}$ pode ter dimensão 10000×8000 (observação de que $z_{\max} = K(K-1) = 65280$). Embora a matriz $\mathbf{G}$ seja uma matriz esparsa, é conveniente mantê-la numa dimensão moderada.

Nota: A utilidade do passo 3 (SDP) na tabela 2.1 para K grande é uma questão que permanece ainda em aberto. No entanto, com base nas experiências numéricas verifica-se que este passo é bastante útil quando os códigos têm um tamanho pequeno ou moderado. Por exemplo, no caso real, $M = 1$ e $T = 2$, o passo 3 permite obter o código óptimo para $K = 2^p$ onde $p = 1, 2, \dots$. Nestes casos não há necessidade de utilização do passo 6 do algoritmo. Em todas as simulações a seguir apresentadas foi implementado o algoritmo descrito na tabela 2.1.

2.4 Resultados

Apresentam-se a seguir os resultados dos códigos construídos para três casos especiais da matriz de covariância do ruído $\mathbf{\Upsilon}$. Em todas as simulações assumiu-se desvanecimento

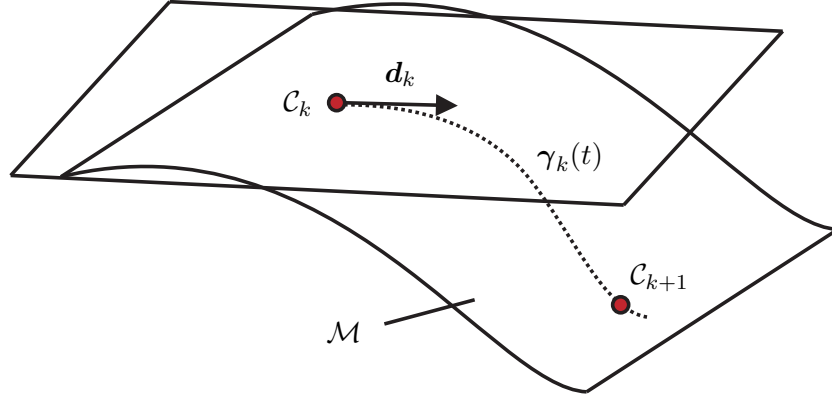


Figura 2.2: Fase 2: Otimização de uma função não-diferenciável num variedade diferenciável

Rayleigh iid para a matriz do canal $\mathbf{H}$, i.e., $h_{ij} \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$.

Primeira categoria: ruído branco no espaço e no tempo

Na primeira categoria foi considerado o caso do ruído branco espaço-temporal, i.e., $\mathbf{\Upsilon} = \mathbb{E}[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \mathbf{I}_{NT}$. Os códigos obtidos são comparados com os apresentados em [26]. Considera-se o caso em que $T = 8$, $M = 3, 2$, ou 1 , $N = 1$ e que o código tem o tamanho $K = 256$. Seja

$$\text{dist} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sqrt{\text{tr} \left(\left(\mathbf{X}_k^H \mathbf{X}_k - \frac{1}{M} \mathbf{I}_M \right)^2 \right)}$$

a distância média entre códigos propostos e constelações unitárias. Para $M = 2$, $T = 8$ and $K = 256$, a distância média é $\text{dist} = 1.6 \cdot 10^{-3}$, enquanto que para $T = 8$, $M = 3$, e $K = 256$ obtém-se $\text{dist} = 1.3 \cdot 10^{-2}$. Como era de esperar, o algoritmo convergiu para constelações de matrizes quase unitárias. Devido ao limite máximo de páginas, apresenta-se uma comparação apenas para o caso em que $M = 3$. Na figura 2.3, mostra-se a probabilidade de erro por símbolo (SER) versus

$$\text{SNR} = \mathbb{E} \left[\|\mathbf{X}_k \mathbf{H}^H\|^2 \right] / \mathbb{E} \left[\|\mathbf{E}\|^2 \right] = N\sigma^2 / \text{tr}(\mathbf{\Upsilon}).$$

A linha contínua com o símbolo “+” e a linha a tracejado com o símbolo “o”, representam os desempenhos dos códigos construídos usando o método apresentado, e de códigos unitários, respectivamente. Considera-se aqui a categoria de ruído branco no espaço e tempo porque já existem construções de códigos disponíveis na literatura para este cenário. Assim, é possível usá-los como termo de referência para aferir o desempenho das novas construções aqui propostas. As simulações mostram que as novas construções replicam o desempenho do estado-de-arte para este caso especial - na verdade, conseguem mesmo um melhoramento marginal.

No caso $M = 1$, apresenta-se na tabela 2.3 uma comparação do códigos propostos com os de Tropp [27] para $T = 2, 3, 4$ e 5 . É importante notar que, os únicos resultados previamente conhecidos são melhorados, e em alguns casos, as novas constelações atingem o limiar de Rankin e são por isso garantidamente óptimas.

