AMÉLIA ORQUÍDEA GARCIA GOMES

NOVOS DESAFIOS À APRENDIZAGEM E AUTONOMIA EM MATEMÁTICA. ESTUDO CRÍTICO E COMPARATIVO.

Orientadora: Maria de Lourdes de Pina Manique Ferreira Braga de Figueiredo Pereira

Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias
Instituto de Educação

Lisboa
2013

AMÉLIA ORQUÍDEA GARCIA GOMES

NOVOS DESAFIOS À APRENDIZAGEM E AUTONOMIA EM MATEMÁTICA. ESTUDO CRÍTICO E COMPARATIVO.

Tese apresentada para obtenção do Grau de Doutor em Educação, no Curso de Doutoramento em Educação, conferido pela Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias.

Orientadora: Prof.ª Doutora Maria de Lurdes de Pina Manique Ferreira Braga de Figueiredo Pereira

Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Instituto de Educação

Lisboa

2013

Triste não é mudar de ideias.

Triste é não ter ideias para mudar.

(Francis Bacon)

Ao meu pai, o meu anjo da guarda.

AGRADECIMENTOS

Este espaço é dedicado àqueles que contribuíram para a realização desta tese e a quem desejo manifestar o meu verdadeiro agradecimento e reconhecimento:

— À Professora Doutora Maria de Lourdes Pereira, pela orientação, pelo rigor científico e pela amizade que firmamos, que permitiu o meu crescimento intelectual e alcançar os objetivos a que me propus neste trabalho.

— Às pessoas com quem me cruzei no mundo académico e que me marcaram: Professora Doutora Alcina Martins e Professora Doutora Nazaré Coimbra.

— Aos meus e aos outros alunos que participaram interessados ou não, entusiasmados ou não, aos colegas que cooperaram e aos que não estiveram disponíveis, mas a quem se deve grande parte deste trabalho.

— À minha amiga Maria Antónia Santos, excelente professora de Português, que me ajudou nas questões linguísticas, me ouviu e deu achegas pertinentes, mas especialmente pela paciência que demonstrou.

— Aos meus amigos Diego Issicaba, Inês Campos, Aurélia Sota e Ana Cabral que me incentivaram, ouviram e ajudaram.

— À Babi, à minha mãe Maria Henriqueta e ao Mauro, pelo apoio incondicional nos bons e nos maus momentos, pelos mimos e pelo «colinho», sem os quais esta jornada não teria sido possível.

A todos, o meu sincero agradecimento…

RESUMO

O presente estudo tem, como objetivo, analisar e comparar criticamente os últimos programas de Matemática, confrontando o programa homologado em 1991 (DGEBS, 1991) com o de 2007 (Ponte et al., 2007), tendo em conta o processo de ensino-aprendizagem, a diversificação de estratégias, atividades e instrumentos, a autonomia da aprendizagem, bem como a auto e a heteroavaliação.

Durante dois anos letivos, analisamos o impacto da implementação do programa de 2007 (Ponte te al., 2007) junto de alunos e professores. O processo de investigação é de natureza qualitativa, pois envolve a obtenção de dados descritivos, provenientes do contacto do investigador com a situação em estudo. Na recolha de dados privilegiamos não só as tarefas matemáticas, mas também recorremos a outros instrumentos – relatório matemático, teste em duas fases, diário de bordo, entrevistas a professores e ao relatório final de avaliação do PM II/PMEB.

A análise dos dados revelou que, de uma forma geral, perante diferentes abordagens, os alunos tiveram uma aprendizagem mais eficaz, mostrando-se mais autónomos e competentes. Tal foi comprovado em diversos momentos de auto e heteroavaliação, dado que os alunos se mostraram capazes de refletir individualmente, em pares ou em grupo, numa perspetiva construtivista de avaliação reguladora.

Palavras-chave: Matemática, Autonomia, Competências, Aprendizagens, Avaliação, Alunos.

ABSTRACT

The aim of the present study is to critically analyze and compare the latest programs of Mathematics, confronting the program approved in 1991 (DGEBS, 1991) ~~to~~ with the one from 2007 (Ponte et al., 2007), taking into account the process of teaching and learning, the variety of strategies, activities and tools and learning autonomy, as well as self and hetero assessment.

For two academic years we have analyzed the impact of the implementation of the 2007 program (Ponte et al., 2007) with students and teachers. The research process is of qualitative nature because it involves obtaining descriptive data from the contact of the researcher with the situation under study. In collecting data we focused not only on the mathematical tasks, but we also resorted to other instruments – mathematical report, test in two phases, the logbook, teacher interviews and the final report of the PM II/PMEB.

The data analysis revealed that, in general, faced with different approaches, students had more effective learning, being at the same time more autonomous and competent. This was confirmed on several moments of self and hetero assessment, since the students were able to reflect individually, in pairs or in groups, in a constructivist perspective for regulatory assessment.

Keywords: Mathematics, Autonomy, Competence, Learning, Assessment, Students.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Introdução

A Matemática é uma ciência viva, que se encontra hoje, mais do que nunca, em rápido desenvolvimento, proliferando cada vez mais em novos ramos, que mudam não só a sua fisionomia, como até a sua essência.

Sebastião e Silva (1977, p.87)

O ensino e a aprendizagem da Matemática têm vindo a ser influenciados pelos desafios e mudanças, em consequência da globalização e da massificação da educação. Atualmente, os jovens são parte integrante de um mundo que sofreu grandes alterações a vários níveis, pelo que o ensino da Matemática deverá atender a essa nova realidade.

Mais do que uma mudança, o Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007), do Ensino Básico, constitui um desafio relativamente à organização das escolas, materiais de apoio, métodos de ensino, formação dos docentes e processo curricular. Assim, Ponte e Sousa (2010, p. 11) afirmam que "um novo programa de Matemática permite legitimar e reforçar muito do trabalho mais inovador que se vem realizando nas escolas, ao mesmo tempo que traz novos desafios para os professores".

No que se refere ao anterior Programa de Matemática (DGEBS, 1991), o ensino era baseado na memorização e na mecanização, com uma linguagem muito específica e formal. Apesar dos avanços tecnológicos e de um maior leque de recursos disponíveis, os resultados finais e de exames não têm vindo a mostrar melhorias e os alunos continuam a revelar pouca motivação e dificuldades na aprendizagem.

Desta forma, o sistema educativo sentiu necessidade de se alterar, adaptando-se às novas exigências. A Matemática, e em particular o ensino da disciplina, passa a ser um «alvo» preferencial de estudos e investigações, sempre com o objetivo de aumentar os níveis de sucesso de uma disciplina que sempre apresentou resultados que não alcançam as metas de sucesso educativo estabelecidas. Socialmente, trata-se de uma disciplina que serve de base a uma infinidade de atividades profissionais, é critério de seleção para estudos superiores e tem grande utilidade para a vida quotidiana. Numa conferência realizada em 2002, Ponte (p. 13) declara que os motivos que justificam a importância do ensino da Matemática são "a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações de interesse pessoal, recreativo, cultural, cívico e profissional".

Neste enquadramento, a nossa investigação tem, como objetivo, a análise crítica e comparativa dos programas de Matemática, confrontando o Programa homologado em

2007 (Ponte et al., 2007) com o de 1991 (DGEBS, 1991), tendo em conta o processo de ensino-aprendizagem, a diversificação de estratégias, atividades e instrumentos, a autonomia da aprendizagem, bem como a auto e a heteroavaliação. Estes aspetos serão objeto de análise documental comparativa, entre os programas citados anteriormente.

No sentido da análise da evolução dos Programas, e consequentes mudanças ocorridas na disciplina de Matemática, formulamos a seguinte Pergunta de Partida:

- **De que forma a evolução dos programas de Matemática evidencia um novo paradigma de ensino-aprendizagem, potenciando uma avaliação formativa, baseada na auto e heteroavaliação, a partir da concretização de tarefas matemáticas?**

Assim, e em concordância, estabelecemos o seguinte **objetivo geral**:

- Analisar comparativamente as principais diferenças entre o programa de 1991 (DGEBS, 1991), e o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ponte et al., 2007), considerando os conteúdos, as tarefas, a avaliação, a aprendizagem e a autonomia.

Tendo em vista a melhor orientação para a nossa investigação, e considerando o objetivo geral, procedemos à discriminação dos **objetivos específicos**:

- Relacionar a aprendizagem com uma progressiva autonomia, através da concretização de tarefas matemáticas específicas;
- Analisar a interligação entre a aprendizagem e a auto e heteroavaliação, para o sucesso educativo;
- Relacionar a gestão curricular em sala de aula, com o aperfeiçoamento das práticas educativas;
- Analisar comparativamente o programa de 1991 (DGEBS, 1991) e o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), considerando caraterísticas diferenciadoras;
- Verificar a consolidação nas práticas da mudança paradigmática preconizada pelo Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (Ponte et al., 2007).

Na nossa investigação optamos pelo Estudo de Caso, recorrendo a uma metodologia qualitativa, focando a produção criativa, investigativa e reflexiva de alunos e as perceções dos docentes, através do inquérito por entrevista. O contexto de investigação decorrerá, sobretudo, na sala de aula, de forma a obter dados descritivos, numa situação natural. O plano de recolha de dados é flexível, evidenciando-se a componente descritiva e exploratória do estudo (Flick, 2005; Stake, 2009; Tuckman, 2005).

A nossa opção pela metodologia qualitativa envolve a obtenção de dados, provenientes do contacto do investigador com a situação em estudo. Para tal, recorreremos a variados instrumentos, tais como tarefas matemáticas, diário de bordo, teste em duas fases, relatório matemático e relatório final de PMII /PMEB.

Quanto à estruturação o presente estudo divide-se em cinco capítulos. Na Introdução, sintetizamos as razões da escolha do tema, definimos a pergunta de partida, os objetivos do estudo, bem como a metodologia utilizada.

Nos três primeiros capítulos, procedemos a uma revisão da literatura.

No primeiro capítulo, procederemos a uma descrição e sistematização da aprendizagem, em interrelação com a autonomia (Arends, 2008; Barbot & Camatarri, 2001). Abordamos, também, temas como as experiências e os estilos de aprendizagem (Brendefur & Frykholm, 2000; Gardner, 2007), a comunicação matemática (Menezes & Guerreiro, 2010) e algumas estratégias de ensino e aprendizagem (Font, 2007), especificamente da Matemática.

No segundo capítulo, analisamos o currículo, em termos concetuais, considerando uma gestão flexível e a diferenciação pedagógica, com aplicação à Matemática (Leite & Fernandes, 2002; Pacheco, 2005). Também analisamos, à luz do PMEB (Ponte et al., 2007), as tarefas matemáticas, tendo em conta estratégias e práticas (Correia, 2002; Stein & Smith, 2008).

Quanto ao terceiro capítulo, efetuamos uma análise comparativa entre os Programas de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991) e de 2007 (Ponte et al., 2007), relativamente a temas e conteúdos e questões organizacionais. Abordamos o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001) e as Metas Curriculares (DGE, 2013).

Iniciamos a nossa Investigação Empírica, no quarto capítulo, tendo em conta o enquadramento teórico, apresentamos a estratégia metodológica, as técnicas e os instrumentos utilizados para a recolha de dados, bem como a contextualização do estudo.

O quinto capítulo abrange a análise e comparação de dados, finalizando com a discussão de resultados.

Nas Conclusões, tecemos considerações finais sobre o presente trabalho, destacando os resultados principais.

Esperamos que esta investigação, possa ajudar a contribuir para uma melhoria das práticas educativas e do processo de ensino-aprendizagem de todos os intervenientes, na disciplina de Matemática.

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Capítulo I – Aprendizagem e Autonomia

1. Introdução

> *Fazer aprender pressupõe a consciência de que a aprendizagem ocorre no outro e só é significativa se ele se apropriar dela ativamente.*
>
> Roldão (2009, p. 47)

Acompanhando as alterações do conceito de aprendizagem, os objetivos do Ensino Básico, estabelecidos na Lei de Bases do Sistema Educativo – Lei nº 49/2005 de 30 de Agosto, apontam, ainda que de formas diversas, para a necessidade de formar os alunos, de modo a que estes desenvolvam o espírito crítico e a autonomia. Como é afirmado em epígrafe (Roldão, 2009), é necessário que o aluno se aproprie ativamente da sua aprendizagem, através de procedimentos de auto e heterorregulação entre pares. As Metas Curriculares (DGE, 2013) reforçam a importância de um ensino construtor do pensamento individual, da autonomia e da responsabilidade, fontes de uma verdadeira cidadania. Esta focalização está relacionada com a tendência geral, observada na educação do século XXI, para um ensino mais centrado no aluno, na sua autonomia e responsabilidade pela construção da própria aprendizagem (Barbot & Camatarri, 2001).

Neste entendimento, no presente capítulo iremos caracterizar e relacionar a aprendizagem e a autonomia, considerando estratégias e práticas conducentes ao desenvolvimento do aluno, tendo por finalidade mais qualidade e sucesso educativos.

2. A aprendizagem

Numa perspetiva histórico-cultural, os processos de aprendizagem e desenvolvimento encontram-se relacionados, tendo por base as interações sociais vividas pelos sujeitos, em diversos contextos formais e não formais (Canário, 2005).

A aprendizagem constitui um conceito multifacetado, englobando diferentes significados e vertentes, quer no sentido de transmissão, quer no sentido de aquisição de conhecimentos. Do final do século XIX, até à atualidade, surgiram diversos estudos que se debruçaram sobre a definição e caracterização do processo de aprendizagem. Desde o Behaviorismo, sustentado por John Watson que, por sua vez, se baseava em investigadores como Vladimir Bechterev ou Ivan Pavlov (Valadares & Moreira, 2009), até correntes como o Construtivismo, tendo por base teorias de Vygotsky (1979) e Piaget (1975), foram inúmeros os contributos para a compreensão e o aperfeiçoamento da aprendizagem, tal como a seguir se explicita.

2.1 O processo de aprendizagem

Um dos aspetos fundamentais do processo de aprendizagem ancora na relação entre desenvolvimento e aprendizagem. Esta não pode ser entendida nem como dependência da aprendizagem, em relação ao desenvolvimento, segundo a posição de Piaget (1975), nem do desenvolvimento em relação à aprendizagem, de acordo com a posição behaviorista. Na apreciação de Vygotsky (1979), um psicólogo russo do início do século XX, a instrução geralmente precede o desenvolvimento. A problematização da articulação entre ensino, aprendizagem e desenvolvimento levou Vygotsky (1977) à definição da noção de *Zona de Desenvolvimento Próxima ou Potencial* (ZDP), que corresponde à distância que separa aquilo que o aluno é capaz de fazer sozinho, daquilo que ele pode fazer com a ajuda dos seus pares e do professor. Ou seja, com orientação, a criança tem capacidade de construir e aperfeiçoar. A aprendizagem, desde a infância, em meio escolar, pressupõe colocar, ao aluno, desafios intelectuais, o que aproxima o conceito de *ZDP* do conceito de situação-problema, pela ultrapassagem de obstáculos cognitivos e pelo conhecimento assimilado, ou seja, significativo.

Numa visão global (Fosnot, 2007; Valadares & Moreira, 2009), enumeram algumas características distintivas:

i. A aprendizagem é o desenvolvimento, não é consequência do mesmo. De acordo com Valadares e Moreira (2009, p. 30), “aquilo que já se sabe e como se sabe é importante para o que se vai aprender.”;
ii. A aprendizagem beneficia com os erros, de tal forma que os mesmos não devem ser escondidos, depreciados ou contornados, mas sim analisados e compreendidos (pedagogia do erro);
iii. A aprendizagem deve ser reflexiva e dialogada, uma vez que “é fundamental o debate de ideias (…) num ambiente construtivista onde todos aprendam com todos” (Idem, 2009, p.32);
iv. A aprendizagem conduz processualmente a novas ideias e conceitos, que, através de experiências de aprendizagem são generalizados,

> alterados ou anulados, isto é, "o único bom ensino é aquele que se adianta um pouco ao desenvolvimento cognitivo atual" (Ibidem, 2009, p. 31).

Desta forma, a aprendizagem é um processo, que origina alterações a nível qualitativo de quem aprende. Essas mudanças podem ocorrer através de técnicas de ensino, ou aquisição de hábitos, e têm implícitas intenções de aprender, que podem decorrer por procura, ou pelo método de tentativa e erro. Trata-se de uma modificação do comportamento, podendo decorrer de forma ordenada ou não, e ser resultado de observações e/ou experiências (Arends, 2008; Huete & Bravo, 2009).

O processo de aprendizagem cognitivo inclui subprocessos mentais, de aquisição de *skills* complexos, que incluem os estádios envolvidos nessa aquisição e o acesso ao armazenamento do conhecimento procedimental, na memória de longo prazo, para uso posterior (Matlin, 2005). De acordo com Coimbra (2008), os três estádios a considerar são:

i. Cognitivo (instruções da tarefa);
ii. Associativo (conversão do conhecimento declarativo em procedimental);
iii. Autónomo, pela autorregulação da *performance*.

Por isso, para investigadores como Valadares e Moreira (2009, p. 27) "a aprendizagem deve ir modificando e acrescentando novos significados, acerca do mundo e das experiências de vida, de modo a provocar a desejada integração harmoniosa". Ou seja, a aprendizagem ocorre sempre que um novo conhecimento é incorporado, para utilização futura, em qualquer situação, pessoal e profissional.

Tendo em conta que a finalidade do processo de ensino-aprendizagem é a aprendizagem significativa, Ausubel (1968) e Novak (2000) enumeram quatro características fundamentais da aprendizagem significativa, a Matemática:

i. A aprendizagem significativa implica que ocorra uma assimilação eficaz dos conteúdos matemáticos;
ii. A aprendizagem significativa permite não só a aquisição de novos conhecimentos matemáticos, como também a alteração dos já adquiridos, em função dos recentemente obtidos;
iv. A aprendizagem significativa proporciona ao aluno uma assimilação e distinção dos novos conhecimentos matemáticos;

v. A aprendizagem significativa pressupõe que o aluno relacione, de forma eficaz, e criando ligações lógicas, os conhecimentos matemáticos adquiridos.

Neste enquadramento, o ensino-aprendizagem da Matemática é descrito como uma progressão da intuição para a dedução, por Huete e Bravo (2009, p. 23):

> “ o processo de ensino e aprendizagem da Matemática inicia-se a partir da intuição e progressivamente aproxima-se da dedução. Essa forma de construir o conhecimento matemático relega, em parte, qualquer tentativa de se apropriar de modo mecânico de procedimentos e algoritmos para a resolução de problemas reais. Por outro lado, vincula tal procedimento a um planejamento de seu ensino e aprendizagem, fundamentados no nível de cognição dos alunos.”

Os mesmos autores também são da opinião que a aprendizagem de conteúdos matemáticos, de forma significativa, não implica que, mais tarde, haja uma correta aplicação dos mesmos. A aprendizagem deverá passar por momentos de observação, questionamento, formulação de hipóteses e conjeturas, estabelecendo ligações entre conceitos novos e os já adquiridos e conduzindo, sempre que possível, a conclusões, a incorporar pelo aluno, para utilização futura (Novak, 2000). A aprendizagem significativa “exige que se construa paralelamente fatos, conceitos, princípios, procedimentos e estratégias relativas ao conhecimento matemático” (Huete & Bravo, 2009, p. 24).

O Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (PMEB) (Ponte et al.,2007) referencia a aprendizagem significativa como um processo, que deve decorrer a partir de uma grande variedade de experiências e materiais, que reforcem a aprendizagem e levem a que os alunos aprendam mais e melhor, com tarefas direcionadas. Os conceitos matemáticos adquiridos beneficiam, em grande escala, quando são antecedidos de atividades lúdicas estruturadas e com aplicação prática, ou seja, englobando representações do quotidiano.

A maturidade dos alunos é também um dos fatores a ter em conta, já que é a base para a formalização concetual. Ainda no Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007), é feita referência às relações interpessoais e ao trabalho colaborativo, na sala de aula (Arends, 2008), entre aluno-aluno e aluno-professor, como facilitadores de construção de aprendizagem significativa.

A aprendizagem significativa a Matemática deverá passar o limite inerente à disciplina e constituir um suporte de conhecimento para outras áreas, que não só as relacionadas com as ciências exatas. Por isso, investigadores como Stein, Engle, Smith e Hughes (2008, p. 29) referem que “the practices are also not a comprehensive prescription for mathematics learning. Learning mathematics well results from engagement in a sequence of carefully planned and orchestrated lessons, in addition to polishing the pedagogy surrounding individual tasks". Ainda do ponto de vista dos mesmos, podemos sintetizar as cinco práticas fundamentais do professor, relativamente à aprendizagem matemática dos seus alunos, tal como se esquematizam na figura 1.

Antecipar → Monitorizar → Selecionar → Sequenciar → Estabelecer conexões

Selecionar ↓

Aprendizagem significativa

Figura 1 - Práticas para a aprendizagem significativa a Matemática

Fonte: Adaptado de Stein et al. (2008).

Neste contexto, somos da opinião de Freire (2007, p. 47), quando declara que "saber ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção". O mesmo autor (Idem, p. 69) afirma que "aprender para nós é construir, reconstruir, constatar para mudar, o que não se faz sem abertura ao risco e à aventura do espírito".

2.2 Estilos de aprendizagem

Em qualquer disciplina, o envolvimento do aluno perante a aprendizagem é fundamental e, no caso da Matemática, não é exceção. Para atingir um objetivo, o aluno canaliza as suas capacidades cognitivas e afetivas, pois envolve-se diretamente na sua aprendizagem (Ponte, Brocado & Oliveira, 2006).

Um estilo de aprendizagem é o modo que cada aluno utiliza para adquirir conhecimento, não sendo apenas a forma como aprende, mas também a ação durante a aprendizagem. Essa aquisição é feita de forma única e pessoal, abarcando aspetos cognitivos, afetivos e fisiológicos (Alonso, Gallego & Honey, 2002). Ensinar através da descoberta, considerando os estilos de aprendizagem dos alunos, é utilizar uma variedade de abordagens diferenciadas, o que permite um conhecimento mais abrangente e, consequentemente obter resultados positivos. Deste modo, a «forma» do aluno realizar a sua aprendizagem é, no verdadeiro sentido, o seu estilo de aprendizagem. A criação de experiências educacionais de aprendizagem será tanto mais eficaz, quanto mais adequado for o tipo de abordagem, dado que os alunos têm estilos diferentes de aprendizagem. Não há um aluno igual a outro. Os conhecimentos prévios e as preferências de cada aluno apresentam diferenças individuais, a ter em conta na planificação e concretização do ensino-aprendizagem.