RAIO DE EMPACOTAMENTO (GRAUS)					RAIO DE EMPACOTAMENTO (GRAUS)				
T	K	MB	JAT	Rankin	T	K	MB	JAT	Rankin
2	3	60	60	60	4	5	75.52	75.52	75.52
2	4	54.74	54.74	54.74	4	6	70.89	70.88	71.57
2	5	45.00	45.00	52.24	4	7	69.29	69.29	69.30
2	6	45.00	45.00	50.77	4	8	67.79	67.78	67.79
2	7	38.93	38.93	49.80	4	9	66.31	66.21	66.72
2	8	37.43	37.41	49.11	4	10	65.74	65.71	65.91
2	9	35.26	—	48.59	4	11	64.79	64.64	65.27
2	10	33.07	—	48.19	4	12	64.68	64.24	64.76
2	11	31.72	—	47.87	4	13	64.34	64.34	64.34
2	12	31.72	—	47.61	4	14	63.43	63.43	63.99
2	13	28.24	—	47.39	4	15	63.43	63.43	63.69
2	14	27.83	—	47.21	4	16	63.43	63.43	63.43
2	15	26.67	—	47.05	5	6	78.46	78.46	78.46
2	16	25.97	—	46.91	5	6	78.46	78.46	78.46
3	4	70.53	70.53	70.53	5	7	74.55	74.52	75.04
3	5	64.26	64.00	65.91	5	8	72.83	72.81	72.98
3	6	63.43	63.43	63.43	5	9	71.33	71.24	71.57
3	7	61.87	61.87	61.87	5	10	70.53	70.51	70.53
3	8	60.00	60.00	60.79	5	11	69.73	69.71	69.73
3	9	60.00	60.00	60.00	5	12	69.04	68.89	69.10
3	10	54.74	54.73	59.39	5	13	68.38	68.19	68.58
3	11	54.74	54.73	58.91	5	14	67.92	67.66	68.15
3	12	54.74	54.73	58.52	5	15	67.48	67.37	67.79
3	13	51.38	51.32	58.19	5	16	67.08	66.68	67.48
3	14	50.36	50.13	57.92	5	17	66.82	66.53	67.21
3	15	49.80	49.53	57.69	5	18	66.57	65.87	66.98
3	16	49.61	49.53	57.49	5	19	66.57	65.75	66.77
3	17	49.13	49.10	57.31	5	20	66.42	65.77	66.59
3	18	48.12	48.07	57.16	5	21	66.42	65.83	66.42
					5	22	65.91	65.87	66.27
					5	23	65.91	65.90	66.14
					5	24	65.91	65.91	66.02
					5	25	65.91	65.91	65.91

Tabela 2.3: EMPACOTAMENTO NO ESPAÇO PROJECTIVO COMPLEXO: Comparação entre as melhores configurações dos códigos propostos (MB) de K pontos em $\mathbb{P}^{T-1}(\mathbb{C})$ com os codigos de Tropp (JAT) e o limiar do Rankin [27]. O raio de empacotamento duma constelação mede-se como o ângulo agudo entre as linhas mais próximas. O simbolo menos (-) significa que, para o par específico (T, K) , o empacotamento não está disponível.

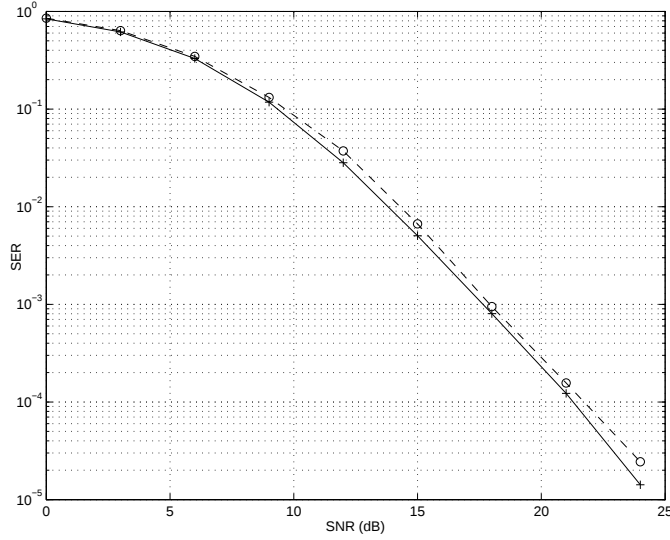


Figura 2.3: Categoria 1 - ruído branco no espaço e no tempo: $T = 8$, $M = 3$, $N = 1$, $K = 256$, $\Upsilon = \mathbf{I}_{NT}$. Linha contínua com o símbolo “+”: códigos propostos; linha a tracejado com o símbolo “o”: códigos unitários.

Segunda categoria: ruído branco no espaço e colorido no tempo

A segunda categoria corresponde ao caso em que o ruído é branco no espaço, e colorido no tempo, i.e., $\Upsilon = \mathbf{I}_N \otimes \Sigma(\boldsymbol{\rho})$ onde o vector $\boldsymbol{\rho} : T \times 1$ é a primeira coluna duma matriz Hermitiana Toeplitz $\Sigma(\boldsymbol{\rho})$. Uma vez que não existe nenhum outro trabalho onde seja abordado o problema de construção de códigos para o caso de ruído branco no espaço e colorido no tempo, os códigos obtidos (desenhados especificamente para este cenário) são comparados com os códigos unitários [26]. O objectivo deste cenário é demonstrar o aumento de desempenho obtido, quando no processo da construção do código se usa a informação sobre a estatística do ruído. Os códigos obtidos desta forma designam-se aqui por códigos adaptados. A figura 2.4 mostra o resultado da simulação para $T = 8$, $M = 2$, $N = 1$, $K = 67$ e $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.85; 0.6; 0.35; 0.1; \text{zeros}(3,1)]$. As linhas contínuas representam o desempenho dos códigos obtidos usando o método proposto, enquanto que as linhas a tracejado representam o desempenho dos códigos unitários. Em ambos os casos, o símbolo “+” indica que o receptor GLRT foi implementado. O símbolo “quadrado” indica que o receptor ML foi implementado. Pode ver-se que, para uma SER de 10^{-3} , os códigos propostos obtêm um ganho de 3 dB em relação aos códigos unitários. Por fim, comparam-se também os códigos propostos com os códigos unitários, considerados estado da arte e apresentados em [32], para o caso $T = 4$, $M = N = 2$, $K = 256$ e $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.8; 0.6; 0.1]$. A figura 2.5 mostra o resultado das simulações. Verifica-se que, para uma SER de 10^{-3} , os códigos propostos obtiveram um ganho de 2 dB em relação aos códigos unitários.