Segundo estudos realizados por Amaral e Barros (2007), podemos melhorar a qualidade de ensino-aprendizagem, se potenciarmos a forma como os alunos aprendem e a sua capacidade de avaliação, e se os mesmos forem capazes de aprender com experiências presentes e passadas, que servem de base para o futuro. Os próprios professores têm a sua preferência por estilos de aprendizagem específicos e essas escolhas influenciam o estilo de aprendizagem dos seus alunos. Um docente que queira proporcionar um ensino eficaz, terá de procurar apreender o estilo de aprendizagem dos seus discentes e adotar estratégias adequadas (Roldão, 2009).

De acordo com Gardner (2007), existem, pelo menos, sete estilos de aprendizagem conhecidos: físico, interpessoal, intrapessoal, linguístico, matemático, musical e visual. Estes estilos não são incompatíveis, pelo contrário, muitas vezes complementam-se.

Um aluno que se pauta pelo estilo físico ou corporal-cinestésico é um aprendiz com boa coordenação motora, o que lhe permite ter mais facilidade na manipulação de objetos e na realização de exercícios físicos. O movimento é essencial para a sua aprendizagem. As aulas, com manipulação de objetos e utilização de computador e recursos multimédia, são as que mais o atraem (Silver, Strong & Perini, 2010).

O discente interpessoal carateriza-se por preferir o trabalho em grupo e de pesquisa. Assim, um trabalho de projeto, em equipa, é o seu ideal. Advoga Gardner (2007, p.27) que este estilo “está baseado numa capacidade nuclear de perceber distinções entre os outros, em especial, contrastes em seus estados de ânimo, temperamentos, motivações e intenções”.

Por sua vez, um aluno com um estilo intrapessoal é aquele que possui um ritmo de aprendizagem muito próprio, preferindo trabalhar sozinho, uma vez que é persistente e o seu rendimento aumenta quando está só (Arends, 2008). É reflexivo e tem um raciocínio lógico aprofundado. Os projetos independentes são os mais apropriados para este perfil. Gardner (2007, p. 28) afirma que este tipo de alunos possui “ um conhecimento dos aspectos internos de uma pessoa: o acesso ao sentimento da própria vida, à gama das próprias emoções, à capacidade de discriminar essas emoções e eventualmente rotulá-las e utilizá-las, como uma maneira de entender e orientar o próprio comportamento”.

Relativamente a um aluno que tem uma excelente memória e capacidade de se expressar através da escrita ou oralmente, diz-se que o seu estilo é linguístico. Os projetos que possam ter uma componente ligada à linguagem verbal serão, sem dúvida, os que mais o atraem (Alonso et al., 2002; Silver et al., 2010).

No caso do discente matemático, ou lógico-matemático, este distingue-se por preferir classificar objetos, utilizar tabelas e recorrer a mapas concetuais. Possui um pensamento lógico apurado e tem facilidade em assimilar processos complexos. A realização de pesquisas científicas, a comprovação de teorias e a utilização de jogos lúdicos são as estratégias que permitirão uma melhor relação deste tipo de conhecimento (Gardner, 2007).

Por outro lado, o aluno de estilo musical é aquele cujo mundo gira em torno da música e dos sons. O trabalho multimédia é o mais apropriado e eficaz (Amaral & Barros, 2007; Silver et al., 2010).

O discente que tira mais proveito da pintura e da imagem tem um estilo visual. Demonstra facilidade em organizar os seus materiais. Os projetos que envolvam interpretação de mapas, tabelas ou projeções com recurso a suporte informático serão aqueles que mais o cativarão (Alonso et al., 2002; Amaral & Barros, 2007).

Assim, é premente que se reconheça e estimule os variados estilos de aprendizagem, para que, mobilizando estilos e experiências de aprendizagem, os alunos rentabilizem as suas capacidades, no processo de ensino-aprendizagem e consequentemente, adquiram mais capacidades e competências.

2.3 Experiências de aprendizagem

A maturidade dos alunos é fundamental, para que sejam matematicamente competentes e possam desenvolver a sua experiência, com base na reflexão.

A utilização de recursos variados, o contacto com aspetos históricos, o desenvolvimento e a utilização da Matemática, ao longo da escolaridade básica, são momentos essenciais, para que todos os alunos possam alargar o seu campo experimental. A resolução de problemas, a concretização de atividades de investigação, a realização de projetos e jogos permitem que os alunos tenham oportunidade de diversificar essas mesmas experiências. Ainda dentro do mesmo contexto, Antão (1995,p.25) afirma que "a utilização de diferentes exercícios descongestiona e desformaliza as aulas", motivando a aprendizagem.

Na disciplina de Matemática, a resolução de problemas surge em múltiplas atividades, e em conjunto com o raciocínio e a comunicação. Os problemas apresentados não devem ser de resolução repetitiva e automática, mas constituir desafios, para os quais se procura que o aluno recorra a diversas estratégias e diferentes métodos de resolução (Ma, 2009).

A transversalidade da Matemática com diferentes áreas do saber, proporciona situações nas quais os alunos podem explorar, investigar, resolver, testar suposições e justificar as suas conclusões. Qualquer objeto de estudo matemático faculta a realização de atividades de investigação (Lima, 2004).

A interdisciplinaridade constitui o momento ideal para a realização de projetos (Roldão, 2009). Estes podem ser realizados em grupo, dentro e fora da sala de aula, durante um dado período temporal. A partir de uma planificação com explicitação de objetos e conteúdos, os projetos implicam concretização conjunta, com consequente apresentação dos resultados obtidos.

A atividade lúdica é, sem dúvida, aquela que combina, com maior facilidade, raciocínio, estratégia, comunicação e reflexão. Os jogos estratégicos, de observação ou de memorização, desenvolvem competências matemáticas e implicam o desenvolvimento do aluno, em termos pessoais e sociais, sejam jogos de equipa ou não (Aharoni, 2008).

Tal como anteriormente referido, a Matemática tem ligação às mais variadas áreas do conhecimento e essa mesma relação tem existido ao longo da história do Homem. As atividades, que permitem ao aluno visualizar a Matemática na História (por exemplo, o nónio), ou em profissões de hoje (por exemplo, na Engenharia), consolidam conhecimentos técnicos e possibilitam a utilização de instrumentos tecnológicos, mesmo que não se recorra à Matemática para os aplicar.

A Matemática está, portanto, intrinsecamente ligada à evolução tecnológica, indispensável para o desenvolvimento social, bem como a atividades profissionais com grande prestígio: é a ciência dos padrões e da generalização, indispensável à aprendizagem de outras disciplinas, como a Física, a Química e a Economia, entre outras (Neves, Guerreiro & Neves, 2002). São fatores transversais de aprendizagem a comunicação matemática, a prática compreensiva de procedimentos e a exploração de conexões.

Comunicar matematicamente, oralmente ou por escrito, implica leitura, interpretação e elaboração de pequenos textos, com uma linguagem rigorosa e científica. Por exemplo, a realização de um relatório matemático obriga a uma aprendizagem. Um relatório matemático implica pesquisa, organização, escrita e apresentação, tendo por base a investigação de fontes de conhecimento e o saber e a aplicação da linguagem científica (Nunes, 2004).

A prática compreensiva de procedimentos deve proporcionar a aquisição de destreza e não ser uma atividade repetitiva e sem significado. O entendimento e a significação de experiências matemáticas válidas apuram essa mesma agilidade, seja no cálculo mental, no recurso a uma fórmula, na elaboração de figuras geométricas ou na utilização de instrumentos (Bicudo, 1999).

A compreensão concetual, dentro de cada tema matemático, e entre os vários temas, assim como com as outras áreas curriculares, deve ser aprofundada através de estratégias de ensino e aprendizagem.

2.4 Estratégias de ensino e aprendizagem

A heterogeneidade é uma caraterística cada vez mais visível nas turmas, pois a vivência dos alunos permite-lhes serem detentores de um leque de conceções muito diferentes. O assunto da aula nem sempre é o mais estimulante, em função dos seus interesses (Arends, 2008). Para que os alunos se sintam motivados, o professor tem de recorrer a estratégias que respeitem os diferentes ritmos de aprendizagem. É necessário que o docente utilize uma pedagogia diferenciada, tendo em conta uma aprendizagem significativa (Font, 2007, p. 37):

> “ podemos definir as estratégias de aprendizagem como processos de tomada de decisões (conscientes e intencionais) nos quais o aluno escolhe e recupera, de forma coordenada, os conhecimentos de que necessita para cumprir uma determinada exigência ou objectivo, dependendo das características da situação educativa em que se produz a acção.”

Nas palavras de Roldão (2009, p. 29), “uma estratégia justifica-se sempre pela resposta às questões: como vou organizar a acção e porquê, tendo em conta o para quê e o para quem? (…) Com que meios, actividades, tarefas, em que ordem e porquê?”

Tendo em conta a especificidade das estratégias, e adotando alguns princípios, para a formulação de estratégias de aprendizagem, defendidos por autores como Font (2007) e Barbot e Camatarri (2001), elaboramos o quadro 1.

Quadro 1 - Princípios para a formulação de estratégias de aprendizagem

Princípios para estratégias de aprendizagem	**Envolvimento dos alunos**: o objetivo é exigir que os alunos se envolvam na estratégia que os vai ajudar.
	Aprendizagens básicas: o objetivo é identificar e ensinar os conhecimentos base necessários para a aplicação de estratégias.
	Aprendizagem da estratégia: o objetivo é o professor manter o enfoque na instrução, partindo do conhecimento prévio e natural que tem sobre a estratégia.
	***Feedback* das aprendizagens**: o docente deve reconhecer e recompensar o empenho do aluno pelas aprendizagens adquiridas.
	Domínio das estratégias: os alunos devem ser capazes de recorrer às estratégias que vão adquirindo, em diferentes etapas ao longo do processo de ensino-aprendizagem, sempre que necessário.
	Generalizar o uso de estratégias: os professores devem fomentar o uso de estratégias, bem como demonstrar a sua utilidade.
	Adaptar e desenvolver estratégias: o objetivo das estratégias é mais do que uma simples utilização. É incentivar a modificação de estratégias já criadas, bem como a criação de próprias.

Fonte: Adaptado de Font (2007) e Barbot e Camatarri (2001).

Qualquer estratégia de aprendizagem tem como objetivo facilitar a compreensão de um conteúdo e possibilitar uma aprendizagem significativa, potenciando a autonomia do sujeito da aprendizagem. Tal como afirmam Lopes da Silva e Sá (1993, p.19),“as estratégias de aprendizagem podem ser definidas, a um nível mais complexo, como planos formulados pelos estudantes para atingirem objectivos de aprendizagem e, a um nível mais específico, como qualquer procedimento adoptado para a realização de qualquer tarefa”.

Na opção pelas estratégias, a aplicar em sala de aula, é essencial o papel do professor. Contudo, é importante um trabalho colaborativo com o aluno, na seleção de estratégias e materiais, de forma a implicar o discente na sua própria aprendizagem. Segundo Fernandes (2005, p.26), “as aprendizagens significativas, as chamadas aprendizagens com compreensão ou aprendizagens profundas, são reflexivas, construídas activamente pelos alunos e auto-reguladas. Por isso, os alunos (são) sujeitos activos na construção das suas estruturas do conhecimento”. Em consequência, o professor deverá orientar o aluno, no sentido de uma aprendizagem consciente e autorregulada, com participação ativa em todo o processo.

Para escolher a melhor estratégia de ensino a seguir, o professor deverá ter em conta os seguintes fatores: o conteúdo, o procedimento a utilizar, os pontos comuns com outros conteúdos, no que diz respeito aos procedimentos específicos da disciplina e os de síntese (um mapa concetual, um resumo, um índice, entre outros). Em acréscimo, deverá atender à complexidade da aprendizagem e do contexto, ao fator tempo, para elaboração e reflexão sobre o produzido, à personalidade do próprio profissional, à opção pelo trabalho individual ou em grupo e, por fim, à finalidade do trabalho pedagógico (Valente, 2004).

O professor não é só um conhecedor científico, mas sobretudo um orientador. Por isso, deverá refletir sobre as práticas, durante e após a ação. As orientações metodológicas gerais do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (Ponte et al.,2007, p.8) referem um conjunto de tarefas:

> " (…) o professor deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização. Para além da realização das tarefas propriamente ditas, o ensino – aprendizagem tem de prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas. Ouvir e praticar são actividades importantes na aprendizagem de matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem."

Quando o professor atua como docente, a sua ação torna-se mais facilitada, se conseguir que o aluno seja capaz de entender conceitos, relacioná-los e criar novos conhecimentos, a partir dos já adquiridos. A figura 2 resume, de forma simples, o processo de ensinar os alunos, a atuarem de forma estratégica:

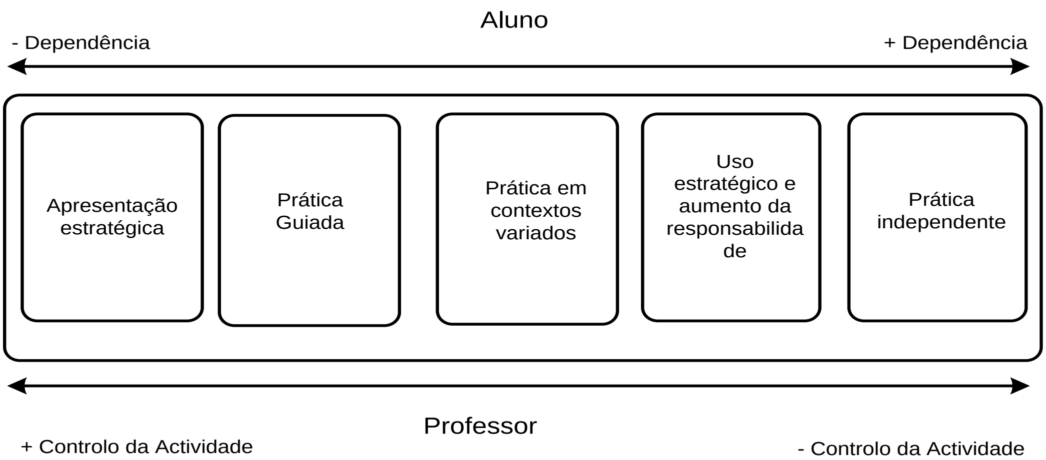


Figura 2 - Uso estratégico de procedimentos no ensino-aprendizagem

Fonte: Font (2007, p.91).

Para que a aprendizagem seja eficaz, será necessário ensinar os alunos a procurar e selecionar informação relevante, dotá-los da capacidade de entendimento sobre o que aprendem e como aprendem, proporcionar momentos de reflexão e potenciar uma auto e heteroavaliação partilhadas.

Como afirma Quintas (1998, p.59):

> “ toda a criança é diferente e por isso o professor que se encontra perante uma realidade escolar terá que atender de uma maneira eficaz a todas as diferenças. (…) deverá escolher estratégias (…) ter em conta os factores relacionados com a organização e estruturação do tempo e dos recursos materiais a utilizar. O papel do educador/professor não se limita à organização do trabalho dentro da escola.”

De acordo com Ausubel (1968) e Arends (2008), a aprendizagem significativa é um processo, no qual os novos conhecimentos se relacionam com os já existentes. Com base nas aquisições do dia-a-dia, o aluno reconstrói o seu próprio saber, através de desestruturações, desequilíbrios e consequentes reestruturações e equilíbrios. Desta forma, o discente cria um novo saber, estabelecendo ligações concetuais, ao longo do tempo, as quais levam a uma facilitação do entendimento de novas informações e permitem uma significação efetiva do saber e do saber-fazer adquiridos.

Assim, dentro de um variado leque de atividades e estratégias de ensino e aprendizagem, iremos abordar as que nos parecem mais pertinentes e relevantes, no âmbito do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007).

2.4.1 Atividades lúdicas – os jogos

As aprendizagens não acontecem de forma espontânea, mas dependem da interferência do professor ou de algum colega que sirva como mediador, entre o conteúdo e a aprendizagem (Valadares & Moreira, 2009; Vygotsky, 1979).

Neste contexto, é possível compreender os jogos como mais do que um simples entretenimento, para distrair os alunos. As atividades lúdicas ocupam um lugar de destaque na educação e, em especial, na aprendizagem. Estimulam o crescimento e o desenvolvimento, a coordenação motora, as capacidades cognitivas e o trabalho individual, em pares e em grupo.

O jogo, enquanto estratégia, obriga a que o aluno tenha ação e reação, possibilitando, por exemplo, o desenvolvimento da comunicação. A recorrência aos jogos coloca os alunos perante momentos de aprendizagem, já que estes estimulam o raciocínio, de forma a atingir níveis superiores, através de aquisição de conceitos e da reconstrução do conhecimento. Os jogos permitem a interação entre alunos, e alunos e professores, bem como uma aprendizagem interativa. A investigadora Tezani (2004, p. 6) explica que:

> “ quando uma criança exprime suas dificuldades para compreender, interpretar ou manejar algum conhecimento novo, já não é apenas o professor que deve ser ativo e encontrar a forma de motivar os alunos em relação ao problema, mas sim todos os integrantes do grupo devem colaborar para que isso ocorra, através de jogos e atividades lúdicas. (…) Acreditamos que os jogos podem também resgatar o desejo pela busca de conhecimento e tornar a aprendizagem prazerosa, na qual a criança passe a gostar cada vez mais de aprender.”

Neste contexto, entendemos que o jogo proporciona uma aprendizagem significativa, através da criatividade, da significação e da interação, uma vez que o objetivo principal é a descoberta. As situações, surgidas no decorrer do jogo, levam à criação/utilização de regras e formulação de hipóteses, as quais originam o aprofundamento de conceitos e estratégias de aprendizagem.

2.4.2 Tarefas matemáticas

Com o PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), (re)apareceram novas formas de abordar os conteúdos, entre as quais as tarefas matemáticas. Tal como enunciado no programa, as tarefas matemáticas são motivo de expressão de ideias, orais ou escritas, de leitura de textos científicos e de representações visuais, através das mais variadas ferramentas – PowerPoint, InterWrite, entre outras. A exploração de tarefas pode ser potenciada, quando se recorre ao quadro interativo, utilizando as diversas ferramentas, que o mesmo disponibiliza. As tarefas matemáticas são estratégias de aprendizagem tão versáteis que serão objeto de um estudo mais aprofundado, a realizar no Capítulo 2.

2.4.3 Mapas concetuais

Uma utilização prática da teoria de aprendizagem significativa implica a utilização de mapas concetuais. Apesar de Ausubel (1968) não fazer referência aos mesmos, estes aparecem, de forma implícita, na sua teoria.

Acerca dos mapas concetuais, o investigador Novak (2000, p. 106) afirma que “um dos papéis mais úteis que os mapas conceptuais podem desempenhar é ajudarem um grupo ou equipa a apreender e a chegar a um consenso sobre os seus conhecimentos colectivos, relativamente a qualquer questão ou conjunto de questões do interesse da equipa”.

Os mapas concetuais efetuam a ligação entre os conhecimentos já existentes e as aprendizagens a efetivar. Trata-se de esquemas que relacionam vários conceitos, os quais devem ser dispostos de forma hierarquizada, dos mais gerais e inclusivos (no topo), aos mais específicos (na base), passando pelos intermédios e menos abrangentes. Sendo diagramas esquemáticos, estes traduzem o trabalho do aluno e a forma como o mesmo interiorizou os conceitos e as respetivas relações. Permitem, ainda, a reflexão sobre essas relações e a organização concetual, bem como a avaliação acerca da adequação da estruturação de um certo saber. A sua utilização, com o intuito de esclarecer relações entre conhecimentos, pode ser utilizada numa única aula ou numa unidade didática (Moreira & Buchweitz, 2000; Ontoria, 1994).

De acordo com Moreira e Buchweitz (2000), os mapas podem incluir vários tipos: unidimensionais, bidimensionais, tridimensionais ou mais dimensões.

Quanto aos unidimensionais, estes têm uma forma muito simples, apresentando os conceitos com o aspeto de uma apresentação vertical.

Por sua vez, os bidimensionais configuram uma perspetiva organizativa, vertical e horizontal, estabelecendo relações entre os conceitos, através de linhas ou setas. São os mais utilizados, por possuírem uma organização um pouco mais elaborada dos conceitos, contudo são menos complexos do que os de dimensão superior. Quanto aos de três ou mais dimensões, têm limitações, em termos educacionais, visto exigirem uma capacidade de abstração e interpretação dos alunos, que nem sempre os mesmos possuem, quer pela idade, quer pela maturidade (Dandolini & Souza, 2008).

Os mapas concebidos poderão ter diferentes interpretações, por parte dos alunos, mesmo que tenham por base a mesma área de conhecimento, pois dependem não só da forma como foram criados e esquematizados, como também das estruturas cognitivas de quem os esquematizou. Por isso, a explicação do professor não é dispensável, uma vez que será necessário que oriente os seus alunos no esquema elaborado e que funciona como instrumento pedagógico.

Como enuncia Arends (2008, p.282), para além de facilitarem a visualização de conteúdos e respetivas interrelações, ”os mapas conceptuais são divertidos de fazer”. Nas figuras 3 e 4 podemos ver exemplos de mapas concetuais, utilizados em Matemática, elaborados por uma professora e pelos seus alunos:

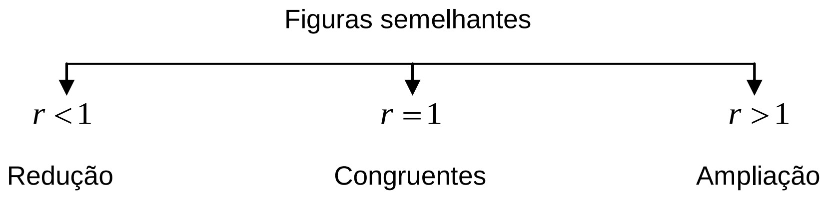


Figura 3 - Mapa concetual de uma tarefa sobre o Tópico Semelhança

A construção deste mapa, no âmbito da ação de acompanhamento desenvolvida pelo PMEB de 2007 (EBLP, 2011), implicou o desenvolvimento de vocabulário específico para classificar atributos, explorar a congruência e a semelhança, bem como para justificar as conclusões, com argumentos lógicos. O objetivo foi a visualização de conceitos, de forma esquematizada, bem como a sua compilação. Os alunos entenderam a sua utilidade e o seu lado prático, como forma de aprendizagem e consolidação de conhecimentos.