Terceira categoria: $\mathbf{E} = \mathbf{s} \boldsymbol{\alpha}^T + \mathbf{E}_{\text{temp}}$

Na terceira categoria, considera-se o caso em que a matriz do ruído tem a seguinte forma: $\mathbf{E} = \mathbf{s} \boldsymbol{\alpha}^T + \mathbf{E}_{\text{temp}}$. Este cenário modela uma fonte de interferência $\mathbf{s}$ (com a matriz de covariância Υ_s conhecida) onde o vector complexo $\boldsymbol{\alpha}$ representa o desvanecimento conhecido entre as antenas de recepção e a fonte de interferência. A matriz de covariância

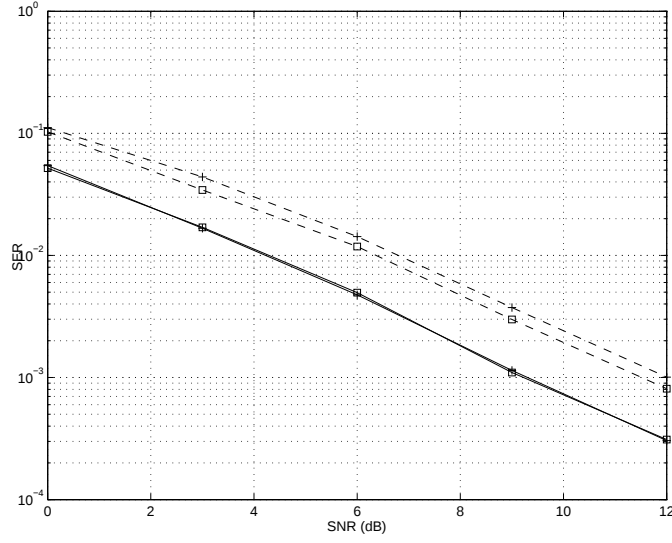


Figura 2.4: Categoria 2 - ruído branco no espaço e colorido no tempo: $T = 8$, $M = 2$, $N = 1$, $K = 67$, $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.85; 0.6; 0.35; 0.1; \text{zeros}(3,1)]$. Linhas contínuas: códigos propostos; linhas tracejadas: códigos unitários; linhas com o símbolo “+”: receptor GLRT; linhas com o símbolo “quadrado”: receptor ML.

da $\mathbf{E}_{\text{temp}}$ pertence à segunda categoria. Assim sendo, a matriz da covariância do ruído é dada por $\mathbf{\Upsilon} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^H \otimes \mathbf{\Upsilon}_s + \mathbf{I}_N \otimes \Sigma(\boldsymbol{\rho})$. De novo, tal como foi feito para a segunda categoria, comparam-se os códigos propostos, desenhados especificamente para este cenário, i.e., adaptados, com os códigos unitários [26]. A figura 2.6 mostra os resultados das experiências para $T = 8$, $M = 2$, $N = 2$, $K = 32$ e $\mathbf{s} = [1; 0.7; 0.4; 0.15; \text{zeros}(4,1)]$, $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.8; 0.5; 0.15; \text{zeros}(4,1)]$ e $\boldsymbol{\alpha} = [-1.146 + 1.189i; 1.191 - 0.038i]$. As linhas contínuas representam o desempenho dos códigos obtidos usando o método proposto, enquanto que as linhas a tracejado representam o desempenho dos códigos unitários [26]. O símbolo “+” indica que o receptor GLRT foi implementado. O símbolo “quadrado” indica que o ML receptor foi implementado. Para uma SER de 10^{-3} , verifica-se que os códigos propostos obtiveram um ganho de 2 dB em relação aos códigos unitários.

Como conclusão final, deixa-se aqui uma nota (intuitiva) sobre os resultados obtidos. Sabe-se que a correlação do ruído melhora o desempenho do sistema. Assim, mesmo que se pudessem utilizar constelações unitárias, tal deveria ser evitado. Ao fazê-lo, consideram-se os pressupostos do caso de ruído branco, logo o ganho que provém do facto do ruído ser colorido seria perdido. Este trabalho propõe exactamente uma forma de desenho de códigos, que leva explicitamente em conta a informação sobre a estatística do ruído, no caso de comunicações MIMO não coerentes.

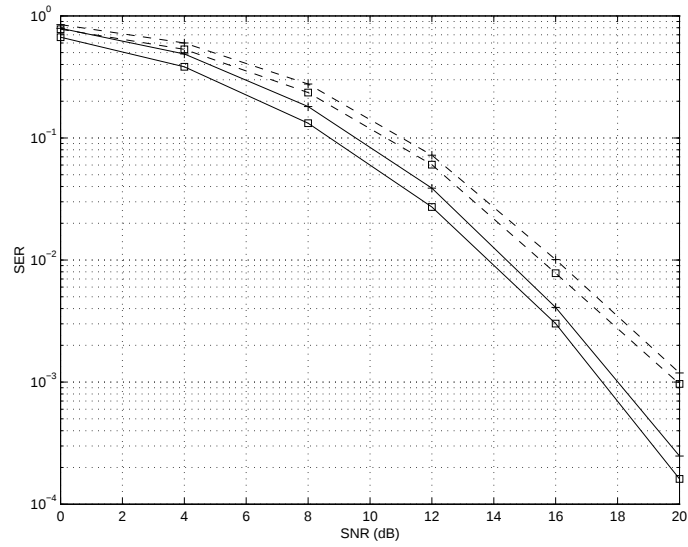


Figura 2.5: Categoria 2 - ruído branco no espaço e colorido no tempo: $T = 4$, $M = 2$, $N = 2$, $K = 256$, $\rho = [1; 0.8; 0.6; 0.1]$. Linhas contínuas: códigos propostos; linhas tracejadas: códigos unitários encontrados em [32]; linhas com o símbolo “+”: receptor GLRT; linhas com o símbolo “quadrado”: receptor ML.