A construção deste mapa concetual pode constituir uma etapa prévia à elaboração do mapa seguinte, numa tarefa relativa ao Tópico – Números Inteiros.

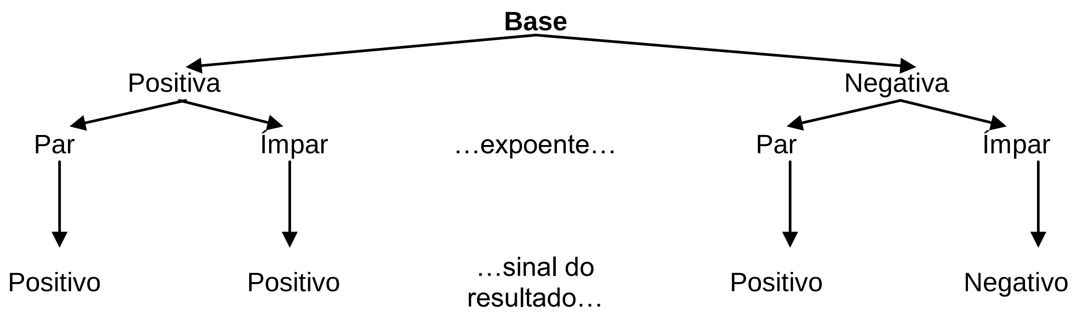


Figura 4 - Mapa concetual sobre potências de expoente negativo

Trata-se de um mapa relativamente fácil de elaborar com os alunos e que tem, como objetivo, sintetizar conteúdos. A atividade de conceção deste mapa foi apresentada no âmbito da ação de acompanhamento desenvolvida pelo PMEB de 2007 (EBLP, 2011). Após a docente ter questionado “como fazer”, um dos alunos sugeriu a utilização de «duas setas», a partir do conceito base. O processo dialogado de realização levou a que os alunos desenvolvessem um conhecimento mais profundo das diversas representações dos números, avaliassem os efeitos do cálculo das potências, e refletissem sobre os resultados obtidos na calculadora.

Cada um dos exemplos reporta-se a diferentes competências matemáticas do 7º ano de escolaridade. Temas matemáticos como a Geometria ou Números e Operações são facilmente adaptáveis à criação de um mapa, para melhor perceção de novos conhecimentos, a adquirir e a relacionar. Assim, os mapas mostram-se vantajosos, por possibilitarem a visualização de um grau piramidal de conceitos. A perspetiva global, e sob a forma de itens, é outra vantagem reconhecida (Moreira & Buchweitz, 2000; Ontoria, 1994). No entanto, não podemos esquecer que o mapa tem de ser entendível pelo aluno, por isso não pode ser demasiado complexo, senão poderá tornar-se, não um instrumento facilitador das aprendizagens, mas mais um item que os alunos irão memorizar. Tal pormenor pode ser facilmente ultrapassado através da objetivação do mapa, por parte do professor, alertando os discentes de que um mapa não é estático nem uno. Por último, os mapas poderão ainda ser utilizados numa prova de avaliação, para aferir conhecimentos.

2.4.4 QIM – Quadros interativos multimédia

Apesar dos vários materiais, indicados no ponto anterior, iremos debruçar-nos apenas sobre os quadros interativos multimédia, já que se trata de uma inovação tecnológica, cada vez mais disponível nas salas de aula (Oliveira, 2010). Na informação, disponibilizada por vários centros de formação de professores, relativamente aos QIM, argumenta-se que os quadros interativos multimédia apresentam potencialidades que permitem alterar, de forma significativa, a natureza da informação trabalhada na aula (com recursos multimédia e de animação gráfica), os tempos e espaços de aprendizagem (com a disponibilização *online* de recursos) e as dinâmicas da aula.

Os benefícios da introdução destas tecnologias, nos contextos de aprendizagem, têm sido amplamente estudados e documentados, em diversos países. Estudos, realizados por universidades do Canadá, Estados Unidos e Reino Unido, com estudantes de diferentes áreas do conhecimento, níveis de ensino e em diferentes tarefas (análise de diagramas, textos, simulações,…), demonstram maior envolvimento dos alunos, com aumento da motivação, promoção da aprendizagem cooperativa (incremento das interações entre pares) e reforço do papel do professor como mediador dos processos de aprendizagem. Como consequência, os estudos apontam para resultados positivos, na eficiência dos processos de ensino-aprendizagem (Morris, 2002). Assim, os QIM, apesar de serem uma ferramenta, apresentam-se como um excelente meio de promover estratégias de aprendizagem, através da utilização de recursos educativos.

No Moodle da CRIE (Computadores, Rede e Internet na Escola, 2012), uma plataforma de apoio às ações de formação em TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação), do Portal da Educação, é possível ler: "é inquestionável que estas tecnologias são, para os alunos, um brinquedo mágico que dá outro sentido ao acto de «ir ao quadro». A generalidade dos estudos de investigação refere impactos significativos na motivação dos alunos em participarem nas atividades de aprendizagem."

Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008, p. 26) é referido que as novas tecnologias

> " (…) proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise de dados, e realizam cálculos de forma eficaz e

> exacta. (…) Quando se lhes disponibilizam ferramentas tecnológicas, os alunos podem concentrar-se nas decisões a tomar, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas.”

Os QIM permitem guardar a escrita manual em suporte digital, em diferentes formatos de apresentação, texto e/ou imagem. Assim, é possível partilhar os trabalhos produzidos com os alunos, através de internet ou rede local. Os quadros possibilitam que o tempo, que seria utilizado para a passagem dos conteúdos, para o caderno diário, seja rentabilizado de outra forma. Assim, são criadas novas disponibilidades de participação na aula, levando a uma aprendizagem colaborativa, bem como a novas dinâmicas na sala de aula. A possibilidade do uso de *flash* (recursos de animação multimédia) motiva os alunos para explorações concetuais e conjeturais.

A orientação docente é essencial, visto que “os professores são, assim, uma questão incontornável para potenciar os QIM, tal como na renovação dos contextos de aprendizagem” (Moodle da CRIE).

2.5 Comunicação matemática

Brendefur e Frykholm (2000, p. 133) defendem que “a comunicação desempenha um papel fundamental na aprendizagem”. A comunicação matemática é uma estratégia fulcral para chegar a alunos mais tímidos, ou menos seguros dos seus conhecimentos. Nas palavras de Antão (1995, p.7), “a comunicação é o centro polarizador de todo o tipo de conhecimento e de toda a organização (…) tudo o que existe de concreto ou abstracto, de real ou irreal, de objectivo ou subjectivo, é apreendido por processos menos ou mais complicados de comunicação”.

Relativamente aos vários fatores transversais já referidos, ir-nos-emos debruçar especificamente sobre a comunicação matemática, tendo em conta a sua importância no PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007, p.63), no qual podemos ler:

> “ (…) através da comunicação, os alunos exprimem e confrontam ideias, tanto com os colegas como com o professor. Na aula de Matemática, a comunicação faz-se essencialmente a nível oral e escrito. Visando o desenvolvimento desta capacidade, o professor fomenta diversos tipos de interacção na sala de aula (professor - aluno, aluno - aluno, aluno - turma, professor - turma). A comunicação oral é desenvolvida através do questionamento do professor, tanto em tarefas problemáticas e investigativas como na resolução de exercícios (…). Para fomentar a comunicação escrita, ao longo dos diversos temas matemáticos, o professor deve criar momentos em que os alunos tenham de elaborar pequenos textos e relatórios, usando de forma adequada, consistente e progressiva a notação, a simbologia e o vocabulário específicos da Matemática. Associada à comunicação escrita vem a representação

> simbólica de dados, ideias, conceitos e situações matemáticas sob diversas formas."

Assim, a comunicação escrita proporcionará a interpretação e a discussão da informação fornecida aos alunos, levando-os a descrever, explicar e justificar conclusões e soluções, recorrendo a linguagem corrente ou matemática. No que diz respeito à comunicação escrita, deve ser cada vez mais encarada como uma atividade regular na sala de aula, de forma a permitir que os alunos fundamentem matematicamente as suas ideias, através da utilização progressiva de simbologia e termos matemáticos (Sá, Sá & Zenhas, 2004).

Quanto à oralidade, é fulcral que o discurso do aluno seja entendível pelo grupo-turma, sendo o papel do professor uma peça-chave, enquanto moderador e descodificador. Para tal, a participação oral e a argumentação matemática deverão ser objeto de treino e aprofundamento, em contexto de sala de aula. Como sustentam os investigadores Ceia, Cebola e Pinheiro (1999, p. 23) " sugerimos aos professores que se envolvam activamente nas actividades com os alunos (…), que fomentem o debate acerca das ideias matemáticas que os alunos vão apresentando, integrando-as no corpo de conhecimentos matemáticos, que deixem os alunos exprimir conjecturas e apresentar justificações".

O professor, desta forma, partilha o seu poder, sem que com isso perca a sua autoridade. Segundo Freire (2007) exercer autoridade não é sinal de autoritarismo, mas o cumprimento do dever enquanto docente. Governar os desacordos entre os alunos, criar a divergência como ponte para a reflexão, fazer ponto da situação é negociar tanto a comunicação interpessoal, como a comunicação matemática, tornando produtivas as interrelações. As discussões de carácter matemático têm de ser, cada vez mais, persistentes, contextualizadas e coerentes. A arte do improviso, o ensinar a falar, ouvir e respeitar, incentivar o levantamento de questões, obrigar os alunos a interagir, estabelecer limites na atividade e lidar com sentimentos e vontades são desafios que se cruzam constantemente, em contexto de sala de aula.

Quanto à comunicação escrita, e apesar das adversidades iniciais inerentes à falta de hábitos da sua produção, os obstáculos poderão ser superados, e a atitude e o empenho dos alunos pode evoluir positivamente e com qualidade. Como tal, o *feedback* que o professor realiza contribui, de modo decisivo, para a superação de dificuldades, levando a um maior envolvimento do aluno, no processo de ensino-aprendizagem (Ribeiro & Monteiro, 2010).

Como afirmam Menezes, Silva, Santos e Trindade (2002, p.200), já foi o tempo em que, quanto à "questão da comunicação na formação de professores, a preocupação maior prendia-se com a correcção e a clareza da mensagem do professor". Ora o mesmo se aplica à comunicação, seja ela na sala de aula ou não. Atualmente, é preciso orientar e incluir a comunicação, do ponto de vista do aluno, como sujeito e agente do seu ensino-aprendizagem.

Na sala de aula aprender Matemática é saber comunicar, mas comunicar matematicamente é igualmente saber transmitir e adquirir conhecimentos. Podemos observar as várias ligações da comunicação matemática na figura 5, a qual resulta de fontes de consulta, nomeadamente Antão (1995), Arends (2008) e Santos (2003).

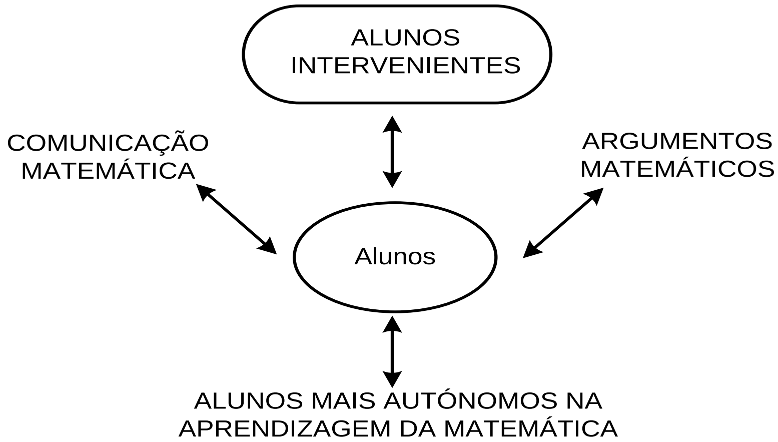


Figura 5 - Comunicação matemática

Fonte: Adaptado de Antão (1995), Arends (2008) e Santos (2003).

Nas várias atividades desenvolvidas, procuramos estabelecer ligações concetuais, desenvolver a investigação como tarefa matemática, criando processos para as mesmas, com o objetivo da formular conjeturas, a serem posteriormente testadas. A investigação é, muitas vezes, de fácil interiorização e leva a um pensamento indutivo. Estimular a aprendizagem dos alunos, com atividades, leva a uma autonomia que se traduz, normalmente, no progresso do aluno (Lima, 2004).

Hoje em dia, o recurso a novas tecnologias não deve reportar-se apenas à calculadora básica, mas também à utilização do computador, através de ambientes dinâmicos de geometria, folha de cálculo, programas educativos e sites interativos. No entanto, não podemos esquecer as potencialidades dos materiais manipuláveis existentes, adequados aos vários níveis de escolaridade e que promovem o desenvolvimento intelectual do aluno, sendo estes, muitas vezes, a base de trabalho de tarefas escolares (Almiro, 2005).

Assim, de acordo com o PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), a comunicação matemática engloba três aspetos: objetivo curricular, conteúdo, no sentido de competência transversal, e metodologia a aplicar na sala de aula (Menezes & Guerreiro, 2010). No mesmo artigo, Menezes e Guerreiro (Idem, p.137) defendem que

> " a relevância que tem sido reconhecida à comunicação nos processos de ensino e de aprendizagem, vai muito além da ideia comum de transmissão de informação e de conhecimentos. Neste sentido, a comunicação em geral (e a da Matemática, em particular), é muito mais do que um recurso educacional, é sobretudo e essencialmente o suporte e o contexto do ensino – aprendizagem, entendido como processo de socialização e de interacção entre os alunos e entre estes e o professor."

Desta forma, sintetizamos algumas ideias centrais, que envolvem a comunicação matemática.

Uma das primeiras ideias a reter é que existem vários tipos de linguagem, para se poder comunicar matematicamente:

i. Oral;
ii. Escrito, que envolve várias formas de representação, entre outros, figuras geométricas, imagens, linguagem simbólica, gráficos, tabelas, esquemas;
iii. Corporal / gestual.

Neste contexto, também afirmamos que "as formas de comunicação matemática, caracterizadas pelo uso da linguagem oral e escrita e também da leitura, são reveladoras da maneira como os estudantes constroem e partilham o seu conhecimento matemático" (Ibidem, 2010, p. 139). Outra ideia que podemos reter relativamente à comunicação matemática na sala de aula, é o facto de poder ser vista segundo várias perspetivas. Assim, de acordo com Brendefur e Frykholm (2000), podemos dividir a comunicação matemática em quatro categorias, esquematizadas no quadro 2.

Quadro 2 - Perspetivas da comunicação matemática na sala de aula

Comunicação	**Unidirecional**: a comunicação na sala de aula é monopolizada pelo professor através de uma aula expositiva, com a colocação de questões de resposta curta, que não permitem grande alargamento do discurso do aluno, bem como das suas ideias e estratégias de resolução.
	Contributiva: a comunicação pauta-se por interações entre alunos e professor, mas não é produtora de ideias profundas, já que se limita ao apoio e à partilha.
	Reflexiva: a comunicação carateriza-se pela existência de um momento, entre alunos e professor, em que algo é discutido, com consequente reflexão.
	Instrutiva: a comunicação vai tomando o rumo que a experiência ocorrida e a respetiva discussão direcionam.

Fonte: Adaptado de Brendefur e Frykholm (2000).

Assim, tendo em conta o quadro anterior e as orientações curriculares do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), para o ensino e a aprendizagem da Matemática, concluímos que a comunicação reflexiva e a instrutiva são as que mais valorizam a comunicação matemática, em sala de aula.

Outra ideia, fortemente apoiada pelo programa de 2007 (Ponte et al., 2007), é a valorização da comunicação oral, nomeadamente, a promoção de espaços de debate, nos quais ocorram discussões coletivas de ideias matemáticas importantes. Advogamos a opinião de Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008, p. 78) quando afirmam que " comunicar para aprender e aprender a comunicar são duas faces da mesma moeda. Uma das dimensões não existe sem a outra".

2.5.1 Questionamento

O questionamento é uma das estratégias discursivas a que os docentes mais recorrem na sua prática letiva. Por tal, é premente que a mesma seja eficaz, para que o professor atinja dois objetivos essenciais: a capacidade de se expressar e a de se fazer entender enquanto questionador (Figueredo, 2003).

Trata-se da forma mais simples e direta de incentivar e apoiar os alunos a comunicar matematicamente as suas ideias. Dentro das variadas maneiras de questionar os alunos, salientamos três tipos que melhor se enquadram no espírito do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007):

i. Questionamento localizado - o objetivo é focar a atenção do aluno através de perguntas direcionadas.
ii. Questionamento de confirmação – o objetivo é confirmar com o aluno a afirmação do professor.
iii. Questionamento inquiridor – o objetivo é obter informação do aluno.

Investigadores como Matos e Serrazina (1996) e Reinhart (2000), afirmam que estratégias de apoio à comunicação matemática como questionar ou redizer recorrendo a diferentes tons de voz e variados posicionamentos corporais levam os alunos a uma aprendizagem efetiva, pelo facto de terem necessidade de responder. Também incentivam a análise, a reflexão e a explicação dos seus raciocínios podendo mesmo levar a patamares de dedução mais elevados. A resposta que o aluno fornece é a base de entendimento do professor sobre o seu conhecimento, isto é, permite ao docente avaliar o que o discente efetivamente sabe. De acordo com Orlandi (2006, p.2) “redizer está imerso nas relações entre as coisas (…) é inseparável dos sinais de questionamento”.

Neste tipo de estratégia de aprendizagem poder-se-á referir, como materiais de apoio, a utilização de cartazes, acetatos, e mais recentemente o quadro interativo, mini-whiteboards e outros. Hoje em dia existe uma intensificação de novos e melhores materiais tecnológicos voltados para a educação, os quais procuram responder às exigências de alunos com uma capacidade e facilidade de utilização deste tipo de materiais (Ferreira, Gomes & Gonçalves, 2011).

A análise do processo de ensino-aprendizagem, efetuada até ao momento, considerando os estilos, as experiências e as estratégias, configura um percurso reflexivo, quer do aluno, quer do professor, de desenvolvimento de competências e capacidades, bem como de responsabilização pela própria aprendizagem (Ma, 2009). Desta forma, a aprendizagem significativa, em especial na Matemática, tem de integrar, necessariamente, a autonomia. É neste sentido que analisaremos a autonomia, seguidamente.

3. A construção do aluno autónomo

A autonomia assume uma posição de destaque ao libertar os professores como únicos elementos responsáveis pela aprendizagem dos alunos, levando a que os discentes tomem a seu cargo a responsabilidade no processo de ensino-aprendizagem. Logicamente, tal alteração deve-se a imposições do próprio currículo, ao transformar o aluno como o centro da aprendizagem, tal como enunciado nos documentos estruturantes de escola, nomeadamente o Projeto Educativo de Escola (PEE) e o Plano Anual de Atividades (PAA), a nível da realização.

3.1 Conceito de autonomia

A palavra *autonomia* deriva do grego e significa autogoverno, isto é, governar-se a si próprio. A Psicologia define-a como sendo o comportamento do indivíduo sobre si mesmo, sendo a única responsável pelo seu sistema de valores, mas que não deve ser confundida com liberdade. Está sujeita a mudanças e desenvolvimentos, que acompanham o evoluir do sujeito e relacionada com fatores sociais, ambientais e afetivos

(Coon, 2006). Em contexto educativo, a autonomia é um conceito aplicável quer a nível de escola, quer a nível de turma/aluno.

Barbot e Camatarri (2001, p.28) definem "o conceito de autonomia como o comportamento de um sistema que tem, em si, ou que estabelece, por si mesmo, a sua própria validade ou as regras da sua própria acção". Desta forma, a autonomia pressupõe relatividade, pois somos mais ou menos autónomos em relação a alguns aspetos e não o somos em relação a outros. Supõe ainda, capacidade de diferenciação dos outros, o que só é possível em interação. Um dos objetivos primordiais e estruturantes em Educação é, pela sua complexidade e influência, a autonomia.

Por isso, segundo Oliveira (1999), o conceito de autonomia é o objetivo que os alunos devem perseguir, através de patamares, ao longo da sua escolaridade. Deve ter em conta a sua maturidade, os diferentes níveis de escolaridade e a personalidade do docente.

A autonomia e o seu respetivo desenvolvimento, em termos cognitivos e afetivos, só pode ser atingida depois de percorrido um processo de construção consciente de vitórias, de erros e de responsabilidade. A responsabilidade passa muito mais pela obrigação para consigo próprio do que pela obrigação para com os outros.

No entanto, a autonomia encontra obstáculos até na própria cultura dos professores, já que os resultados nem sempre são visíveis de forma imediata, mas apenas a longo prazo. Infelizmente, existem professores que se sentem ameaçados pela autonomia dos seus alunos, pois entendem que podem levantar dúvidas sobre o seu conhecimento científico e colocar em causa a sua capacidade enquanto docente (Freire, 2007).

É forçoso, assim, «desmontar» o conceito de autonomia para que não seja visto como algo de difícil concretização e mesmo inatingível. Para tal, será necessário adaptar e adotar novas metodologias e técnicas pedagógicas, bem como desenvolver ações educativas que tenham uma orientação individualizada.

3.2 Características gerais da autonomia

Tratando-se de um campo de estudo relativamente recente, a autonomia assenta essencialmente em princípios baseados numa visão cognitivista e numa aprendizagem resultante de uma participação ativa do aluno que demonstra grande vontade de se informar, saber e consolidar os conhecimentos. Autonomia na aprendizagem pressupõe e implica, de forma direta, que haja uma pedagogia cujo foco seja o aluno, com toda a gradual responsabilidade que acarreta no que toca à organização e avaliação (Freire, 2007; Vayer, 1993).

A autonomia é tanto maior quanto mais transversal for: deverá percorrer os vários níveis de ensino e as várias áreas disciplinares curriculares e não curriculares. O desenvolvimento do conhecimento deverá refletir-se, não só em termos do aluno, como também no grupo turma no qual o discente está inserido; não é um trabalho individual, pois implica trocar conhecimentos, partilhar, trabalhar com os outros. Como afirma Little (1995) a independência total não significa o mesmo que a autonomia.

Neste contexto, a autonomia não se resume a responsabilizar o aluno, deixar que o mesmo tome as suas decisões no processo de ensino-aprendizagem e seja responsável pelas atividades realizadas. A autonomia é um processo que permite e encoraja o aluno, levando-o a escolher o processo mais adequado, de forma a que venha ao de cima quem o aluno é, o que pensa, o que quer fazer, que seja definida a linha orientadora do seu trabalho e haja uma tomada de decisão do próprio aluno sobre o processo. A autonomia implica que o discente esteja consciente do que é capaz, das suas limitações e dos seus desconhecimentos; pressupõe que procure estratégias e recursos para a resolução dos seus problemas, ao longo do processo de ensino-aprendizagem; obriga a comportamentos de iniciativa, participação, organização dos seus materiais e das suas ideias, seleção e criação de materiais, capacidade de avaliação e reajustamento (Oliveira, 1999).

Assim, concordamos que a autonomia da aprendizagem assenta numa mudança radical de atitude: a perceção e o papel desempenhado por aluno e professor adquirem uma nova definição. Segundo Freire (2007, p.23): “não há docência sem discência, (…) quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender”.

O processo de ensino-aprendizagem tradicional no qual o professor tinha praticamente toda a responsabilidade na organização, na seleção dos materiais, nas atividades desenvolvidas, no conhecimento transmitido, em toda a rotina que envolve tal modelo de ensino, não é mais compatível com a noção de autonomia. O professor que estipula a quantidade de saberes e a aquisição dos mesmos já não se coaduna com a aprendizagem autodirigida. O aluno não pode mais ser alguém totalmente dependente do docente. O aluno passa a ser o centro pedagógico, como podemos constatar na figura 6.

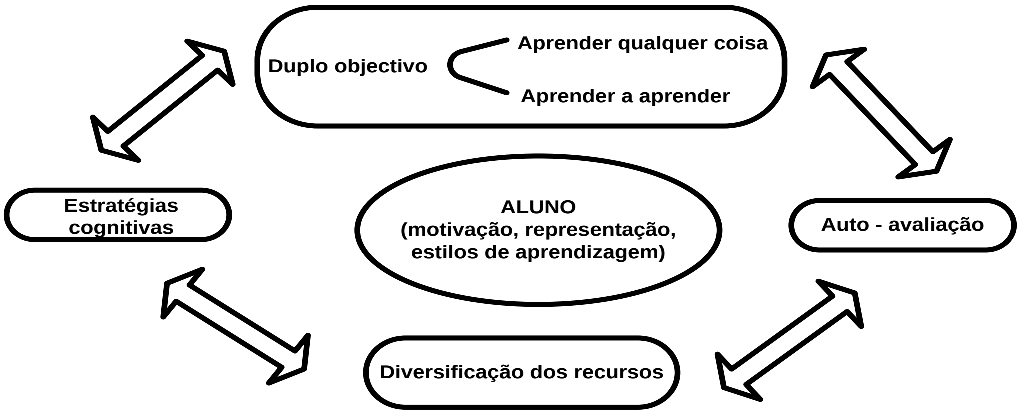


Figura 6 - O sistema pedagógico

Fonte: Barbot e Camatarri (2001, p.58).

Por tal, e segundo os mesmos investigadores, será necessário criar espaços e fornecer condições facilitadoras para a ocorrência da aprendizagem numa perspetiva de autonomia, libertando o professor como centro exclusivo de recursos.

Não ocorrerá uma demissão do professor nem da sua tarefa, haverá sim, por parte do docente, um estar de pessoa-recurso, de disponibilizador de informação; apoio às solicitações do aluno, atento à forma como as tarefas são realizadas, identificador de problemas, fornecendo tópicos e dicas para a resolução dos mesmos; supervisor e orientador de todo o processo. O professor encoraja, critica, opina, propõe novos percursos. A relação pedagógica entre aluno e professor está cada vez mais valorizada. É uma relação dialógica. Consequentemente será necessário ao professor saber delegar poderes, saber partilhar, saber gerir as relações pessoais e o grupo turma. O bom senso terá de ser o mentor de tudo e de todos (Rossetto, 2005).

O equilíbrio entre dependência e autonomia é uma difícil tarefa, mas não impossível, tal como afirma André (1989), ao equacionar a inter-relação entre professor e aluno.

Desta maneira, temos de ter em conta que se a autonomia exige por parte do professor grande mudança, o aluno não está isento de responsabilidades: terá de deixar de ser passivo, submisso, para passar a ter um papel mais ativo, agente participador de decisões, responsável e capaz de desenvolver a sua independência face ao professor. No entanto, a responsabilidade supervisiva/avaliativa final pertencerá sempre ao professor, apesar de dialogada com os alunos, numa perspetiva formativa e promotora de autonomia na aprendizagem (Arends, 2008).

A autonomia, de uma forma geral e a matemática em particular, só faz sentido se for para além do mecanizar, pois o entendimento é condição «sine qua non» para criticar depois de interpretar, compreender e ponderar. A autonomia justifica-se se as competências forem adquiridas de forma hierarquizada e enquadrada. A autonomia do aluno em Matemática servirá de trampolim para a autonomia a outras disciplinas.

No PMEB de 2007, Ponte et al. (2007, p.59) são perentórios ao afirmar que

> " (…) a Matemática para todos não deve identificar-se com o ensino de um certo número de conteúdos matemáticos específicos, mas sim com a promoção de uma educação em matemática, sobre a matemática e através da matemática, contribuindo para a formação geral do aluno."

Não podemos esquecer que os alunos não são autónomos da mesma forma e intensidade, pois a autonomia depende de inúmeros fatores: a personalidade de cada um, a maneira de organizar o pensamento, a forma como é interpretada a mensagem enviada pelo professor, a relação professor-aluno….Como refere Oliveira (1999, p.62) "a autonomia é constituída através de patamares qualitativos que reflectem processos transformacionais dos sujeitos".

A autonomia pode ser adquirida, de forma voluntária, ou ser incutida (por treino, por exemplo). Perante a autonomia, o aluno poderá obter mais sucesso na Matemática, pois o espírito crítico estará mais «aguçado» e terá maior propensão a ler, analisar, questionar e responder aos vários obstáculos que lhe possam ir surgindo. Na sua procura, cada aluno irá com certeza clarificar os seus estilos de aprendizagem e desenvolver estratégias adequadas e, por vezes, adaptar outras. Oliveira-Formosinho (2002, pp. 166-167) refere que

> " (…) algumas práticas serão provavelmente mais eficazes na promoção da aprendizagem dos alunos, proporcionam linhas de orientação concretas e fiáveis aos supervisores e professores, quer sejam seleccionadas abordagens clínicas, formação formal, treino ou abordagens autodirigidas.(…) A prova de que a formação, o treino, a simulação, a demonstração e a prática directa produzem um melhor ensino encontra apoio substancial tanto na investigação como na prática."

O objetivo primordial e final de qualquer sistema educativo é, entre outros a autonomia do aluno, do professor, das escolas. Daí que se entenda a facilidade com que este conceito surge nos mais variados contextos de ensino e de aprendizagem. A autonomia é o "motor interno da aprendizagem" (Barbot & Camatarri, 2001, p.9).

Assim, é prioritário fornecer os meios que levem à mudança e a maior responsabilização no processo de aprendizagem, porque não podemos esquecer que a sociedade de hoje vive em rápida transformação e exige que cada vez mais as funções pessoais e profissionais sejam diversificadas (Vayer, 1993). O docente da atual escola de ensino obrigatório já não se limita a exercer funções de professor, pois muitas vezes é psicólogo, assistente social, mãe, pai, tio, educador.

Numa aprendizagem ativa, interessa equacionar como formar um aluno autónomo e interveniente e quais as estratégias a aplicar para essa formação.

3.3 Estratégias para uma aprendizagem autónoma

Num mundo em rápida transformação e em que os meios multimédia imperam, tornam-se necessárias novas formas de reflexão e formação.

O termo *aluno autónomo* surge com Holec (1981,p.3) como sendo "a capacidade de tomar a seu cargo a aprendizagem". Assim, o aluno assume a responsabilidade de aprender interagindo com professores e outros alunos. O aluno é o centro do processo de aprendizagem.

O aluno autónomo percorre quatro etapas (Little, 1995):

- Estabelecimento de objetivos;
- Escolha de recursos;
- Seleção de estratégias;
- Autoavaliação.

Por isso, o aluno autónomo é aquele que autoestabelece a sua ação, está disposto a correr riscos, tem uma atitude de responsabilidade perante si e os outros, responde pelos seus atos e aceita as consequências (sejam elas de sucesso ou insucesso) e realiza introspeções sobre as suas estratégias e estilo de aprendizagem. Resumindo e de acordo com Holec (1981), o aluno autónomo é aquele que determina os seus próprios objetivos, define os conteúdos a aprender, seleciona os métodos e as técnicas e efetua uma avaliação final.

No entanto, o aluno autónomo não dispensa a figura do professor: será sempre necessário alguém indicar o caminho a seguir, fornecer a informação e gerir os recursos pedagógicos. Rosário (1997, p. 239) afirma que a intervenção do professor é fundamental "para desenvolver a capacidade de pensar, a necessidade de focalizar a atenção nos problemas, na forma de colocar questões e no processo de resolução dos mesmos, mais do que oferecer directamente as soluções". Clarificar as tarefas, monitorizar os trabalhos dos alunos, corrigir as atividades realizadas, fornecer o *feedback* das atuações são alguns dos procedimentos que o professor pode adotar, de maneira a responsabilizar o discente pela sua aprendizagem.

Partilhamos a opinião de Ponte et al. (2006, p. 26) quando afirmam que

> “ (…) existe, por vezes, a ideia de que, para que o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autónoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nessas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo.”

Deveremos ter presente que existem estratégias para uma aprendizagem autónoma e que podem ser cognitivas ou metacognitivas. Segundo O’Malley e Chamot (1990) as estratégias cognitivas operam sobre a informação nova, contribuindo para uma aprendizagem significativa. Como estratégias cognitivas podemos considerar, entre outras:

- A repetição;
- A utilização de materiais como, por exemplo, o manual;
- A contextualização quando insere uma frase ou uma palavra com lógica.

Na perspetiva de Wenden, (1998, p.34) “o conhecimento metacognitivo inclui não apenas os factos que os sujeitos adquirem sobre os seus processos cognitivos, mas sobretudo a consciencialização da forma como os aplicam em diferentes situações”.

E, segundo Wenden (1998), exemplos de estratégias metacognitivas são:

- Quando é tomada uma decisão, direcionar a atenção;
- Atendendo a aspetos específicos, tornar a atenção seletiva;
- Autocontrolo, isto é, verificação do desempenho;
- Autoavaliação, ou seja, verificação das aprendizagens;
- Autorreforço através dos objetivos obtidos e concretizados.

Nas palavras de Oxford (1990, p.1), “as estratégias são importantes porque são ferramentas necessárias a um envolvimento ativo, o qual é essencial para desenvolver a competência comunicativa”.

Resolvemos explanar um pouco mais as estratégias a utilizar, tendo por base Oxford (1990), que as subdivide, como podemos observar no quadro 3.

Quadro 3 - Quadro das estratégias

Tipo	Subtipo	Exemplo
Diretas	Memória	► criação de ligações mentais por agrupamento ou associação ► recorrência a imagens e palavras-chave ► revisão estruturada ► recurso a técnicas mecânicas
	Cognitivas	► repetição e uso de fórmulas ► recorrência a técnicas de comunicação ► dedução, análise e transferência ► tomar notas, resumir e destacar
	Estratégias de compensação	► recurso a dicas ► limitações: - evitar pedir ajuda ou comunicar - adequar a informação
Indiretas	Metacognitivas	► perspetivar e relacionar com os conhecimentos já obtidos ► organizar ► estabelecer metas e objetivos ► planificar ► autorregulação ► autoavaliação
	Afetivas	► refletir ► reforçar a autoestima ► correr riscos ► Auto compensação ► partilhar sentimentos
	Sociais	► questionar: esclarecimentos ou correções ► cooperar ► estar atento aos outros

Fonte: Adaptado de Oxford (1990, pp.152-153).

Um maior controlo na realização de tarefas desenvolve uma atitude mais positiva face a uma aprendizagem, que se traduzirá numa maior motivação para o conhecimento efetivo. O desenvolvimento de estratégias proporciona uma aprendizagem, não só mais eficaz como também mais autónoma (Rossetto, 2005).

Intervindo estrategicamente o docente está a estabelecer a base da motivação para a aprendizagem dos seus alunos; está a levá-los a desenvolverem competências que geram melhor ensino, que são promotoras de autonomia das aprendizagens (Valente, 2004).

No caso da aprendizagem da Matemática, os alunos deverão refletir nos novos conhecimentos que vão surgindo e nas estratégias mais convenientes para conseguirem as tarefas a que se propuseram. O sucesso de uma atividade de aprendizagem está dependente da vontade de aprender do aluno. Tal como afirma Freire (2007, p.25), "o necessário é que (…) o educando mantenha vivo em si o gosto da rebeldia que, aguça sua curiosidade e estimula sua capacidade de arriscar-se, de aventurar-se". Torna-se também imperativo que, perante um insucesso, o aluno seja capaz de retomar o seu rumo, não desistindo perante um obstáculo. É importante desmontar a ideia préconcebida que muitas vezes os alunos trazem da «disciplina complicada», pois este tipo de atitude influencia negativamente a aprendizagem. Logicamente, um reforço positivo do professor é uma motivação essencial para que o processo de aprendizagem na Matemática não se torne mecanizado e monótono. Como já referimos anteriormente, os alunos não aprendem da mesma maneira nem com o mesmo grau de intensidade. Existem alunos que preferem o estudo feito através de resolução de exercícios do manual ou propostos pelo professor, outros já elegem os de cálculo mental e que exijam menor escrita, isto é, os alunos apresentam diferentes estilos de aprendizagem (Aharoni, 2008).

Assim, a autoestima do aluno surge em função da motivação, das estratégias de aprendizagem adotadas e das suas atitudes. E quanto maior for o seu empenho maior é a sua capacidade de enfrentar um insucesso ou com menos frequência colocará em risco a sua capacidade cognitiva. O sentimento de incapacidade de aprendizagem face à Matemática tem de ser inversamente proporcional ao sentimento de autoestima. O professor terá de ser aquele que vai adaptar os materiais, os recursos e os métodos e fornecê-los aos seus alunos. O docente influencia o aluno para além das aprendizagens, por isso é importante que a sua inferência seja um meio de resolver os problemas educativos dos alunos. Os alunos que se encontram no Ensino Básico têm Matemática obrigatoriamente e não opcional como no Ensino Secundário, o que fortalece a importância afetiva que a relação alunos-professor deve assumir (Lima, 2004).

Confrey (1990, p.20) afirma que é necessário que ”os professores promovam a autonomia e o envolvimento dos alunos, de forma que estes se tornem cada vez mais responsáveis e autónomos na construção do seu conhecimento matemático”.

Ainda na mesma perspetiva, Barbot e Camatarri (2001,p.225) afirmam

> “ (…) colocamos o princípio da autonomia no centro da reflexão sobre a inovação dos sistemas educativos. A autonomia, aos nossos olhos, é um princípio ético capaz de fundar um projecto de homem socializado e de vencer o desafio do milénio. A derivada social só pode transformar-se numa oportunidade se um homem novo renascer das suas cinzas, capaz de se assumir em toda a responsabilidade, capaz de aceitar a alteridade não como um limite mas como uma oportunidade de interacção e de questionação: ser autónomo supõe a capacidade para pôr à prova a referência a si mesmo e ao outro, para escolher os seus contextos de interdependência segundo as modalidades que reclamam um ajustamento contínuo da percepção, da intuição, do afecto, do raciocínio, do juízo. Esta forma de ser não se pode desenvolver espontaneamente, nem decretar-se.”

Desta forma, é fundamental criar condições para todos os alunos e não apenas para alguns, de forma a que surjam discentes matematicamente mais autónomos. São técnicas de estudo que faltam, ligadas às estratégias de aprendizagem, para que estes desenvolvam capacidades matemáticas, o que se traduzirá numa autonomia mais notória.

O aluno matematicamente autónomo tem «ferramentas» de aprendizagem que lhe permitirá afirmar-se como ser pensante sobre o que o rodeia. Não podemos esquecer que a Matemática se traduz e vê através dos mais variados exemplos do dia-a-dia (Sant'Ana, 2008).

Neste contexto, será importante que os discentes também compreendam que a autonomia das aprendizagens da Matemática não é um processo imediato. Para tal, os discentes devem mostrar-se persistentes, pois a promoção da autonomia é como a própria Matemática: ocorre de forma piramidal.

4. Conclusão

Em síntese, a aprendizagem deve ter em conta os objetivos dos alunos. Para que os mesmos sejam partilhados com o docente, este terá de atuar de modo a que exista interesse e empenho por parte dos alunos, para que os conhecimentos sejam primeiramente conhecidos e mais tarde partilhados. O aluno será tão mais competente quanto mais reflexivo for.

As aprendizagens que recaem apenas na aquisição de saberes e sem recorrer às estratégias originam um ensino pouco eficaz, um conhecimento inerte e incapaz de ser funcional. Adaptar estratégias, de forma consciente, a cada situação com determinados objetivos, faz com que o conhecimento tenha sentido, não seja estático e por consequência passe a ser útil e funcional. O professor deve criar, sempre que possível, condições de ensino e aprendizagem que permitam a utilização do conhecimento, não só numa situação específica, mas também em momentos diferentes. É neste cenário que a autonomia assume um papel primordial, levando a que autonomia e aprendizagem estejam interligadas no processo de ensino-aprendizagem.

Capítulo II – Gestão curricular na sala de aula

1. Introdução

> *A gestão curricular assenta, de modo central, em dois elementos: um deles é a criação de tarefas, o outro elemento central da gestão curricular é a estratégia posta em prática pelo professor.*
>
> Ponte (2005, p.1)

A Matemática sempre foi considerada como uma das disciplinas em que os alunos portugueses apresentam maiores dificuldades. A reforçar tal ideia podemos verificar que, a nível da literacia matemática, Portugal apresenta uma avaliação de competências, no PISA (2009, 2006), com classificação equiparada aos piores países membros da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico) e a alguns países mediterrânicos (Crato, 2006; PISA, 2009, 2006). Trata-se de dados preocupantes, que traduzem a necessidade de refletir sobre as alterações que têm vindo a ser feitas, nos últimos anos, na área da Matemática.

Assim, neste capítulo, iremos abordar a gestão curricular da Matemática em sala de aula, tendo em conta as tarefas matemáticas, a sua concetualização e importância no PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007). Nesta perspetiva, serão analisadas as vantagens das tarefas matemáticas por comparação com os exercícios, bem como a mudança curricular que as mesmas implicam, focalizando o papel dos principais atores (alunos e professor). Em acréscimo, será analisada a avaliação. A abordagem a realizar focará o conceito, bem como diversos tipos de avaliação (diagnóstica, formativa, sumativa e reguladora) e respetivos instrumentos (testes em duas fases, relatórios e diários de bordo).

2. Currículo e gestão curricular

2.1 Conceito de currículo

O termo currículo é de utilização recente no sistema educativo português, aparecendo associado a plano de estudos, a conjunto de disciplinas ou ainda ao conjunto de atividades letivas e extralectivas (Pacheco, 2005).

O currículo uniforme, decidido centralmente, conduz muitas vezes a uma pedagogia igualmente uniforme, que se traduz em conteúdos semelhantes e na mesma extensão dos programas, com grelha horária semanal idêntica e cargas horárias pré-determinadas para cada disciplina. Por isso, pode-se afirmar que a pedagogia proposta é, sobretudo, uma pedagogia burocrática, dado que implica normas pedagógicas de aplicação universal e impessoal, partindo do princípio de que todos os alunos, independentemente dos seus interesses, aptidões, experiência escolar e rendimento académico, terão de se sujeitar, simultaneamente, às mesmas disciplinas, durante igual período de tempo escolar (Formosinho, 1998).

Para além do currículo enquanto base do processo de ensino-aprendizagem, este pode-se considerar como um projeto, cuja elaboração, gestão e avaliação engloba finalidades, pois a educação configura um ato intencional, com processos de decisão partilhados e práticas interrelacionais. Assim, currículo é um projeto social e cultural, historicamente construído, decidido em função da organização escolar, que estabelece uma fronteira de competências entre uma autoridade administrativa e a autoridade profissional, exercida por professores e outros agentes educativos, no contexto das escolas. No entanto, Leite e Fernandes (2002) alertam para a quantidade de requisitos, normas e tarefas impostas aos professores, dado que os mesmos poderão senti-los como obstáculos à concretização do currículo.

Para Nunes e Ponte (2010), existem dois tipos de currículo a considerar: o currículo planificado e o currículo em ação. No caso do currículo planificado, é organizado pelos docentes nas escolas através das diversas estruturas existentes (área disciplinar, departamento, conselho de turma) ou estruturado pelos manuais vigentes. Relativamente ao currículo em ação, o professor é considerado como um construtor do currículo, tendo um papel mais ativo, em todo o processo de aprendizagem.

As mudanças, sociais e políticas, nos tempos atuais, levam, progressivamente, a novas conceções da função da escola, com alterações profundas, para que esta possa corresponder às expetativas do que se designa por sociedade do conhecimento (Hargreaves, 2004).