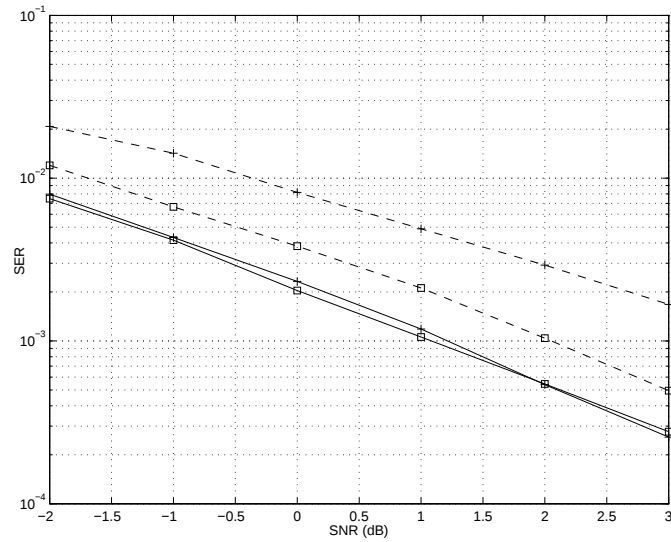


Figura 2.6: Categoria 3: $T = 8$, $M = 2$, $N = 2$, $K = 32$. Linhas contínuas: códigos propostos; linhas tracejadas: códigos unitários; linhas com o símbolo “+”: receptor GLRT; linhas com símbolo “quadrado”: receptor ML.

Capítulo 3

Desenho do Receptor e Construção de Códigos no Regime de Baixa SNR

3.1 Sumário

O presente capítulo encontra-se dividido em duas secções. Na secção 3.2 introduz-se a análise da PEP para o regime de baixa SNR, descreve-se o receptor GLRT e o critério resultante para o desenho de códigos, que recorre ao conhecimento da estatística do ruído. Na secção 3.3 construíram-se constelações usando os resultados obtidos, para vários casos de interesse. As simulações mostram que os códigos assim obtidos podem ser incorporados em esquemas de decodificação que usam receptores de Bayes, com *priors* não-uniformes.

3.2 Canal com Desvanecimento Determinístico: Análise da PEP para o regime de Baixa SNR

Modelo de dados e pressupostos. No presente capítulo mantém-se o modelo de dados introduzido no capítulo 2, equação (2.1). Consideram-se também as mesmas condições apresentadas na secção 2.2.

Receptor. A estrutura do receptor é equivalente à que foi introduzida no capítulo 2, equação (2.7).

Análise para o regime de baixa SNR. Segue-se a análise da PEP para o regime de baixa SNR. Seja $P_{\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j}$ a probabilidade do receptor GLRT decidir por $\mathbf{X}_j$ quando foi enviado $\mathbf{X}_i$. Pode mostrar-se que para $T \geq 2M$ é válida a seguinte aproximação

$$P_{\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j} \approx P(Y > \mathbf{g}^H \mathbf{L}_{ij} \mathbf{g}), \quad (3.1)$$

com

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{x}_i^H \boldsymbol{\Pi}_j^\perp \mathbf{x}_i, \quad \boldsymbol{\Pi}_j^\perp = \mathbf{I}_{TN} - \mathbf{x}_j (\mathbf{x}_j^H \mathbf{x}_j)^{-1} \mathbf{x}_j^H,$$

$\mathbf{x}_k = \mathbf{Y}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}_k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, e $Y = \sum_{m=1}^{MN} \sin \alpha_m (|a_m|^2 - |b_m|^2)$ onde a_m, b_m são variáveis aleatórias iid gaussianas complexas, com média nula e variância unitária, i.e., $a_m, b_m \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{CN}(0, 1)$ para $m = 1, \dots, MN$. Os ângulos α_m são os ângulos principais entre

os subspaços definidos por $\mathcal{X}_i$ e $\mathcal{X}_j$. Para o caso do ruído branco no espaço e no tempo, i.e., $\mathbf{\Upsilon} = \mathbb{E}[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \mathbf{I}_{NT}$ e $M = 1$, de (3.1), tem-se

$$P_{\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_j} \approx P \left(\sum_{i=1}^N (|a_i|^2 - |b_i|^2) > \|\mathbf{g}\|^2 \sin \alpha_1 \right), \quad (3.2)$$

onde se assume $\sin \alpha_1 \neq 0$ (note que para $\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{I}_{NT}$ existem no máximo M ângulos principais diferentes, de multiplicidade N). No capítulo 2 deduziu-se a expressão da PEP para o regime de alta SNR e $T \geq 2M$. Para $M = 1$ e $\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{I}_{NT}$, esta é dada por

$$P_{\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_j} = \mathcal{Q} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \|\mathbf{g}\| \sin \alpha_{ij} \right). \quad (3.3)$$

As equações (3.2) e (3.3) mostram que a probabilidade de decidir a favor da $\mathbf{x}_j$ quando foi enviado $\mathbf{x}_i$ depende do canal $\mathbf{g}$ e da geometria relativa entre os códigos $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$. Como $P_{\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_j} = P_{\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}_i}$ as PEPs são simétricas, o que permite obter uma métrica intuitiva para o desenho de códigos. Ao analisar a PEP nos casos extremos (baixa e alta SNR) quer-se que os códigos $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ estejam o mais separados possíveis, i.e., o problema de encontrar bons códigos traduz-se uma vez mais no problema conhecido de empacotamento em espaços projectivos complexos [27].

Infelizmente, é muito difícil propor um critério para o desenho de códigos a partir de (3.1), quando $M > 1$ e $\mathbf{\Upsilon} \neq \mathbf{I}_{TN}$. A principal razão prende-se com o facto de as PEPs não serem simétricas neste caso. Assim, recorre-se uma vez mais a um limite superior sobre a PEP. A partir de (3.1), é possível obter a seguinte desigualdade,

$$P_{\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j} \leq P \left(Z > \|\mathbf{g}\|^2 \lambda_{\min}(\mathbf{L}_{ij}) \right), \quad (3.4)$$

onde $Z = \sum_{m=1}^{MN} |a_m|^2$. O limite (3.4) permite assim propor um critério para o desenho de códigos. Os resultados obtidos experimentalmente permitem confirmar a sua eficácia.

Construção de Códigos. A partir do código $\mathcal{C} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K\}$, obtém-se o seguinte problema de optimização

$$\mathcal{C}^* = \arg \max_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}} f(\mathcal{C}) \quad (3.5)$$

onde

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{C} = \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_K\} \mapsto f(\mathcal{C})$$

e

$$f(\mathcal{C}) = \min\{f_{ij}(\mathcal{C}) : 1 \leq i \neq j \leq K\}$$

com $f_{ij}(\mathcal{C}) = \lambda_{\min}(\mathbf{L}_{ij})$. O código $\mathcal{C}$ pode ser visto como um ponto do espaço

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_K) : \text{tr}(\mathbf{X}_k^H \mathbf{X}_k) = 1\}.$$

É-de notar que o critério para o desenho de códigos (3.5) é equivalente ao que foi apresentado no capítulo 2, ver (2.11), no regime de alta SNR. Assim, o algoritmo apresentado na tabela 2.1 vai ser também usado nos casos a seguir estudados.

3.3 Resultados

Devido ao limite máximo de páginas e sem perda de generalidade, apresentam-se apenas os resultados das simulações para o caso do ruído branco no espaço e colorido no tempo. A figura 3.1 mostra o resultado da simulação para $T = 6$, $\text{SNR} = -6$ dB, $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.85; 0.6; 0.35; 0.1; 0]$. A linha contínua, a tracejada-pontilhada e a linha a tracejado representam o desempenho das constelações com oito pontos obtidas com o algoritmo proposto, que são adaptadas à estatística do ruído, quando o receptor GLRT é implementado para $M = 1$, $M = 2$ e $M = 3$, respectivamente. A linha pontilhada com o símbolo “+” representa o desempenho das constelações com oito pontos que foram construídas para o caso do ruído branco no espaço e no tempo, i.e., $\boldsymbol{\Upsilon} = \text{E}[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \mathbf{I}_{NT}$, quando a detecção é feita mediante o uso do receptor GLRT e $M = 1$. A linha contínua com o símbolo “+” representa o desempenho das constelações com 17 pontos obtidas, adaptadas à estatística do ruído e $M = 1$. A linha tracejado com o símbolo “o” representa o desempenho das constelações obtidas com 17 pontos, construídas para $\boldsymbol{\Upsilon} = \text{E}[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \mathbf{I}_{NT}$ e $M = 1$. Ambas as constelações de 17 pontos fazem uso do receptor MAP, com *priors* não-uniformes [47] (constelações com um ponto na origem com probabilidade $\frac{1}{2}$, e restantes pontos na esfera com probabilidades iguais).

Ao comparar o desempenho das constelações de 17 pontos propostas, com as constelações não adaptadas construídas para $\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{I}_{TN}$, os resultados para uma SER de $2 \cdot 10^{-4}$ permitem concluir que, os códigos adaptados obtêm um desempenho equivalente usando menos duas antenas no receptor. Verifica-se igualmente que, para uma SER de $2 \cdot 10^{-4}$, e $M = 1$, os códigos adaptados de 8 pontos permitem igualmente poupar duas antenas, quando comparados com os códigos não adaptados construídos para $\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{I}_{TN}$.

A figura 3.2 mostra o resultado das simulações para $T = 8$, $K = 32$, $\text{SNR} = -10$ dB e $\boldsymbol{\rho} = [1; 0.8; 0.5; 0.15; \text{zeros}(4,1)]$. A linha contínua representa o desempenho constelações propostas para $M = 1$, que são adaptadas à estatística do ruído. A linha contínua com o símbolo “o” representa o desempenho das constelações adaptadas para $M = 2$. A linha tracejada representa o desempenho das constelações propostas para $M = 1$, adaptadas a $\boldsymbol{\rho} = [1; \text{zeros}(7,1)]$. A linha tracejada com o símbolo “o” representa o desempenho das constelações propostas adaptadas a $\boldsymbol{\rho} = [1; \text{zeros}(7,1)]$, para $M = 2$. Todas as constelações fazem uso do receptor GLRT. Pode concluir-se que, para uma SER de 10^{-2} os resultados obtidos permitem poupar 6 antenas do lado do receptor, quando comparados com constelações propostas para $M = 1$, adaptadas à estatística do ruído com as constelações não adaptadas construídas para $\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{I}_{TN}$ e $M = 1$.