Desta forma, numa teoria prática, o currículo é olhado como um processo, uma proposta a ser interpretada pelos professores, de formas distintas, adequado a diferentes contextos, englobando a interação didática, que existe ao nível da sala de aula (Pacheco, 1996). A legitimação curricular é processual, com a valorização do currículo como projeto, o qual depende do desenvolvimento em interação. O currículo é, assim, o resultado da ação coletiva dos docentes, portadores de uma consciência crítica. Os professores, numa perspetiva colaborativa, agrupam-se segundo interesses e experiências, que tomam forma em atividades e projetos escolares (Roldão, 1999). O conceito de práxis, como forma de viver o currículo, é fundamental, destacando-se a importância da ação e da reflexão. A legitimação do currículo é discursiva, sendo a construção do mesmo concretizada de acordo com os sujeitos intervenientes, na base da deliberação social. Os professores são, nesta perspetiva, considerados corresponsáveis pela definição curricular e pela sua implementação (Pacheco,1996, 2012).

Se o conceito de currículo abrange, em si mesmo, tanto um projeto, como um plano de estudos, ou ainda, o resultado da ação coletiva dos professores, então a práxis, enquanto interpretação e aplicação do currículo, é a forma visível do mesmo, focalizando o aluno como sujeito do processo de ensino-aprendizagem.

2.2 Gestão flexível do currículo

O conjunto das aprendizagens que se pretende que os alunos alcancem constitui o currículo. Neste contexto, o “percurso de aprendizagem intencional requer um «programa», isto é, um percurso organizativo que permita alcançar a aprendizagem pretendida” (Roldão, 2006, p. 28). O papel do professor, como principal impulsionador e dinamizador, é e será determinante para o sucesso de qualquer projeto curricular (Pacheco, 2011). Definir objetivos, selecionar estratégias, planificar, organizar, coordenar, avaliar as atividades e os recursos, ao nível da sala de aula, ou em grupo, em sede de departamento e área disciplinar, são tarefas essenciais com sentido pedagógico e educativo. O professor assume, assim, um papel primordial de dinamizador de participação entre pares, para o cumprimento de objetivos, nas diferentes áreas do saber. Por este motivo, a participação na vida da escola e na relação com a comunidade educativa é uma das três dimensões da avaliação do desempenho docente (Decreto-lei nº 41/2012 de 21 de fevereiro). A alusão à participação é feita também na Lei de Bases do Sistema Educativo (1986, 1997, 2005, 2009), que aponta a necessidade de participação, como eixo central da orientação do sistema educativo e da gestão curricular nas escolas.

Assim, a atividade dos professores é regulada por objetivos e Metas Curriculares, bem como por práticas colaborativas, em comunidade. O currículo deve ser entendido como o resultado da conjugação entre a teoria e a prática (Roldão, 2006), tendo por base a reflexão e a análise crítica e por referência as especificidades de cada escola e turma (Fernandes, 2000).

Em consequência, é essencial atender à flexibilidade curricular, promovendo o currículo como um projeto educativo e criando uma dinâmica de criatividade e colaboração entre docentes, da mesma ou de outras áreas disciplinares, em transversalidade. A gestão flexível do currículo, tal como legitimado pelo Despacho nº 484/97, posteriormente revogado pelo Despacho nº 9590/99, 2ª série, evidencia que a gestão não pode ser apenas decretada, dado que se trata de um processo gradual, a construir pelos agentes educativos, em especial pelos professores. Assim, é preconizada uma articulação com o Projeto Educativo de Escola (PEE), com inclusão de estratégias operacionais, para o desenvolvimento do currículo nacional das diversas áreas disciplinares, neste caso da Matemática, no contexto de cada escola.

Cada vez mais, é atribuída às escolas e aos professores a responsabilidade de uma formação eficaz e adequada a cada estudante. Como tal, é necessário que "as escolas sejam lugares de decisão curricular, é necessário que sejam reconhecidas Políticas de Currículo em Portugal como espaços de autonomia pedagógica e de gestão do currículo, mas também é necessário que os professores/educadores queiram e saibam assumir profissionalmente essa autonomia" (Leite, 2006, pp.74-75).

Como afirma Roldão (1995), os professores deverão deixar de ser meros "comunicadores de currículo", para se tornarem "construtores de currículo", adequando-o às necessidades concretas de ensino-aprendizagem em sala de aula, através de referenciais, concretamente, finalidades, objetivos e competências. Um projeto deste tipo, de que são exemplo o Plano de Ação para a Matemática (PAM) (ME, 2006) ou o Plano da Matemática II (PM II) (ME, 2009), constituem uma mais-valia, dado que podem fazer a diferença, potenciando mais qualidade de ensino e consequente sucesso educativo. Como tal, a gestão flexível do currículo é "muito mais que um caminho que é preciso percorrer" (Abrantes, 2000, p. 141), para que ocorra evolução nos vários níveis: conceção, desenvolvimento e gestão. Tem de haver acompanhamento, avaliação e reajustamento, com uma intenção clara e objetiva.

É, portanto, fundamental equacionar a diferenciação pedagógica, em termos de gestão flexível de currículo.

2.3 Gestão curricular e diferenciação pedagógica

No modo como os professores organizam e concretizam as suas práticas, em sala de aula, há que ter em conta a diferenciação pedagógica, no sentido de uma educação promotora que atenda às necessidades de formação específica de cada discente (Roldão, 2006). Neste sentido, torna-se necessária uma gestão compartilhada do currículo, considerando:

> “1) a necessidade de se proceder à adaptação de cada aluno dos seus percursos de trabalho de aprendizagem curricular;
> 2) e a sistemática diferenciação dos procedimentos e das atitudes de atendimento e de ensino do professor, respeitando a diversidade dos alunos que integram uma turma, enquanto comunidade que aprende, contratualmente, um currículo oficial e obrigatório” (Niza, 2012, p.454).

O conceito de diferenciação pedagógica, cunhado nos anos 70 do século XX pelos sociólogos da Educação, teve como advento a antecipação de Bourdieu (Bourdieu & Passeron, 1970; Teodoro, 2003), na sua formação de que a escola não podia continuar indiferente à diferença, se quisesse diminuir o insucesso escolar.

Na definição de Roldão (1999, p. 52), “diferenciar significa definir percursos e opções curriculares diferentes, para situações diversas, que possam potenciar, para cada situação, a consecução das aprendizagens pretendidas”, quer a nível de escola, quer de uma turma ou grupo de alunos. Porém, a diferenciação não deve significar “estabelecer diferentes níveis de chegada, por causa das condições de partida” (Idem, p.53), inviabilizando a possibilidade de alunos, de meios socioeconómicos mais desfavorecidos ou com mais dificuldades, alcançarem aprendizagens significativas e sucesso educativo. Por isso, é fulcral o trabalho colaborativo dos professores, de planificação, concretização e avaliação das práticas (Pawlas & Oliva, 2007). “O docente deverá, portanto, considerar a preocupação [do aluno] como ator na história de trabalho de turma (o currículo vivenciado), enquanto comunidade de aprendizagem” (Niza, 2012, p.461).

Para tal, o professor poderá diferenciar o atendimento aos alunos, diversificar e tornar acessíveis recursos, atividades e estratégias em sala de aula, motivando-os para a comparticipação no processo de ensino-aprendizagem, valorizando a heterogeneidade dos grupos de trabalho e a aprendizagem cooperativa, bem com uma avaliação e regulação compartilhada com os alunos (Ibidem, 2012).

Nesta perspetiva, as tarefas matemáticas emergem como estratégias e atividades diferenciadas, que promovem o aperfeiçoamento e o aprofundamento de competências, tendo em conta que “o efeito cumulativo, dia após dia, de exploração, na sala de aula, de diferentes tipos de tarefas, conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a Matemática” (Stein & Smith, 2009).

É preciso não esquecer que, para além de alguns discentes que abandonam a escola, há ainda a considerar os muitos que concluem a escolaridade obrigatória “tendo «dado» muitas matérias, mas adquirido muito escassas competências” (Roldão, 2006, p.15), comprovando a ineficácia do ensino. Face ao mercado de trabalho, cada vez mais exigente e competitivo, é essencial que os jovens se encontrem preparados para um saber-fazer, que lhes será exigido na vida ativa. Os jovens deverão ser capazes de integrar e mobilizar um conjunto significativo de conhecimentos, principalmente em

Matemática, tendo em conta que uma grande parte dos alunos opta por seguir, no Ensino Secundário e, mais tarde, no ensino superior, cursos em que a Matemática não é disciplina opcional, chegando mesmo a ser disciplina de ingresso.

2.4 Gestão curricular em Matemática

Tal como em outras disciplinas, a gestão curricular em Matemática é um dos aspetos fulcrais no quotidiano do professor. Prende-se com o alcançar dos objetivos e os temas/tópicos do currículo, em função dos alunos e da estrutura escolar, nomeadamente das condições físicas e dos recursos da escola. Assim, a gestão passa pela (re)estruturação do currículo, em sala de aula, que começa no planeamento a longo prazo (o tema), a médio prazo (o tópico) e a curto prazo (a aula propriamente dita). Como sustentam Almiro e Nunes (2009, p.67), "a gestão curricular representa o conjunto de acções do professor que contribuem para a construção do currículo da turma". Na opinião de Ponte (2005), a gestão curricular reflete, acima de tudo, a forma como o docente decifra o currículo prescrito e o concretiza. Essa materialização passa por duas etapas: a primeira que diz respeito à planificação da prática letiva e a segunda à realização da prática letiva que concerne à sala de aula. O professor tem um papel complexo, enquanto gestor do currículo, não só através do estipulado nos atuais documentos curriculares para o ensino da Matemática, mas também como elemento facilitador das aprendizagens.

A gestão é uma atividade extremamente complexa, pois engloba as relações entre os principais intervenientes no processo de ensino-aprendizagem (professor e alunos), bem como as estratégias a que o docente recorre e os instrumentos que utiliza (Correia, 2002). Por isso, o currículo vai sendo construído e reconstruído em função da reflexão e da avaliação das práticas profissionais. Ainda a este propósito, Almiro e Nunes (2009, p. 68) afirmam que:

> " a gestão curricular constitui um processo complexo, podendo ser feita a vários níveis, um mais geral, para todo o ano ou unidade didáctica e outro mais específico, para uma aula ou várias aulas. Cabe ao professor tomar decisões e adaptar o currículo, selecionando as tarefas, as estratégias de sala de aula e os materiais que mais se adequam aos objectivos e finalidades do ensino da Matemática".

Assim, as mudanças a nível do ensino da Matemática têm vindo a acontecer, não só por evolução do processo de ensino-aprendizagem, mas também pelas necessidades sentidas para combater o insucesso. Huete e Bravo (2009, p. 117) confirmam que "a importância dada ao tema da resolução de problemas surge devido à falha dos programas feitos anteriormente para o ensino da Matemática". Atualmente, as propostas de trabalho apresentadas e trabalhadas com os alunos refletem as modificações que os docentes imprimem às suas aulas.

Presentemente, a sala de aula tem uma organização diferente. Os alunos não se limitam a realizar exercícios do mesmo tipo e da matéria. As aulas são de exploração, de investigação, tratam de situações do dia-a-dia e permitem variadas estratégias de resolução. Os alunos são confrontados com o desafio, aprendendo através da procura e da descoberta (Ponte & Sousa, 2010). A aquisição e a consolidação de conceitos, bem como a ligação entre relações matemáticas, orientam o trabalho de sala de aula para momentos de reflexão e discussão em grande grupo, o que impulsiona a progressão no processo de ensino-aprendizagem.

A gestão do currículo em Matemática é, frequentemente, associada a projetos dinamizados a nível de escola, que englobam diferentes turmas e implicam materiais produzidos em área disciplinar ou individualmente, numa perspetiva de trabalho colaborativo. Assim, se (re)inventa o currículo, aprofundando-o (Nunes & Ponte, 2010). Como tal, Ponte (2005) considera que, na gestão curricular concretizada pelo docente, este deverá considerar tanto os seus alunos, como as condições de trabalho, considerando, como elementos essenciais, as tarefas matemáticas e as estratégias a que o professor recorre na sua prática letiva.

3. Gestão curricular e tarefas matemáticas em sala de aula

Atualmente, na gestão do currículo de Matemática, as tarefas matemáticas ocupam um lugar central. Seguidamente analisaremos o papel das tarefas matemáticas na mudança curricular, bem como as suas particularidades na aplicação em sala de aula, constrangimentos e potencialidades.

3.1 Mudança curricular e tarefas matemáticas

As tarefas matemáticas são formas de expressão de ideias, escritas ou faladas, da leitura de produções científicas e de representações visuais e que recorrem a ferramentas como PowerPoint ou InterWriter. As mesmas são dirigidas à intuição, à imaginação e criatividade, à expressão crítica, suscitando curiosidade, entusiasmo e que obriga ao comprometimento do aluno. As tarefas são mais do que atividades pois estabelecem ligações entre conhecimentos, conhecimentos e procedimentos, de diferentes áreas de aprendizagem e entre a Matemática escolar e a do quotidiano (Boavida et al, 2008; Brun, 1996; Correia, 2002) As tarefas envolvem ativamente os alunos, já que "podem ser de muitos tipos, umas mais desafiantes, outras mais acessíveis, umas mais abertas, outras mais fechadas, umas referentes a contextos da realidade, outras formuladas em termos puramente matemáticos" (Ponte, 2005). Neste sentido e apoiando-nos nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008), entendemos que, para as tarefas matemáticas serem o centro de mudança curricular na sala de aula, têm de ser tarefas matemáticas válidas, isto é, deverão:

i. Apelar à inteligência dos alunos;
ii. Desenvolver o entendimento matemático;
iii. Incrementar a aptidão matemática;
iv. Provocar nos alunos a criação de ligações concetuais;
v. Levar a um enquadramento coerente das ideias matemáticas;
vi. Conduzir à formulação de problemas;
vii. Propiciar a resolução de problemas;
viii. Instigar o raciocínio matemático;
ix. Promover o diálogo matemático;
x. Atentar às diferenças de vivência dos alunos;
xi. Predispor os alunos para o gosto pela Matemática;
xii. Mostrar a ligação da Matemática com o mundo que nos rodeia.

Quanto à mudança curricular em Matemática, provocada pelas tarefas, é importante neste momento fazer um paralelo entre a situação que antecedeu o PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) e o momento atual. Antes da reforma curricular, as tarefas matemáticas existentes pautavam-se, essencialmente, por serem exercícios, isto é, atividades de complexidade reduzida e caráter fechado. Correia (2002, p. 23) apresenta a seguinte opinião sobre os exercícios:

> " questiona-se frequentemente o excesso de exercícios que enferma o ensino da Matemática. (…) Os exercícios têm como intenção criar nos alunos hábitos e automatismos úteis. Podem ser seleccionados, tendo presente a ideia de que é possível tornar os exercícios mais atraentes, quando ligados a situações realistas."

O que se verificou, durante muito tempo, no ensino da Matemática eram pretensas histórias de vida associadas aos exercícios que raramente se fundamentavam em situações do quotidiano. A sua resolução passava por uma estratégia pré-definida e uma única resposta correta.

Na figura 7, para exemplificação, utilizamos uma questão de um Teste Intermédio, a qual não é mais do que um exercício, já que a única destreza que os alunos têm de possuir, para responder, é saber utilizar a máquina de calcular.

Qual dos números seguintes representa o número $\frac{1}{81}$?

A) 3^{27} **B)** 3^{-4} **C)** $\frac{1}{3^{-4}}$ **D)** $\frac{1}{3^{27}}$

Figura 7 – Questão nº 2 do Testes Intermédio de 8º Ano de 2010

Fonte: Projeto Testes Intermédios (GAVE, 2010).

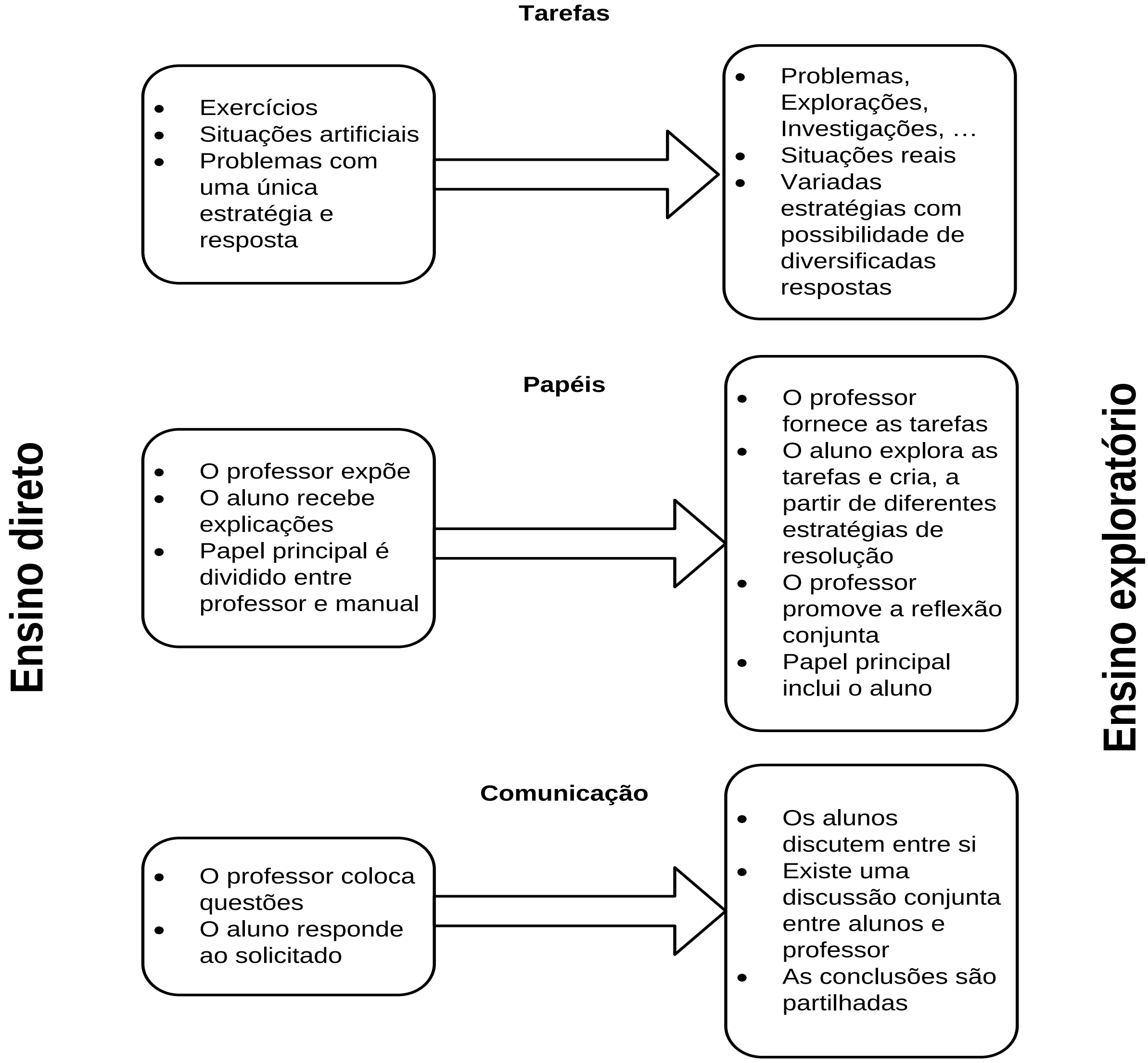
No procedimento habitual, os alunos tinham, acima de tudo, um papel de recetores de informação e explicação já que o professor, autoridade incontestável na sala de aula, demonstrava como se resolviam os exercícios. A par da figura do docente, surgia a posição de destaque do manual, como uma fonte suplementar de conhecimento e que também não era contestada. A comunicação na sala de aula reduzia-se ao inquirir do professor e ao responder pontual do aluno, salvaguardando o questionamento de dúvidas por parte do discente. Era uma aprendizagem com um tipo de ensino direto. O PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) propõe um processo de ensino-aprendizagem exploratório.

Assim, as tarefas aparecem com variáveis graus de dificuldade e de tipos diversos, assentando preferencialmente em explorações, investigações e problemas, nas quais as situações expostas não são fictícias. Para a resolução das tarefas não existem estratégias pré-determinadas, permitindo ao aluno estabelecer o seu próprio caminho. O aluno parte à descoberta da resolução, após rececionar a tarefa, justificando a opção escolhida e os argumentos utilizados através de ideias matemáticas. A autoridade passa a ser um papel dividido entre aluno e professor (Lopes, 2002).

A comunicação é, também, um dos fatores de mudança em sala de aula. O trabalho em pares e em grupo passa a ser preferencial para a discussão de ideias, possibilitando a reflexão e o debate, entre todos os intervenientes. A aprendizagem aparece sustentada pela experiência matemática e pelas respetivas conclusões. Regra geral, a aplicação das tarefas segue uma sequência. Para planificar o conjunto de tarefas, o professor pode recorrer aos seus conhecimentos científicos e à sua forma de ensinar Matemática, principalmente no que respeita a conteúdos e manuais utilizados, e à informação que possui sobre os seus alunos, relativamente ao aproveitamento e aos seus estilos de aprendizagem (Boavida et al., 2008; Correia, 2002; NTCM, 2008; Ponte et al., 2007; Ponte & Serrazina, 2009; Stein & Smith, 1998).

Uma vez mais, procuramos sintetizar o que acabamos de expor, através do quadro 4, que adaptamos de alguns dos autores anteriormente referidos.

Quadro 4 - Mudança curricular em Matemática



Fonte: Adaptado de Boavida et al. (2008); Correia (2002); NTCM (2008); Ponte et al. (2007); Ponte & Serrazina (2009); Stein & Smith (1998).

Apesar de tudo que foi descrito, o ensino da Matemática não pode abandonar a resolução de exercícios. No entanto, estes deixam de ser o tipo de atividade mais importante, para se tornarem um complemento do processo de ensino-aprendizagem, já que o espírito do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) assenta nas tarefas matemáticas. Boavida et al. (2008, p. 33) advogam que,

> " embora a aprendizagem da Matemática e, consequentemente, o trabalho na sala de aula, envolva necessariamente exercícios e actividades de memória e treino, ficaria, no entanto, incompleto, em todos os níveis, sem a resolução de problemas. A resolução de problemas permite aprender de uma forma activa, ajudar os alunos a construírem conhecimento matemático novo e também testar os seus conhecimentos sobre os diversos temas de ensino."

No entanto, é premente que a aprendizagem da Matemática não se reporte apenas à resolução de problemas. Deve ir mais além, deve permitir que os alunos alcancem o objetivo de investigar matematicamente. Em relação à questão das investigações matemáticas, diversos autores cada vez mais afirmam a sua importância. Esta ideia é reforçada por Ponte et al. (2006, p. 10) quando afirmam que "as investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura – teste – demonstração. (…) diversos estudos em educação mostram que investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento".

No Projeto Matemática 2001 (Abrantes et al., 1998, p. 82) existe a seguinte recomendação relativamente ao papel dos docentes, "os professores devem procurar utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados (nomeadamente situações da realidade e da história da Matemática) e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente, materiais manipuláveis, calculadoras e computadores".

Num artigo na revista Educação e Matemática (1989, p.9), Abrantes resume que "a resolução de problemas consiste numa larga variedade de processos, actividades e experiências, e o ensino da Matemática deveria reflectir essa variedade".

Assim, também partilhamos da opinião de Oliveira, Segurado e Ponte (1996, p. 213), quanto à motivação dos alunos no que respeita às tarefas matemáticas, quando declaram que

> " para que os alunos sintam autenticidade nas propostas de trabalho do professor é necessário que ele próprio demonstre um forte espírito investigativo, aceitando caminhos de exploração imprevistos, colocando-se a si mesmo novas perguntas, e admitindo ideias alternativas. Os alunos só poderão compreender plenamente o que significa fazer Matemática se tiverem oportunidade de observar um matemático em acção, e esta terá de ser uma das facetas essenciais do trabalho docente no quadro duma prática renovada de ensino desta disciplina."

Particularmente importante é existir uma correlação entre as tarefas matemáticas, bem como a coerência na forma como chegam junto dos discentes, para que haja uma aprendizagem eficaz.

3.2 Aspetos fundamentais das tarefas matemáticas

O Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (PMEB) (Ponte et al., 2007) insiste que sejam criadas situações problemáticas pelos professores, para que os alunos sejam levados a explorar, investigar, conjeturar, experimentar, refletir e concluir, originando um ensino mais eficaz e significativo. As tarefas matemáticas devem proporcionar, aos discentes, situações experimentais diversificadas (Stein & Smith, 1998). Neste sentido, espera-se que "a reflexão, que se faz sobre as actividades realizadas na sala de aula, permita identificar problemas, levantar questões para aprofundar, ensaiar estratégias e soluções e ajudar a definir os traços fundamentais da identidade do futuro professor" (Fidalgo & Ponte, 2004, p.9).

As tarefas matemáticas proporcionam uma alteração no espaço da sala de aula com claros benefícios para o processo de ensino-aprendizagem. Assim, as tarefas giram à volta de algumas ideias centrais, nomeadamente:

i. São o ponto de partida para a aquisição de novos conhecimentos.
ii. Recorrem a conceitos já conhecidos.
iii. Tiram partido, sempre que possível, das novas tecnologias.
iv. Levantam questões aos alunos, o que os obriga a investigar.

Da mesma forma, as tarefas têm propósitos, dos quais designamos:

i. Construção de conceitos.
ii. Compreensão de procedimentos.
iii. Domínio da linguagem e das representações matemáticas.
iv. Estabelecimento de conexões.

Neste contexto, os cuidados relativos a uma tarefa passam por várias fases: seleção, criação e adaptação. Não podemos esquecer que uma tarefa é um instrumento de trabalho intencionado, já que visa os objetivos de aprendizagem que os alunos devem atingir, a articulação entre conceitos, com o objetivo da progressão das aprendizagens e as ligações entre a Matemática escolar e a do dia-a-dia (Boavida te al., 2008; NTCM, 2008; Stein & Smith, 1998).

Desta forma, as tarefas matemáticas desenvolvem-se em dois momentos: antes e durante a aula. Por isso, deve ter-se em conta a forma como elas são apresentadas aos alunos, como estes as trabalham e como impulsionam discussões que levam a novos conhecimentos. Também a sequência pela qual são fornecidas aos alunos não pode ser descurada: uma cadeia de tarefas devidamente programada e sequenciada permite uma aprendizagem mais coerente, ao longo do processo de ensino-aprendizagem. Correia (2002, p. 17) afirma: "a diversidade de tarefas a propor aos alunos deve ser doseada, contextualizada e adequada aos objectivos que se pretende perseguir".

Relativamente às tarefas matemáticas, Menezes (1999, p.11) declara que "a influência da natureza das tarefas na qualidade e quantidade do discurso é de crucial importância. (…) é preciso encontrar tarefas que sejam equilibradas para cada tipo de alunos, ou seja, que sejam abordáveis por estes mas, ao mesmo tempo, desafiantes". Neste contexto, entendemos, tal como Ponte (2005), que as tarefas podem ser abertas ou fechadas, isto é, permitirem ou não mais do que uma forma de as trabalhar. Também não devem ser restritas, com uma só resolução e/ou resposta, mas ter diferentes graus de complexidade. As atividades de treino e de memorização não são excluídas, porém doseadas, para não se tornarem limitativas.

Então, um problema, com um enunciado interessante, torna um tópico, que habitualmente se limitava a exercícios típicos e repetitivos, em algo que pode originar uma investigação ou uma exploração. Podemos ilustrar esta afirmação através de uma questão do Teste Intermédio de 9º ano de fevereiro de 2010, em que um exercício que à partida seria de complexidade reduzida se transforma numa questão exploratória:

> Um grupo de amigos foi almoçar. Ao dividirem o preço do almoço, os amigos verificaram que, se cada um pagasse 14 euros, faltavam 4 euros. Mas se cada um deles pagasse 16 euros, sobravam 6 euros. Quanto deve pagar cada um dos amigos, de modo a obterem, exactamente, a quantia correspondente ao preço do almoço?
>
> Apresenta os cálculos que efectuaste.

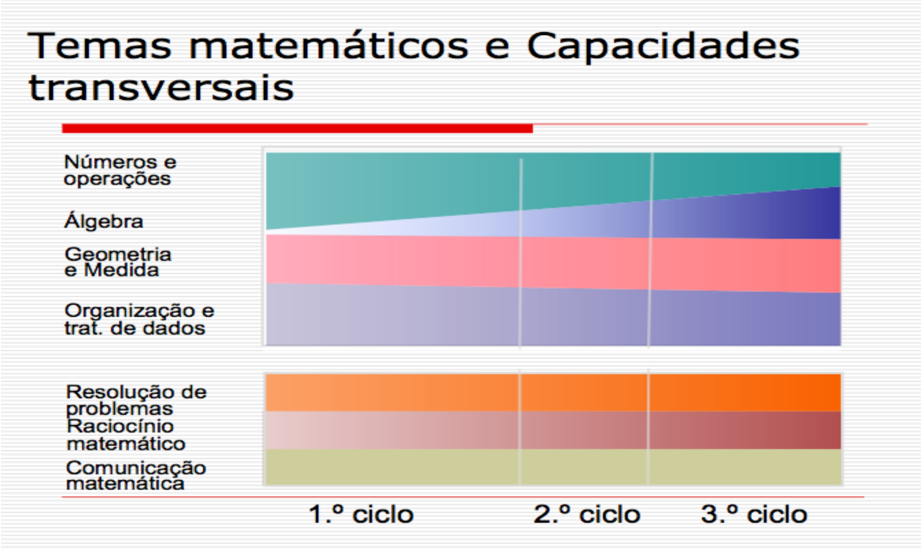
Figura 8 – Questão nº 9 do Teste Intermédio de 9º Ano de 2009

Fonte: Projeto Testes Intermédios (GAVE, 2009).

Esta questão, para além de levar à aplicação dos conhecimentos adquiridos, obriga os alunos a estabelecerem estratégias para a sua resolução, bem como potencia a comunicação matemática através de esquemas, palavras ou cálculos. A necessidade da recolha de dados e respetivo tratamento, e ainda da elaboração da resposta final, mobiliza conceitos e capacidades já desenvolvidas.

Os conteúdos matemáticos, de acordo com o PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), dividem-se em quatro grandes temas, distribuídos pelos três ciclos do Ensino Básico, como podemos constatar no quadro 5.

Quadro 5 – Temas matemáticos e Capacidades Transversais no Ensino Básico



Fonte: Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007).

Para cada tema, as tarefas matemáticas elaboradas devem ser abrangentes e diversificadas, para que possam englobar e captar o essencial do respetivo tema.

Como tal, uma tarefa matemática pode ser definida como um desafio que implica ideias matemáticas significativas, envolvendo os alunos de tal forma, que os mesmos criam e/ou aplicam conhecimentos prévios em novas situações, através da exploração de questões, aplicação de diferentes estratégias e procura de confirmação de conclusões. Propiciam contextos de aprendizagem de aquisição e/ou aplicação de conceitos, facilitando o estabelecimento de ligações concetuais entre temas matemáticos, ligações com outras áreas curriculares disciplinares e não disciplinares e utilização da Matemática no quotidiano dos alunos (Boavida et al., 2008; Stein & Smith, 1998).

3.3 Nível cognitivo das tarefas matemáticas

Um fator primordial para a seleção da tarefa e sua consequente aplicação é o nível cognitivo, já que o mesmo deve ser mantido ou aumentado ao longo da sua consecução. Na figura 9, que adaptamos de Stein e Smith (1998), podemos constatar as várias fases cognitivas pelas quais uma tarefa passa.

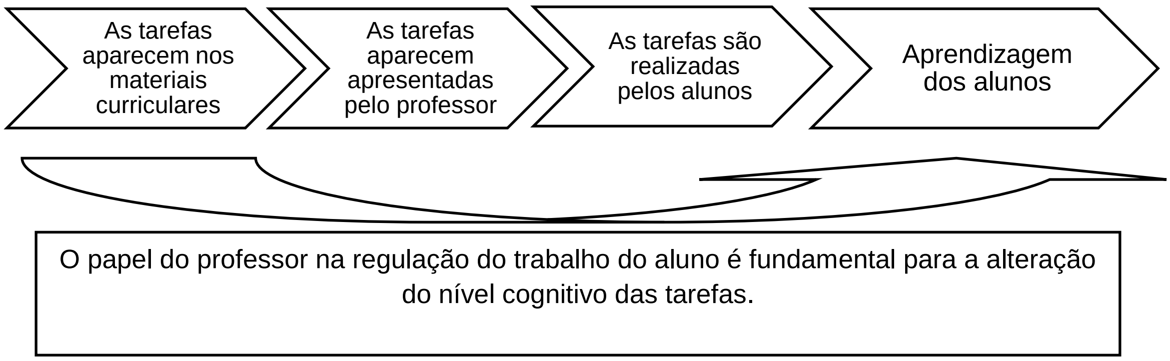


Figura 9 - Nível cognitivo das tarefas

Fonte: Adaptado de Stein e Smith (1998).

Ainda no que concerne à figura 9, salientamos que, apesar das tarefas serem importantes e o ponto de partida para a atividade que vai ser realizada pelo aluno, a forma como o aluno as aplica é fundamental. O nível cognitivo como são apresentadas, por exemplo pela DGIDC (ME, 2008), nem sempre é mantido pelo professor, no caso de adaptação de materiais curriculares provenientes de brochuras do Ministério ou de manuais escolares, entre outros. O nível é ainda alterado pelos alunos, na realização. Os motivos principais para a não manutenção do nível cognitivo prendem-se, essencialmente, com (Conceição & Fernandes, 2009):

i. A falta de experiência dos alunos na realização de tarefas de complexidade aberta, nomeadamente, de investigação e exploração.
ii. A demonstração da resolução da tarefa por parte do docente, não orientando ou monitorizando, mas resolvendo.
iii. A gestão do tempo de realização da tarefa, pois muitas vezes ele é insuficiente ou demasiado.
iv. O professor não responsabilizar os alunos pela sua aprendizagem, ao permitir que as explicações não sejam cientificamente corretas ou sejam pouco explícitas.

Numa tentativa de precaver a descida do nível cognitivo de uma tarefa, o professor:

i. Na seleção, deve baseá-la em conceitos já adquiridos.

ii. Na sua aplicação, provoca as justificações com argumentos matemáticos, procura comentários às situações apresentadas, exige explicações sobre as afirmações proferidas.
iii. Na sua sintetização, estabelece ligações entre conteúdos.
iv. Fomenta a reflexão sobre a aprendizagem.
v. Promove a autoavaliação.

O espírito do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) está perfeitamente de acordo com as ideias sustentadas por Freire (2007), quando defende que o docente não pensa pelos alunos, mas com os alunos, ou seja, a colaboração é essencial.

Outro fator a ter em conta, relativamente às tarefas, é a sua seleção. Quando um docente seleciona uma tarefa tem de pensar em pelo menos três vertentes: diversidade, aplicabilidade e sequencialidade. Uma tarefa deve ser diversificada o suficiente na sua complexidade, no grau de desafio que provoca, no contexto em que se insere, podendo ser de carácter matemático ou não, na duração da sua execução, nas formas de esquematização (esquemas, palavras, tabelas, entre outras) e materiais a que os alunos têm de recorrer para as resolverem. Correia (2002, p. 17) enquadra os critérios para a seleção de tarefas da seguinte forma:

Quadro 6 - Nível cognitivo das tarefas

Compatibilidade	**Aspectos matemáticos**	**Aspectos dos alunos**	**Capacidades**	**Aspectos motivacionais**
Integração curricular Integração contextual	Raciocínio matemático Comunicação matemática Procedimentos Conexões Sentido estético	Intuição Ritmo Necessidades	Imaginação Criatividade para «fazer matemática» Sentido crítico	Focus na tarefa: sedução Focus no aluno: curiosidade comprometimento

Fonte: Correia (2002, p. 17).

Tendo em conta o quadro 6, e no que diz respeito ao modo como as tarefas são aplicadas, há que ter em conta alguns aspetos: apresentação, trabalho desenvolvido, discussão e síntese final. Relativamente ao momento em que as tarefas matemáticas chegam aos alunos, podem ser simplesmente fornecidas ou iniciadas com uma introdução. Os discentes podem desenvolver o trabalho individualmente, em pares ou ainda em grupos, sendo que o docente funciona como um moderador e/ou orientador, contudo sem resolver os problemas que lhes são apresentados.

O debate, decorrente da aplicação da tarefa, deve assentar numa participação equilibrada entre todos, ser alvo de um questionamento diversificado entre alunos e alunos-professor, bem como obrigar a que, na justificação das respostas ou escolhas, ocorram explicações utilizando linguagem matemática. Finalmente, na realização da síntese final devem ser salvaguardados os novos conceitos, a consolidação dos conhecimentos adquiridos anteriormente, as ideias surgidas e sugeridas, e ainda as ações apreendidas (Correia, 2002; Ponte et al., 2007; Stein & Smith, 1998).

Sintetizamos o que anteriormente descrevemos no quadro 7, que adotamos do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007).

Quadro 7 - Aspetos a ter em conta relativamente às tarefas

<table>
<tr><th colspan="2">Tarefas</th></tr>
<tr><td colspan="2">aspetos a ter em conta na:</td></tr>
<tr><th>Seleção</th><th>Aplicação</th></tr>
<tr><td>Diversidade
Disponibilidade
Sequência</td><td>Apresentação
Trabalho dos alunos
Discussão
Síntese</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007).

Ainda no mesmo contexto, salientamos três pormenores: (1) o erro é mais um momento de aprendizagem; (2) o momento da discussão, para além de ser de estimulação, é de *feedback*, relativamente à progressão do conhecimento no processo de ensino-aprendizagem; (3) a elaboração das sínteses finais deverá ter em conta a faixa etária dos alunos.

Consequentemente, o aluno passa a ter um papel de destaque, durante a investigação matemática. Correia (2002) defende que a sua atuação passa por quatro etapas, a saber:

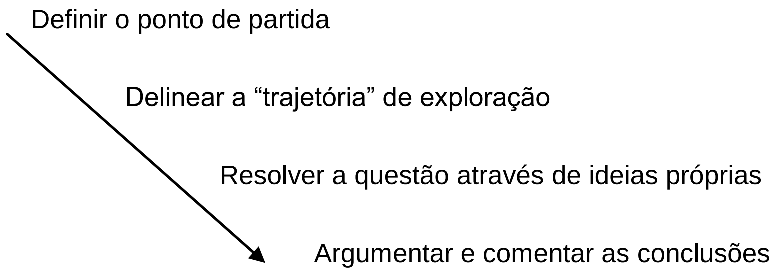


Figura 10 - Papel do aluno relativamente a uma tarefa matemática
Fonte: Adaptado de Correia (2002).

Relativamente ao papel do professor, no que respeita às tarefas matemáticas, Stein et al. (2008) são de opinião que a sua atuação deve pautar-se por cinco práticas, como consta da figura 11 e a qual também se reporta às aprendizagens significativas matemáticas.

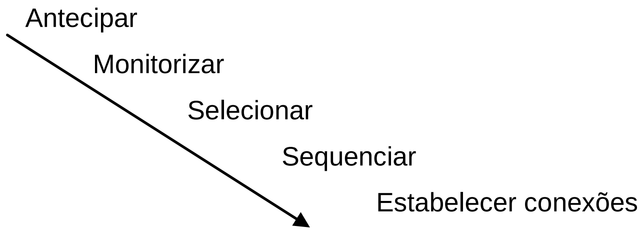


Figura 11 - Papel do docente relativamente a uma tarefa matemática
Fonte: Adaptado de Stein et al. (2008).

Nesta perspetiva, reiteramos que é importante que haja sempre uma ligação entre as diversas atuações do professor e uma seleção criteriosa das tarefas que irão ser aplicadas, como também uma ponderada distribuição dos tempos de utilização da tarefa, pelos vários momentos da aula, e uma produtiva mediação das discussões matemáticas.

No que concerne à discussão entre alunos e professor, inerente à tarefa proposta, Huete e Bravo (2009) enumeram algumas estratégias:

i. Analisar.
ii. Elaborar um esquema, tabela, diagrama ou outros, sempre que possível.
iii. Salientar as situações especiais: (1) exemplificar usando valores mais restritos; (2) testar alguns valores para tentar encontrar regularidades matemáticas.
iv. Simplificar a questão.

v. Explorar.
vi. Procurar situações equivalentes através de: (1) recorrência a situações análogas; (2) disposição dos dados do problema por outra ordem; (3) inserção de informação auxiliar.
vii. Subdividir o problema, para que o mesmo seja trabalhado noutra ótica.
viii. Criar um novo problema, alterando alguns ou todos os dados.
ix. Confirmar o resultado encontrado, colocando em dúvida a resposta encontrada ou procurando generalizações.

Tendo em conta o papel preponderante, que as tarefas matemáticas assumem, na mudança curricular exigida pelo PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), haverá que equacionar os respetivos constrangimentos e potencialidades.

3.4 Constrangimentos e potencialidades das tarefas matemáticas

Duarte (2000, p. 98) defende que uma das vantagens das tarefas é servirem

> “ como ponto de partida para discussões matemáticas onde os alunos, mais do que ouvintes, são membros activos de uma pequena comunidade que pensa e age matematicamente. Os alunos formulam conjecturas que os levam a discutir e a pôr em questão a sua própria maneira de pensar. Muitas aulas de Matemática consistem em «o professor fala e os alunos escutam», daí a necessidade de dar aos alunos oportunidades para falar de Matemática com os outros colegas.”

De acordo com o PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), as tarefas são a base de trabalho dos alunos para a atividade de aprender Matemática e a aprendizagem decorrente das mesmas, apresentando as seguintes vantagens:

i. Potenciam o envolvimento dos alunos.
ii. Desenvolvem a compreensão e a aptidão matemática.
iii. Permitem o uso de variadas representações.
iv. Proporcionam diferentes formas de comunicação.
v. Incentivam o raciocínio.
vi. Implicam a justificação.
vii. Mostram a Matemática como uma disciplina que faz parte da condição humana.

No entanto, as tarefas apresentam alguns constrangimentos aos docentes, uma vez que qualquer mudança implica novas preocupações, dúvidas, obstáculos e inseguranças. Umas das dificuldades mais apontadas é o fator tempo, pois implica a utilização de tempo letivo, para além do planificado, o qual muitas vezes não permite o cumprimento do programa da disciplina, de acordo com o estipulado em departamento ou área disciplinar (Seabra & Martinho, 2009). Outro elemento dificultador, na implementação das tarefas matemáticas na sala de aula, é a utilização do espaço de sala de aula numa outra dinâmica: o trabalho em grupo ou em pares (Cunha, 1998).

Na execução das tarefas matemáticas pelos alunos verificam-se igualmente constrangimentos. Por um lado, estão relacionados com questões organizacionais, nomeadamente o número de alunos por turma, o tempo disponível para fornecer *feedback* escrito às produções dos alunos. Por outro lado, têm a ver com o papel do aluno e o seu desempenho, associados à compreensão do *feedback* e ao significado atribuído aos comentários do professor (Dias & Santos, 2010). Com menos ênfase, um outro obstáculo é a gestão das discussões inerentes, após a realização e como etapa final de uma tarefa matemática, a que se acrescenta a concretização de sínteses, com os contributos que os alunos apresentam (Conceição & Fernandes, 2009).

Há ainda a considerar o contexto de trabalho, em que se desenvolvem as tarefas matemáticas, de forma a ultrapassar eventuais dificuldades, quer dos docentes (ensino) quer dos alunos (aprendizagem). Como estratégias ativas, haverá que considerar a reflexão, a discussão e a avaliação (Abrantes, 2002).

As práticas avaliativas, que promovem a autorregulação, são intencionais e interativas. No entanto, uma ação isolada do aluno tem pouco impacto no desenvolvimento da capacidade de autorregulação das aprendizagens matemáticas. Estas práticas devem ter um carácter sistemático e incluir tarefas diversificadas. Portanto, o professor deverá ter um cuidado especial na seleção das tarefas, em relação ao *feedback* fornecido pelas produções do aluno e na recolha de informação sobre a concretização das aprendizagens (Lopes, 2002).