Para terminar, a análise das figuras 3.1 e 3.2 permite concluir que, no caso do receptor GLRT e no regime de baixa SNR, devem-se construir códigos apenas para uma antena de transmissão, adaptados à estatística do ruído. No caso em que o canal obedece a uma distribuição estatística de Rayleigh não correlacionada, mostra-se que estes novos códigos são também úteis no caso em que se empregam receptores MAP, que descodificam constelações com *priors* não-uniformes.

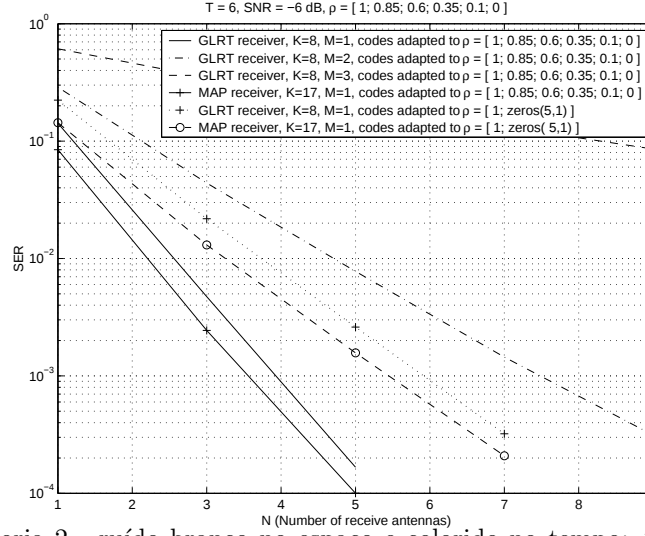


Figura 3.1: Categoria 2 - ruído branco no espaço e colorido no tempo: $T = 6$, $\text{SNR} = -6$ dB, $\rho = [1; 0.85; 0.6; 0.35; 0.1; 0]$. A linha contínua, a tracejada-pontilhada e a linha tracejada - constelações com oito pontos que são adaptadas a estatística do ruído para $M = 1$, $M = 2$ e $M = 3$, respectivamente. A linha pontilhada com o símbolo “+”-constelações com oito pontos que foram construídas para o caso do ruído branco no espaço e no tempo $\Upsilon = E[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \mathbf{I}_{NT}$ e $M = 1$. A linha contínua com o símbolo “+”-constelações com 17 pontos que são adaptadas a estatística do ruído e $M = 1$. A linha tracejada com o símbolo “o”-constelações com 17 pontos que foram construídas para $\Upsilon = E[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \mathbf{I}_{NT}$ e $M = 1$. Constelações com 8 pontos usam GLRT receptor. Constelações com 17 pontos usam MAP receptor.

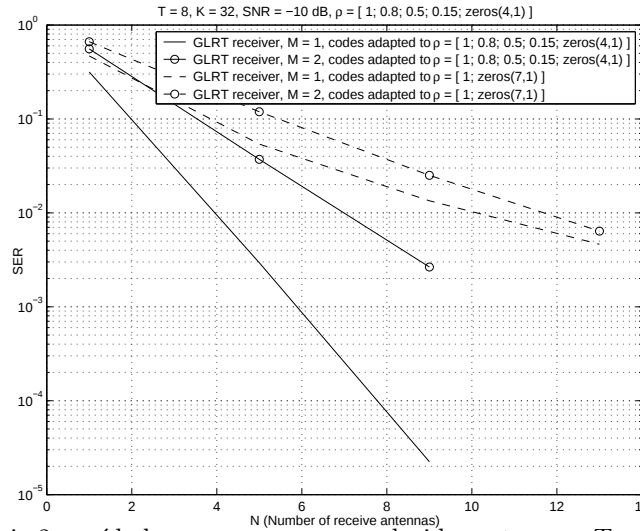


Figura 3.2: Categoria 2 - ruído branco no espaço e colorido no tempo: $T = 8$, $K = 32$, $\text{SNR} = -10$ dB, $\rho = [1; 0.8; 0.5; 0.15; \text{zeros}(4,1)]$. A linha contínua-constelações para $M = 1$ adaptadas ao $\rho = [1; 0.8; 0.5; 0.15; \text{zeros}(4,1)]$, a linha contínua com o símbolo “o”-constelações para $M = 2$ adaptadas ao $\rho = [1; 0.8; 0.5; 0.15; \text{zeros}(4,1)]$, a linha tracejada-constelações para $M = 1$ adaptadas ao $\rho = [1; \text{zeros}(7,1)]$, a linha tracejada com o símbolo “o”-constelações para $M = 2$ adaptadas ao $\rho = [1; \text{zeros}(7,1)]$. Todas as constelações usam GLRT receptor.

Capítulo 4

Conclusão

O trabalho apresentado pode ser dividido em duas partes: regime de alta e baixa SNR.

No capítulo 2, foi introduzida uma nova técnica sistemática de desenho de STC para sistemas de comunicação multi-antenas não-coerentes. Em comparação com outras abordagens, a matriz do canal foi modelada como um parâmetro determinístico desconhecido. Não se restringe a aplicabilidade desta abordagem ao assumir um determinado modelo estocástico. Foi permitida ainda uma estrutura de correlação arbitrária para o ruído de observação gaussiano. No caso de ruído colorido, as simulações mostraram que os STC obtidos com o método aqui proposto ultrapassam significativamente o desempenho dos códigos anteriormente conhecidos. Para o caso especial do ruído branco espaço-temporal, os códigos apresentados no presente trabalho, recuperaram a estrutura unitária previamente conhecida. Para este cenário específico e para $M = 1$, mostrou-se que o problema de encontrar bons códigos coincide com o problema bem conhecido de empacotamento no espaço projectivo complexo. Foram comparadas as melhores configurações dos códigos propostos, com os códigos apresentados em [27] e o limiar de Rankin. Verifica-se que os melhores resultados conhecidos são ultrapassados e, nalguns casos, os códigos aqui apresentados atingiram mesmo o limiar de Rankin. Apresentou-se também uma análise teórica, que conduziu a um limite superior para a PEP no cenário de alta SNR.