As diversas mudanças a nível da gestão curricular, em sala de aula, implicam a análise de uma componente essencial do processo de ensino-aprendizagem, com grande impacto junto dos vários atores envolvidos: a avaliação.

4. Avaliação e gestão curricular

Ao longo dos tempos, a avaliação sofreu profundas mudanças, integrando os contributos das teorias construtivistas, cognitivas e socioculturais das aprendizagens (Solé & Coll, 2001). Talvez por isso, seja uma das tarefas mais difíceis que se impõe a um professor. De cada vez que ocorre uma alteração curricular, novas dúvidas surgem sobre a avaliação. Atualmente, continua a ser necessário mudar e aperfeiçoar as práticas de avaliação das aprendizagens, pois estão claramente desfasadas das presentes exigências curriculares. A avaliação continua a centrar-se na classificação final dos alunos e não na melhoria das suas aprendizagens, privilegiando a avaliação sumativa. Assim, é crucial que a avaliação tenha em conta o desenvolvimento das teorias da aprendizagem, das teorias do currículo e do sistema educativo em que assenta (Fernandes, 2005).

4.1 Conceito de avaliação

O conceito de avaliação não se restringe à Educação. Admite tal diversidade que nem sempre reúne concordância entre os investigadores. Avaliar é uma atitude inerente ao ser humano, fazendo parte do seu quotidiano. Questionamos, tal como Hadji (1994, p. 27): "o que significa exatamente avaliar? Poder-se-á pensar que uma pergunta desta natureza é bastante ingénua. Como toda e qualquer questão de sentido (…) arrisca-se mesmo a nunca ter resposta acabada". Assim, procuraremos explicitar algumas definições. Arends (2008, pp. 211-247) define a avaliação como sendo

> " um processo de fazer juízos ou decidir sobre o mérito de uma determinada abordagem ou de um trabalho de um aluno (…). A avaliação pode ser definida como uma função desempenhada pelos professores para tomar decisões acertadas sobre o seu ensino e os seus alunos."

Nas palavras de Hadji (1994), avaliação é um termo complexo, já que possuí um vasto campo semântico. Essa diversidade é demonstrada pela quantidade de termos que se utilizam para definir o processo de avaliar, que denota a falta de entendimento em torno de uma aceção sobre avaliação e as dificuldades inerentes a todo esse processo.

Na forma concetual mais extensa, a avaliação permite manter, alterar ou suspender um certo plano, sempre numa perspetiva pedagógica, de forma a otimizar a qualidade do que é ensinado e acabar com o que não serve. A «nova» avaliação coloca em causa a tradicional, pois torna o processo avaliativo regulador, implicando exigir diferenciação de ensino, quer em termos pedagógicos, quer em formas de atuação. Além disso, atribui um papel mais ativo aos vários intervenientes no processo ensino-aprendizagem, valorizando uma nova comunidade educativa e a autonomia das escolas (Santos, 2005).

Uma grande parte do tempo dos professores é gasto no processo de avaliação. Por ter um papel tão preponderante, a avaliação é uma parte integrante de qualquer disciplina e, em particular, do ensino da Matemática, contribuindo de forma eficaz para a aprendizagem. Por isso, deve ir para além dos testes de final de período. “O ensino sem avaliação digna desse nome é caricatura de ensino. Mas um ensino obcecado por exames finais, centrado na avaliação, em que todo o empenho gira em volta da preparação para as provas ou exames, dificilmente pode merecer o nome de ensino” (Netto,1987, p. 23). No entanto, a sociedade atual exige que os seus alunos provem os seus conhecimentos, por isso a função de certificação de conhecimentos nunca poderá deixar de existir.

A tarefa do professor já não é só transmitir conhecimentos para serem assimilados, mas também facilitar a aprendizagem dos alunos. Como tal, regular as necessidades dos alunos, ao longo do processo de aprendizagem, é primordial. A orientação deve ter caráter contínuo e reversível, de modo a permitir ao aluno ter consciência das suas possibilidades e limitações. A explicitação de critérios é fundamental no processo ensino-aprendizagem e, consequentemente, no processo avaliativo, dado que permite esclarecer a aprendizagem em si, os comportamentos esperados dos vários intervenientes e quais são os indicadores de sucesso (Couvaneiro & Reis, 2007).

Ampliar conceitos como planificação, conteúdos, comunicação didática e metodologia é importante, para que haja identificação de critérios de avaliação e desenvolvimento de conteúdos, os quais levem, por sua vez, a um desenvolvimento de capacidades e competências (Perrenoud, 1999). Na figura 12, podemos observar essa ampliação concetual. De acordo com Rosales (1992, p.30), a avaliação constitui “um reflexo sobre o ensino”, de carácter sociocultural, institucional e pedagógico. Baseada na observação e reflexão, possibilita a identificação dos conhecimentos e das dificuldades experienciadas pelos alunos. Por isso, deverá ser treinada e aplicada, em sala de aula, de forma a que os alunos participem, conjuntamente com o professor, na verificação e otimização dos processos de ensino-aprendizagem, potenciando a qualidade das aprendizagens e o sucesso educativo.

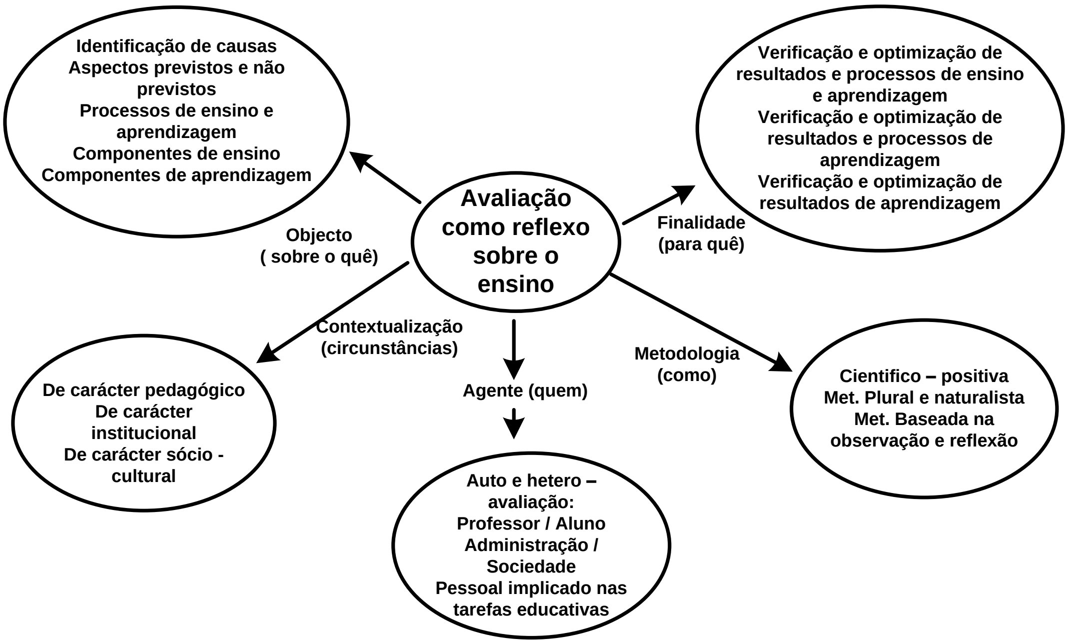


Figura 12 - Ampliação concetual da avaliação

Fonte: Rosales (1992, p. 30).

Um processo de avaliação hierarquizado apresenta vantagens por ser sistémico, progressivo, lógico e inteligível. Com mais facilidade, o aluno adquire o seu ritmo de desenvolvimento e de aprendizagem, através de estratégias de observação e de avaliação baseadas na experiência e na reflexão. Desta maneira, é possível tornar o avaliado num agente ativo, cooperador e crítico, que tenha capacidade de apreender, perspetivar o que vai ser avaliado e visualizar quais os critérios dessa mesma avaliação. Segundo Cardinet (1993), o avaliado, para além de ser mestre de si mesmo, deverá ter a capacidade de se autoavaliar, sendo que as três principais funções da avaliação deverão ser regular, orientar e certificar.

A avaliação deve ter, como primeiro objetivo, a aprendizagem. O aluno deve estar perante a avaliação de forma natural. Esta deve ser encarada como uma atividade normal da sala de aula e não como algo excecional (NCTM, 2008).

Na ótica do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), a avaliação que, na perspetiva tradicional é "um processo de congruência entre os objetivos e os desempenhos dos alunos" (Pinto & Santos, 2006, p. 20), passa a ser "vista como um processo de acompanhamento do ensino/aprendizagem" (Santos, 2008, p. 4). De acordo com Santos e Menezes (2008, p. 8), para

> " avaliar (…) não basta recolher informação. É indispensável, entre outras, interpretar essa informação no contexto onde ocorre, desenvolver uma atitude crítica e compreensiva sobre ela, delinear alternativas, atribuir visões não simplificadas da realidade e prever intervenções sustentadas na interpretação e análise da informação recolhida. Por outras palavras, avaliar significa

desenvolver uma cultura avaliativa que procure a criação de conhecimento para um agir futuro."

Assim, será necessário recorrer a diferentes tipos de avaliação, que se podem complementar entre si, valorizando o processo avaliativo e enriquecendo a recolha de evidências, tornando-o mais eficaz. A avaliação distingue-se, não só pelo momento em que é aplicada, como também na forma como a mesma é realizada. Qualquer avaliação deverá ter sempre presente os diferentes tipos de avaliação, aos quais recorrerá nos diversos momentos do processo de ensino-aprendizagem.

4.2 Princípios orientadores da avaliação

A avaliação deve ser um processo contínuo, recorrente, público, participado, e dinâmico, no qual os desempenhos dos alunos não sejam comparados entre si, mas antes ponderados através de critérios de avaliação pré-estabelecidos. Mas, para que a avaliação seja um processo, que decorra de acordo com o anteriormente referido, tem de passar por algumas fases, como se pode observar na figura 13, que adaptamos de Arends (2008) e Santos (2005):

Figura 13 - Fases da avaliação

Fonte: Adaptado de Arends (2008) e Santos (2005).

Assim, o processo avaliativo começa na planificação. Esta, por sua vez, leva a uma atuação que vai resultar numa avaliação. No final, ocorre uma reflexão que dá origem a reformulação ou a nova planificação. A avaliação, propriamente dita, também é planificada, observada, refletida e interventiva (Rosales, 1992), de acordo com alguns princípios orientadores. No quadro 8, podemos observar algumas dessas normas, que estão dispostas sem ordem específica, já que todas devem fazer parte da avaliação, sem que lhes seja atribuída maior ou menor importância:

Quadro 8 - Princípios orientadores da avaliação

Princípios da avaliação	**Aspetos que os caracterizam**
Coerência	A avaliação, no currículo, deve ser coerente, nomeadamente entre objetivos, metodologias e conteúdos.
Integração	A avaliação deve ser justa e evitar a criação de situações de desigualdade nos momentos de avaliação.
Diversidade	A avaliação deve recorrer a variados instrumentos, para que haja uma recolha eficaz de evidências das aprendizagens dos alunos, pois existe uma diversidade de aspetos a serem avaliados.
Inferência	A avaliação deve promover inferências válidas sobre a aprendizagem em Matemática, através da recolha de evidências e estabelecer conclusões a partir dessas evidências, com várias finalidades.
Transparência	A avaliação deve ser um processo transparente. Todos os alunos devem ser informados sobre o que têm de saber, como se espera que demonstrem esse conhecimento e sobre as consequências da avaliação.
Equidade	A avaliação deve promover a igualdade de oportunidades. Deve permitir abordagens múltiplas, já que alunos diferentes mostram, de formas diversas, o que sabem e são capazes de fazer.
Aprendizagem	A avaliação deve melhorar a aprendizagem em Matemática. Os alunos aprendem Matemática ao serem avaliados, por isso as avaliações constituem oportunidades, quer para aprenderem, quer para demonstrarem o que sabem e são capazes de fazer.
Matemática	A avaliação deve refletir a Matemática que todos os alunos devem saber e ser capazes de fazer, levando-os a desenvolver o seu poder matemático através de um sistema de avaliação que lhes permita demonstrá-lo.
Caráter positivo	A avaliação deve ser direcionada ao aluno que já é capaz, que já é conhecedor e não ao que ainda não sabe.
Generalidade	A avaliação, numa perspetiva holística entre a Matemática e aprendizagem, deve direcionar-se aos objetivos gerais. Os instrumentos devem ser escolhidos com o propósito para que foram construídos e o aluno deve ser visto como um todo.
Postura	A avaliação deve ter por base um ambiente de clareza e confiança, levando a que os alunos reajam naturalmente a críticas e sugestões. Situações de pressão ou penalização não são formas de avaliação.

Fonte: Adaptado de NCTM (2008) e do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007).

Devido ao reajustamento que os programas de Matemática sofreram, no início dos anos noventa, a Associação de Professores de Matemática (APM, 1991) organizou um encontro subordinado ao tema da avaliação, já que era um dos aspetos mais fortemente criticados pelos professores. Nas conclusões do encontro, os docentes indicaram que as diretrizes, vindas do Ministério, eram insuficientes e pouco específicas, principalmente no que dizia respeito a instrumentos de avaliação. No relatório final do Projeto Matemática 2001 (Abrantes et al., 1998, p. 89), que faz um balanço sobre os novos currículos, que tinham entrado em vigor, pode-se ler " o projecto Matemática 2001 abordou igualmente a avaliação, um aspecto que se sabe ser decisivo na estruturação de toda a actividade escolar. Os dados obtidos confirmam tratar-se de uma área extremamente problemática, como indiciam as dificuldades e preocupações manifestadas pelos professores".

Apesar das dificuldades existentes, não podemos, no entanto, esquecer que a avaliação tem um papel primordial no desenvolvimento das aprendizagens – das mais simples às mais complexas – influenciando o desenvolvimento de qualquer aluno a nível cognitivo, sócio afetivo e moral. As práticas avaliativas e os seus respetivos instrumentos são fatores decisivos de práticas pedagógicas e processos de aprendizagem que daí decorrem. Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008, p. 23) podemos ler

> " a avaliação deverá ser mais do que um teste no final no período de ensino, com o intuito de verificar o desempenho dos alunos perante determinadas condições; ela deverá constituir uma parte integrante do ensino, que informa e orienta os professores nas suas decisões. A avaliação não deverá ser meramente feita *aos* alunos; pelo contrário, ela deverá ser feita *para* os alunos, para os orientar e melhorar a sua aprendizagem."

Assim, a avaliação, em Matemática, tem como objetivo principal a melhoria das aprendizagens. Essa melhoria deve ser conseguida através de (Leite, 2007; Pacheco, 1998):

- Planificações congruentes com o programa;
- Utilização como parte integrante do processo ensino-aprendizagem;
- Variados modos e instrumentos de avaliação;
- Caráter predominantemente formativo;
- Clima de confiança;
- Processos transparentes para os alunos e encarregados de educação.

De acordo com o PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007, pp.11-12) é recorrendo à

> "avaliação que o professor recolhe a informação que lhe permite apreciar o progresso dos alunos na disciplina e, em particular, diagnosticar problemas e insuficiências na sua aprendizagem e no seu trabalho, verificando assim a necessidade (ou não) de alterar a sua planificação e acção didáctica. A

avaliação deve, por isso, fornece informações relevantes e substantivas sobre o estado das aprendizagens dos alunos, no sentido de ajudar o professor a gerir o processo de ensino - aprendizagem. (…) A avaliação informa o professor acerca dos progressos dos alunos e ajuda-o a determinar actividades a realizar com toda a turma e individualmente. O professor deve envolver os alunos no processo de avaliação, auxiliando-os na análise do trabalho que realizam e a tomar decisões para melhorarem a sua aprendizagem. Este procedimento favorece uma visão da avaliação mais propícia à melhoria do ensino e aprendizagem, reforçando as suas potencialidades formativas.”

Neste sentido, é possível que os alunos adotem hábitos de reflexão e atitudes potenciadoras do desenvolvimento das suas aprendizagens (Fernandes, 2008). Em simultâneo, a avaliação desenvolve os processos metacognitivos, o autocontrolo e a autorregulação, bem como influencia a motivação e melhora a autoestima dos alunos. Desta forma, os diferentes tipos de avaliação devem ser considerados como parte integrante de todo o processo de ensino-aprendizagem.

4.3 Tipos de avaliação

Neste ponto, poderíamos abordar um conjunto extenso de tipos de avaliação: diagnóstica, externa, normativa, oral, entre outros. Contudo, atendendo ao PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), a avaliação que os professores, hoje em dia, exercem enquadra-se em quatro grandes tipos: diagnóstica, formativa, sumativa e reguladora. Assim, faremos uma descrição sucinta destes tipos de avaliação.

4.3.1 Avaliação diagnóstica

A avaliação diagnóstica é, de uma forma geral, feita no início do ano letivo ou de um tópico, isto é, “tem como missão específica determinar as características da situação inicial de um determinado processo didáctico” (Rosales, 1992, p. 36). O seu uso é generalizado e permite que o professor avalie os conhecimentos prévios e as lacunas existentes, que condicionam a planificação, aprendizagem e respetivos resultados do conteúdo seguinte. Portanto,

“as decisões tomadas pelos professores, relativas ao ensino (sobre como e quando rever matérias que constituem um pré-requisito, como fazer a revisão de um conceito difícil, ou como adaptar tarefas para alunos mais fracos ou para aqueles que precisam de enriquecimento adicional), baseiam-se em inferências acerca daquilo que os alunos sabem e daquilo de que necessitam aprender” (NCTM, 2008, p. 25).

Dado que os alunos cumprem a avaliação diagnóstica através de uma comparação entre os resultados obtidos, este tipo de avaliação tende a seguir uma distribuição gaussiana, isto é, uma distribuição cujo gráfico possui a forma de um sino e que tem, como ponto de referência, os resultados médios de todos os alunos (Cardinet, 1993). De uma forma geral, a avaliação diagnóstica pretende averiguar os conhecimentos, as aptidões ou as capacidades necessárias dos alunos para as aprendizagens futuras. Podemos entender que este tipo de avaliação é essencial para a definição de um perfil de entrada em qualquer tópico ou tema.

Como tal, os docentes devem aplicar instrumentos de avaliação diagnóstica para se certificarem da adequação das estratégias à turma, como motivação dos discentes e, ainda, para se inteirarem das aprendizagens já assimiladas, como conhecimento significativo. O processo de ensino-aprendizagem ganha em eficácia se cada professor efetuar uma planificação a médio e a curto prazo, com base no conhecimento real do nível de aprendizagens e experiências dominadas pelos seus alunos, e não insistir em temas já entendidos e consolidados (Rodrigues, 1999).

Fundamental é ainda definir, para cada tema/tópico os pré-requisitos necessários. Com base nos objetivos e nos conteúdos a lecionar, o professor define os pré-requisitos e elabora testes ou tarefas diagnósticas, para avaliar a posse destes pré-requisitos. Os testes diagnósticos ou as tarefas incidem sobre um núcleo restrito de objetivos, sobre os quais são apresentadas várias questões. Normalmente, o teste diagnóstico/tarefa diagnóstica é constituído por itens de aprendizagens anteriores, mas que estão relacionados com as aprendizagens futuras (Pacheco, 1998).

Assim, os testes de diagnóstico não deveriam ser alvo de classificação. A avaliação dos pré-requisitos é a forma de avaliação diagnóstica através da qual se verifica se o aluno possui as aprendizagens anteriores, necessárias para que novas aprendizagens tenham lugar (Perrenoud, 1999). Um pré-requisito é uma aprendizagem anterior requerida e imprescindível para a nova aprendizagem.

4.3.2 Avaliação formativa

No processo de ensino-aprendizagem, a avaliação formativa é realizada em diversos momentos e sempre com o objetivo de determinar o nível de aprendizagem dos alunos e o seu respetivo progresso, no que diz respeito ao currículo, dando a possibilidade ao professor de reajustar as suas planificações e estratégias de ensino. Requer que o professor dedique mais tempo na elaboração e adaptação a um novo tipo de classificação, tendo em conta os diferentes instrumentos a que recorre e a sintetização da informação recolhida com os mesmos. Através da figura 14, que desenvolvemos, baseando-nos em vários autores como, por exemplo, Fernandes (2006), Pinto e Santos (2006) e Santos (2008) podemos constatar o acima descrito.

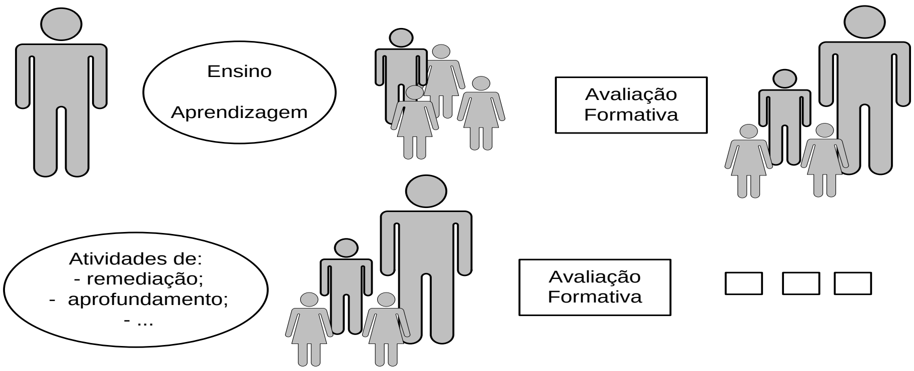


Figura 14 - Modelo de avaliação formativa

Fonte: Adaptado de Fernandes (2006), Pinto e Santos (2006) e Santos (2008).

Assim, a avaliação formativa visa a retroalimentação do processo de formação. Realiza-se ao longo de todo o processo de ensino-aprendizagem, sobre cada objetivo, reconhecendo situações de aprendizagens mal conseguidas e fornecendo informações sobre medidas corretivas a tomar. De uma forma genérica, incide, tal como a avaliação diagnóstica, em cada objetivo de aprendizagem. Por isso, os testes formativos são de natureza semelhante aos de diagnóstico (Hadji, 1994).