No capítulo 3, ao contrário da maioria das abordagens feitas no regime de baixa SNR, assumiu-se que o canal é determinístico, i.e., nenhum modelo estocástico se lhe encontra associado. Foi apresentada uma análise da PEP no regime de baixa SNR para o receptor GLRT, e o critério de desenho de códigos, que toma em linha de conta a informação sobre a correlação do ruído. Para o caso especial de uma única antena de transmissão e ruído gaussiano branco espaço-temporal, foi demonstrado que, o problema de encontrar bons códigos corresponde também ao conhecido problema de empacotamento no espaço projectivo complexo. Foram apresentadas novas constelações espaço-temporais para cenários específicos de redes sem fios. Mostrou-se igualmente que se devem construir códigos para apenas uma antena de transmissão, que estejam adaptados à estatística do ruído. As simulações mostram que, estes novos códigos são também úteis para os receptores MAP que descodificam constelações com *priors* não-uniformes.

Bibliografia

- [1] J. H. Winters, "On the capacity of radio communication systems with diversity in a Rayleigh fading environment," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 5, no. 5, pp. 871-878, June. 1987.
- [2] I. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels," *Technical Memorandum, AT&T Bell Laboratories*, 1995.
- [3] G. J. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas," *Bell Labs Technical Journal*, vol. 1, no. 2, pp. 41-59, 1996.
- [4] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criterion and code construction," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 744-765, Mar. 1998.
- [5] S. A. Alamouti, "A simple transmit diversity technique for wireless communication," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, no. 8, pp. 1451-1458, Oct. 1998.
- [6] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. Calderbank, "Space-time block codes from orthogonal designs," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 5, pp. 145-1467, July 1999.
- [7] A. V. Geramita and J. Seberry, "Orthogonal Designs, Quadratic Forms and Hadamard Matrices," *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, vol. 43. New York and Basel, Marcel Dekker, 1979.
- [8] J. Radon, "Lineare scharen orthogonaler matrizen," *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, vol. 1. pp. 114, 1922.
- [9] B. Hassibi and B. Hochwald, "High-rate codes that are linear in space and time," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 7, pp. 1804-1824, July 2002.
- [10] J. -C. Belfiore, G. Rekaya, and E. Viterbo, "The Golden code: A 2×2 full rate space-time code with non-vanishing determinant," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 4, pp. 1432-1436, Apr. 2005.
- [11] G. D. Golden, C. J. Foschini, R. A. Valenzuela, and P. W. Wolniansky, "Detection algorithm and initial laboratory results using V-BLAST space-time communication architecture," *Electronics Letters*, vol. 35, no. 1, pp. 14-16, Jan. 1999.
- [12] G.J. Foschini, D. Chizhik, M. J. Gans, C. Papadias, R. A. Valenzuela, "Analysis and performance of some basic space-time architectures," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 21, no. 3, pp. 303-320, Apr. 2003.
- [13] J. -C. Belfiore, G. Rekaya, and E. Viterbo, "A new approach to layered space-time coding and signal processing," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, no. 6, pp. 2321 - 2334, Sep. 2001.
- [14] M. O. Damen, A. Chkeif, and J. -C. Belfiore, "Lattice codes decoder for space-time codes," *IEEE Communication Letters*, vol. 4, no. 5, pp. 161-163, May 2000.
- [15] S. Verdú, *Multiuser Detection.*, Cambridge University Press, 1998.
- [16] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication.*, Cambridge University Press, 2005.
- [17] A. Hottinen, O. Tirkkonen, and R. Wichman, *Multi-antenna transceiver techniques for 3G and beyond.*, John Wiley & Sons, 2003.
- [18] D. Gesbert, M. Shafi, Da-Shan Shiu, P. J. Smith, and A. Naguib, "From theory to practice: An overview of MIMO space-time coded wireless systems," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 21, no. 3, pp. 281-302, April 2003.
- [19] H. Bolcskei, D. Gesbert, C. B. Papadias, and A. -J. van der Veen (eds.), *Space-Time Wireless Systems: From Array Processing to MIMO Communications.*, Cambridge University Press, 2006.
- [20] E. G. Larsson and P. Stoica, *Space-Time Block Codes for Wireless Communications.*, Cambridge University Press, 2003.
- [21] T. L. Marzetta and B. M. Hochwald, "Capacity of a mobile multiple-antenna communication link in Rayleigh flat fading," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 1, pp. 139-157, Jan. 1999.
- [22] B. M. Hochwald and T. L. Marzetta, "Unitary space-time modulation for multiple-antenna communication in Rayleigh flat-fading," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46, no. 2, pp. 543-564, Mar. 2000.
- [23] W. Dai, Y. Liu, and B. Rider, "Quantization Bounds on Grassmann Manifolds and Applications to MIMO Communications," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, no. 3, pp. 1108 - 1123, March 2008.
- [24] M. Brehler and M. K. Varanasi, "Asymptotic error probability analysis of quadratic receivers in Rayleigh fading channels with applications to a unified analysis of coherent and noncoherent space-time receivers," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, no. 6, pp. 2383-2399, Sept. 2001.
- [25] L. Zheng and D. N. C. Tse, "Communication on the Grassmann manifold: a geometric approach to the noncoherent multiple-antenna channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 2, pp. 359-383, Feb. 2002.

- [26] B. M. Hochwald, T. L. Marzetta, T. J. Richardson, W. Sweldens, and R. Urbanke, "Systematic design of unitary space-time constellations," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46, no. 6, pp. 1962-1973, Sep. 2000.
- [27] J. A. Tropp, "Topics in sparse approximation", *Ph.D. dissertation: Univ. Texas at Austin*, 2004.
- [28] D. Agrawal, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, "Multiple-antenna signal constellations for fading channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, no. 6, pp. 2618-2626, Sept. 2001.
- [29] J. H. Conway, R. H. Hardin, and N. J. A. Sloane, "Packing lines, planes, etc.: Packings in Grassmannian spaces," *Experimental Mathematics*, vol. 5, pp. 139-159, Sept. 1996.
- [30] A. Barg and D. Yu. Nogin, "Bounds on packings of spheres in the Grassmann manifold," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 9, pp. 2450-2454, Sep 2002
- [31] M. L. McCloud, M. Brehler, and M. K. Varanasi, "Signal design and convolutional coding for noncoherent space-time communication on the block-Rayleigh-fading channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 5, pp. 1186-1194, May 2002.
- [32] I. Kammoun and J. -C. Belfiore, "A new family of Grassmann space-time codes for noncoherent MIMO systems," *IEEE Communications Letters*, vol. 7, no. 11, pp. 528-530, Nov. 2003.
- [33] W. Fulton and J. Harris, "Representation Theory". Springer- Verlag, 1991.
- [34] A. M. Cipriano, I. Kammoun, and J. -C. Belfiore, "Simplified decoding for some non-coherent codes over the Grassmannian," in *Proc. of IEEE International Conference on Communications (ICC)*, Seoul, Korea, 2005.
- [35] A. M. Cipriano and I. Kammoun, "Linear approximation of the exponential map with application to simplified detection of noncoherent Systems," in *Proc. of IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, Cannes, France, 2006.
- [36] R. H. Gohary and T. N. Davidson, "Non-coherent MIMO communication: Grassmannian constellations and efficient detection," submitted to *IEEE Transactions on Information Theory*.
- [37] A. V. Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms., Addison-Wesley, 2007.
- [38] A. Lozano, A. Tulino, and S. Verdú, "Multiple-antenna capacity in the low-power regime," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 2527-2544, Oct. 2003.
- [39] M. J. Borran, A. Sabharwal, and B. Aazhang, "On design criteria and construction of non-coherent space-time constellations," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 2332-2351, Oct. 2003.
- [40] S. A. Aldosari and J. M. F. Moura, "Detection in Sensor Networks: The Saddlepoint Approximation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 1, pp. 327-340, Jan. 2007.
- [41] I. Abou-Faycal, M. D. Trott, and S. Shamai, "The capacity of discrete-time memoryless Rayleigh fading channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, no. 4, pp. 1290-1301, May 2001.
- [42] S. Verdú, "Spectral efficiency in the wideband regime," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 6, pp. 1319-1343, June 2002.
- [43] V. Prelov and S. Verdú, "Second-order asymptotics of mutual information," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, no. 8, pp. 1567-1580, Aug. 2004.
- [44] B. Hajek and V. Subramaniam, "Capacity and reliability function for small peak signal constraints," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 4, pp. 828-839, Apr. 2002.
- [45] C. Rao and B. Hassibi, "Analysis of multiple-antenna wireless links at low SNR," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, no. 9, pp. 2123-2130, Sep. 2004.
- [46] X. Wu and R. Srikant, "MIMO channels in the low SNR regime: communication rate, error exponent and signal peakiness," in *Proc. of IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, San Antonio, TX USA, 2004.
- [47] S. G. Srinivasan and M. K. Varanasi, "Constellation Design with Unequal Priors and New Distance Criteria for the Low SNR Noncoherent Rayleigh Fading Channel," in *Proc. of Conference on Information Sciences and Systems*, The Johns Hopkins University, Baltimore, MD USA, 2005.
- [48] S. G. Srinivasan and M. K. Varanasi, "Code design for the low SNR noncoherent MIMO block Rayleigh fading channel," in *Proc. of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Adelaide, Australia, 2005.
- [49] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory.*, Part I New York: Wiley, 1968.
- [50] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing.*, Detection Theory, Prentice Hall, 1998.
- [51] L. L. Scharf, *Statistical Signal Processing: Detection, Estimation, and Time Series Analysis.*, New York: Addison-Wesley Publishing Co., 1990.
- [52] N. Shor, "Dual quadratic estimates in polynomial and Boolean programming," *Annals of Operation Research*, vol. 25, pp. 163-168, 1990.
- [53] J. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization Methods and Software*, vol. 11-12, pp. 625-653, 1999. (Updated for Version 1.05, <http://sedumi.mcmaster.ca>)
- [54] M. X. Goemans, "Semidefinite programming in combinatorial optimization," *Mathematical Programming*, vol. 79, pp. 143-161, 1997.
- [55] A. Edelman, T. A. Arias, and S. T. Smith, "The geometry of algorithms with orthogonality constraints," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 20, no. 2, pp. 303-353, 1998.
- [56] J. H. Manton, "Optimization algorithms exploiting unitary constraints," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 3, pp. 635-650, Mar. 2002.
- [57] L. R. Welch, "Lower bounds on the maximum cross-correlation of signals," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-20, no. 3, pp. 397-399, May 1974.