Um teste formativo recai sobre um número reduzido de objetivos, à volta dos quais se elaboram várias questões. Significa, por isso, que os alunos devem ser informados, ao longo da aprendizagem, dos objetivos a atingir. Para tal, o professor elabora dois instrumentos complementares: o perfil de aptidão do aluno e o perfil de aptidão da turma (Rosales, 1992).

Relativamente ao documento sobre o perfil de aptidão do aluno, deve conter:

- Registo dos objetivos do tópico ou tema;
- Nível de consecução desejável;
- Conteúdos e provas de avaliação a realizar durante o tema ou tópico.

O professor assinala, no documento, os objetivos já atingidos, para uma melhor orientação do processo de ensino-aprendizagem. O aluno também poderá efetuar um registo num documento semelhante, os seus níveis de consecução.

Em relação às aptidões da turma, o professor efetua um registo dos resultados, preferencialmente, no final de cada avaliação. Deste modo, é possível obter um somatório de consecução das aprendizagens de todos os discentes, por objetivo. Nesta ótica, para professor e alunos, o tempo de aprendizagem é gerido mais eficazmente, permitindo uma maior capacidade de solucionar situações de insucesso (Arends, 2008).

No entanto, a avaliação formativa, que surgiu por evolução das teorias de aprendizagem, ainda é vista com alguma desconfiança, pelos vários elementos da comunidade educativa, por recorrer a momentos informais e a outros instrumentos de avaliação, que até então não eram frequentes. O Despacho Normativo nº 30/2001 de 19 de julho, para além de reforçar a importância da avaliação formativa como ferramenta privilegiada para os professores na obtenção de aprendizagens mais eficazes, incentiva o seu recurso em detrimento da avaliação mais usualmente utilizada – a sumativa.

4.3.3 Avaliação sumativa

A avaliação sumativa ainda continua a ser o tipo de avaliação com maior uso. Ocorre uma ou duas vezes por período, tendo como instrumento preferencial o teste escrito, com atribuição de uma nota quantitativa ou uma menção, e avalia aquisições de conteúdos, influindo na transição de ano letivo. Como não há interação entre ensino e avaliação, não é uma avaliação dinâmica, como é possível observar na figura 15, construída com base em Couvaneiro e Reis (2007) e Melo e Bastos (2012).

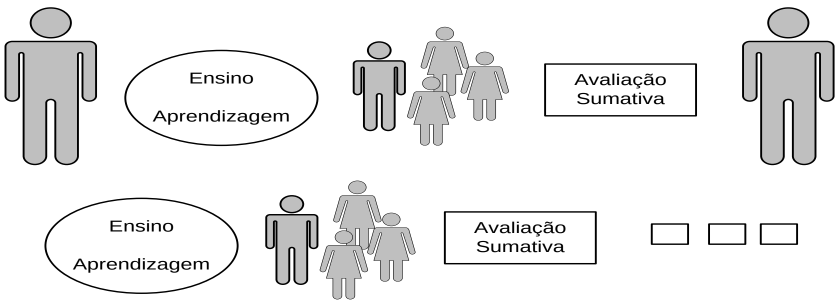


Figura 15 – Modelo de avaliação sumativa

Fonte: Adaptado de Couvaneiro e Reis (2007) e Melo e Bastos (2012).

A avaliação sumativa procede a um balanço das aprendizagens e competências adquiridas, no final de um tema ou tópico, com o intuito de efetuar uma seriação e, portanto, dá origem a classificação final. De uma forma geral, as escolas têm uma mesma escala de classificação, definida pelo Conselho Pedagógico e aprovada em Conselho Geral, por questões de uniformidade de critérios e transparência de processo, bem como noutras avaliações (questões-aula, minifichas). Normalmente, as áreas disciplinares optam por atribuir a mesma pontuação ou classificação qualitativa. Neste sentido, é importante que a classificação seja explícita e discutida com os alunos (Perrenoud, 1999).

Na opinião de Leite e Fernandes (2002) e Matos (2011), a avaliação sumativa:

- Revela as aprendizagens já consolidadas e as não se aprendidas;
- Informa sobre os assuntos ou objetivos mais difíceis de ensinar e aprender;
- Informa sobre o sucesso ou insucesso de certas metodologias;
- Permite comparar resultados globais aplicados a turmas semelhantes ou diferentes;
- Avalia a própria aprendizagem;
- É um instrumento de tomada de decisão.

No âmbito da avaliação sumativa, o instrumento mais utilizado é, sem dúvida, o teste sumativo. O teste sumativo recai sobre um conjunto de objetivos, informando sobre as aprendizagens mais significativas. A elaboração de um instrumento de avaliação sumativa decorre dos seguintes princípios (Hadji, 1994):

- Seleção dos objetivos a testar, de modo a testar todos os objetivos ao longo do tópico/tema;
- Determinação da importância relativa de cada objetivo e área de conhecimento, tendo em atenção o seu desenvolvimento nas aulas. O peso da respetiva classificação decorre dessa importância;
- Seleção do tipo de perguntas adequadas para testar o objetivo;
- Escolha de graus de dificuldade diferentes, para os itens, e adequada classificação de cada item.

Na opinião de Arends, (2008) e Rosales (1992), um instrumento de avaliação sumativa deverá ser sempre corrigido pelo professor. O registo, realizado numa matriz com todas as classificações da turma, por item, permitirá uma visão completa e real do sucesso das atividades desenvolvidas. Poder-se-á, deste modo, avaliar as decisões tomadas e a tomar.

Mas, apesar deste tipo de avaliação não ser única e ter limitações, nomeadamente a nível da reflexão das aprendizagens, “a avaliação sumativa tende a impor-se em toda ação avaliativa, confundindo-se com a própria avaliação” (Pinto & Santos, 2006, p. 98).

4.3.4 Avaliação reguladora

No caso da avaliação reguladora, que é claramente direcionada para o aluno, procurando que o mesmo tome consciência sobre o seu processo de ensino-aprendizagem, respeita as diferenças pessoais e enfatiza todos os processos de resolução que os alunos utilizam. Assim, o erro torna-se uma forma de aprendizagem. Santos (2010_a, p. 12) vai mais longe ao declarar que a avaliação reguladora se torna, para o aluno, cada vez mais como um “agente autónomo da sua auto-regulação”. Podemos ver uma síntese desta avaliação na figura 16.

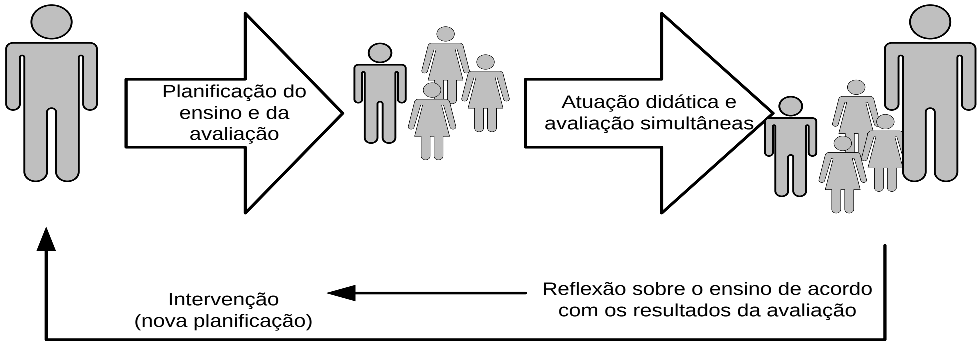


Figura 16 – Modelo de avaliação reguladora

Fonte: Adaptado de Pinto e Santos (2006) e Santos (2008).

Neste modelo, o professor deixa de ser aquele que apenas ensina e corrige, para passar a ser o que orienta. Neste tipo de avaliação o recurso a diversos instrumentos é uma constante, o que, uma vez mais, pode dar origem a situações de insegurança. No entanto, a NCTM (2008, p. 26) aconselha que

> “ deverá ser feito um esforço para identificar as noções mais valiosas dos alunos, a partir das quais poderão progredir, mais do que centrar-se somente nos erros e equívocos. Apesar de ser menos directa que a pontuação dos testes, a recolha de evidências de fontes diversas tende a fornecer informações mais precisas sobre aquilo que cada aluno sabe e é capaz de fazer.”

Nesta perspetiva, gostaríamos de salientar uma chamada de atenção de Santos (2010_a, p.13) quando afirma que

> “ as práticas avaliativas reguladoras são muito exigentes, nomeadamente para o professor. Há que ser capaz de estar atento à informação que os alunos vão dando de forma a recolhê-la. Esta é uma tarefa que se soma a todas as outras que o professor tem de desenvolver na sala de aula.”

Outros tipos de avaliação poderiam ser focados, como a contínua, a aferida ou ainda a normativa. No entanto, não as iremos explanar, já que demos preferências às que têm maior ênfase no âmbito do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007, p. 12):

> " a avaliação deve (…) fornecer informações relevantes e substantivas sobre o estado das aprendizagens dos alunos, no sentido de ajudar o professor a gerir o processo de ensino - aprendizagem. Neste contexto, é necessária uma avaliação continuada posta ao serviço da gestão curricular de carácter formativo e regulador. Com este entendimento, a avaliação é um instrumento que faz o balanço entre o estado real das aprendizagens do aluno e aquilo que era esperado, ajudando o professor a tomar decisões ao nível da gestão do programa, sempre na perspectiva de uma melhoria da aprendizagem."

Neste contexto, será sempre necessário criar instrumentos de avaliação eficazes, para que haja uma transparência do processo, dos critérios e parâmetros avaliativos. Conduzir a aprendizagem, permitir o conhecimento das estratégias utilizadas, proporcionar boas relações pessoais, promover o pensamento reflexivo são estratégias que potenciam a aprendizagem significativa, possibilitando ajustes e correções nos vários momentos de avaliação.

4.4 Instrumentos de avaliação

O leque de opções, no que diz respeito a instrumentos de avaliação, é vasto. Não existe **um** instrumento de avaliação, mas **vários** instrumentos de avaliação. Reforçamos a nossa afirmação, reportando-nos a Pinto e Santos (2006, p. 131) "nenhum instrumento é por si só capaz de responder a todas as exigências educacionais. Todos os instrumentos têm potencialidades e limitações". O professor deverá optar pelo que melhor se adequa ao momento em que se encontra no processo de ensino-aprendizagem, podendo recorrer a uma articulação entre eles. Terá de possuir um bom conhecimento, percebendo potencialidades e desvantagens de cada um, de forma a fazer a melhor opção. A avaliação é componente essencial das competências matemáticas a adquirir pelos alunos. A escolha dos instrumentos deve ter em conta os variados estilos de aprendizagem dos alunos, bem como avaliar diversificadas competências e originar novas situações de ensino e aprendizagem (Ferreira, 2007).

Neste contexto, poderíamos reportar-nos a variadíssimos instrumentos de avaliação como, por exemplo, apresentações orais, composições, testes em duas fases, e outros. No entanto, e tendo em conta o nosso estudo, faremos uma abordagem focalizada de alguns dos muitos instrumentos disponíveis, entre aqueles que mais facilmente se encaixam no entendimento do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), tendo em conta a realidade da sala de aula. Assim, iremos referir: testes em duas fases, relatório matemático e diário de bordo. Estes instrumentos salientam-se pelas caraterísticas que a seguir se apresentam.

4.4.1 Teste em duas fases

Nos anos oitenta, o Projeto Hewt (DeLange, 1987) criou, na Holanda, o teste em duas fases. Este era aplicado a alunos do Ensino Secundário e objetivado no campo do desenvolvimento curricular. Como o próprio nome indica, era realizado em duas etapas:

- Primeira etapa - os alunos realizavam o teste na sala de aula, sem qualquer indicação do professor;
- Segunda etapa - era realizada em casa, beneficiando dos comentários do professor.

O teste incluía dois tipos de perguntas: questões de complexidade reduzida, isto é, problemas ou exercícios de resolução relativamente rápida e questões abertas, as quais se caraterizavam por terem uma maior complexidade, já que levavam a investigações e explorações.

No primeiro momento de aplicação do teste, os alunos resolviam as questões de complexidade reduzida, tentando, também, responder às questões de resposta aberta. No segundo momento, os discentes corrigiam, desenvolviam ou melhoravam as respostas da primeira fase. O professor avaliava as progressões do aluno entre as duas etapas, classificando-as.

Em 1997, o projeto MAT_{789} (Abrantes, Leal, Teixeira & Veloso, 1997) colocou em prática, em Portugal, o teste em duas fases. Apesar de ter por base o projeto holandês, são de referir algumas diferenças: foram aplicados a alunos do 3º ciclo, estipulado um prazo de uma semana entre o primeiro e o segundo momento de aplicação e a classificação apenas era atribuída no final das duas fases. No entanto, os princípios eram os mesmos (Abrantes et al., 1997, p. 95):

> “ estes testes incluem perguntas de vários tipos, nomeadamente, perguntas de resposta curta ou fechada e perguntas de desenvolvimento ou abertas. Para além disso, e como o seu nome indica, são feitos em dois momentos distintos, sendo o primeiro em tempo limitado e o segundo durante um período alargado que pode ir de uma a duas semanas.”

Apesar de ser um instrumento de avaliação, a que alguns professores já recorrem desde então, ressurgiu com o Plano da Matemática (PAM) (ME, 2006) e, mais recentemente, com o PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007).

Neste tipo de teste e principalmente com a segunda fase, pretende-se que os alunos vão além da correção. O objetivo não é corrigir o erro, mas levar os alunos a procurar entender o que não sabiam, obrigando-os a estudar o conteúdo e não a pergunta em si. Um dos objetivos é que os alunos entendam que o erro não é «mau». O erro é um sintoma que não deve ser penalizado, mas deve sofrer uma intervenção pedagógica. Assim, leva a novas situações de aprendizagem e à tomada de consciência do desconhecimento da matéria. Como o teste se apoia em questões de resposta aberta, é apropriado para fomentar a comunicação, a interpretação e a reflexão. Com os comentários do professor, que muitas vezes são desbloqueadores, os alunos são, cada vez mais, levados a tentar responder, originando menos respostas em branco. Como o erro não é assinalado, mas comentado, os alunos concebem o processo avaliativo como algo natural e intrínseco à aprendizagem, estabelecendo uma maior aproximação com o professor. O docente recolhe informação sobre a evolução dos seus alunos, o que não é possível nos testes habituais (Santos, 2010_a).

A aplicação do teste em duas fases, bem como o seu êxito, depende:

- Da cuidadosa escolha das questões e seus objetivos;
- De uma prática letiva, na sala de aula, congruente;
- De mais tempo na criação dos testes, na explanação dos comentários e na sua correção;
- Da utilização de uma nova escala de classificação;
- Da capacidade de adaptação dos alunos a um novo instrumento de avaliação;
- Da compreensão dos alunos, da existência de duas fases e seus objetivos.

A segunda fase que, regra geral, já só incide sobre parte das perguntas, tem algumas variantes: é resolvida em casa, com a desvantagem de nem sempre serem os alunos a efetuar a aprendizagem pretendida, através da descoberta do erro (por exemplo), ou uma semana depois, no espaço da sala de aula. A sua aplicação é mais oportuna no momento em que os alunos já possuem alguns conhecimentos consolidados sobre a matéria lecionada. Assim, é vantajoso que o enunciado seja fornecido ao aluno, no final da primeira fase.

Este tipo de teste leva os discentes a refletirem sobre as suas respostas. O erro não é apontado, obrigando os alunos a desenvolver a resposta inicial, conduzindo-os a uma maior comunicação matemática e capacidade de escrita. É ainda de assinalar a vantagem de estabelecer relações de afetividade entre professor e alunos devido ao carácter positivo que este instrumento possui, tornando as críticas (habitualmente de cariz negativo) em algo natural (Abrantes et al., 1997; Pinto & Santos, 2006).

Não se tratando de um teste normal, que na maioria das vezes verifica respostas certas ou erradas, a escala de classificação terá de ser adaptada. Uma escala sugerida é a holística, tal como apresentada por Charles, Lester e O' Daffer (1987), que inclui vários itens para cada classificação.

Os alunos obtêm **0 pontos** quando:

- nada escrevem;
- reproduzem os dados fornecidos;
- dão apenas uma resposta errada.

A atribuição de **1 ponto** é feita quando:

- é iniciada uma estratégia que traduz algum conhecimento;
- há evidência de uma estratégia erradamente começada, mas não completada, nem ocorreu a tentativa de um outro caminho;
- há evidência de tentar concretizar parte da resposta.

São atribuídos **2 pontos** sempre que:

- esboçam uma estratégia e resposta incorreta, mas as mesmas demonstram alguma compreensão;
- respondem corretamente, sendo incompreensível a estratégia adotada;
- indiciam parte do objetivo a que a pergunta se propõe;
- iniciam uma estratégia apropriada, mas que não leva à resposta certa ou a mesma foi aplicada de forma errada.

A classificação de **3 pontos** utiliza-se quando:

- existe uma estratégia que carece de algumas explicações, mas levou à solução esperada;
- estabelece uma estratégia bem definida que levaria à solução correta, no entanto não considerou todos os dados essenciais;

- recorre a uma estratégia clara, mas a resposta é errada, não havendo explicação para tal, a resposta está incorretamente indicada ou é inexistente.

A atribuição de **4 pontos**, classificação máxima, é aplicada quando:

- estratégia e resposta são percetíveis e sem erro;
- o erro que comete (de cálculo ou passagem de dados) não interfere com o grau de dificuldade do objetivo, nem traduz desconhecimento.

De forma sucinta, temos uma escala distribuída da seguinte forma (Leal, 1992):

0 – Não respondeu;

1 – Tentou, mas recorreu a uma estratégia errada;

2 – Inicia uma estratégia, mas não a desenvolve corretamente ou desenvolve-a de forma errada;

3 – Responde corretamente com respostas de complexidade satisfatória;

4 - Responde corretamente com respostas de complexidade elevada.

Não sendo uma escala estanque, deve ser objeto de diálogo com os alunos, num clima de avaliação transparente. Apesar de ter uma expressão quantitativa, há uma forte componente qualitativa, já que depende da qualidade das respostas, da evolução entre as duas fases, nomeadamente das estratégias utilizadas e das explicações escritas. Este tipo de avaliação tem o seu enfoque nos procedimentos e não nos resultados obtidos, interessando muito mais o percurso percorrido pelos alunos do que os resultados finais obtidos (Abrantes et al., 1997; Pinto & Santos, 2006; Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997).

4.4.2 Relatório matemático

O relatório matemático escrito tem conhecido mais visibilidade, nos últimos anos. Carateriza-se por, principalmente, refletir uma investigação matemática. É a produção de um trabalho escrito, logo assume uma nova posição, enquanto instrumento de avaliação, já que a comunicação escrita é algo menos tido em conta em Matemática. O relatório traduz uma tarefa, que assenta numa situação ou atividade, levando os alunos à análise e respetiva crítica. Pode ser realizado em grupo ou individualmente, dentro ou fora da sala de aula. O relatório pode ter a seguinte estrutura: título, objetivo do relatório, materiais utilizados, explicação das etapas do processo, conclusões, observações e bibliografia se necessário (Pinto & Santos, 2006).

Quando efetuado no espaço da sala de aula, o professor consegue avaliar o empenho e interesse dos alunos ou servir como recurso, em caso de dificuldades. Fora da sala de aula, os alunos podem recorrer a manuais ou à internet. A existência de guião ou não depende da tarefa proposta. Pelas caraterísticas inerentes, o trabalho produzido deve ser capaz de ser lido por qualquer aluno ou professor, isto é, os alunos beneficiarão mais se, ao elaborarem o relatório, pensarem que o terão de apresentar, por exemplo, na disciplina de Português e não tanto que o estão a fazer para o docente de Matemática. Como tem uma vertente que se enquadra perfeitamente no espírito do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), permite que competências curriculares como autonomia ou reflexão sejam trabalhadas, bem como atitudes e valores, nomeadamente, o gosto pela disciplina e a responsabilidade, num ambiente de intercâmbio entre programas e objetivos (Leal, 1992; Menino, 2004; Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 1997).

4.4.3 Diário de bordo

O diário de bordo é um instrumento de registo de uma atividade ou de uma sessão de trabalho, do qual constam tarefas, reflexões, comentários sobre a forma como o trabalho vai sendo desenvolvido, quer seja individual ou em grupo. O registo escrito, para além de introduzir o hábito de refletir sobre as práticas, estimula o pensar sobre a própria aprendizagem. O apontamento mais eficaz é aquele que faz uma descrição exata, respeita os requisitos e centra-se nos aspetos essenciais, incluindo reflexões e comentários significativos (Monteiro, 2007).

De acordo com Marques e Paulus (2002, p. 2), "um diário possibilita a reflexão sobre o processo de auto-avaliação, nas práticas diárias, e no contexto escolar, permitindo aos professores e alunos uma supervisão direcionada".

Tratando-se de um relato, deve conter o local onde ocorreu a sessão de trabalho ou atividade, a data, a hora e a descrição do trabalho (individual e/ou coletivo), que foi desenvolvido. O registo é finalizado com uma avaliação desse mesmo trabalho e uma reflexão sobre a forma como decorreu todo o processo. De salientar que, para o registo, não é necessário que o trabalho ou a atividade tenha sido um sucesso.

A utilização de um diário de bordo é cada vez maior, já que é um documento dinâmico que testemunha o trabalho efetuado. Permite uma promoção e organização das reflexões críticas e escritas, incentiva a autoavaliação ao longo da consecução do trabalho e fornece uma perspetiva sobre a aprendizagem e o trabalho desenvolvido (Monteiro, 2007).

5. Conclusão

Em síntese, apesar de o currículo ser muitas vezes identificado com o programa da disciplina ou um plano de estudos, devidamente estruturado e organizado, vai para além disso. O currículo é um projeto, cuja gestão depende da ação coletiva dos professores, que devem ser reflexivos nas suas decisões partilhadas, tendo em conta os diferentes contextos de sala de aula. No enquadramento curricular é essencial repensar uma nova avaliação, como elemento constituinte do processo de ensino-aprendizagem. Por isso, no que concerne à avaliação, foi feita uma análise de princípios, tipos e instrumentos. Analisamos alguns tipos de avaliação, com mais expressão no PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), bem como os respetivos instrumentos de avaliação. Neste contexto, consideramos que, pelo peso atribuído à avaliação no processo de ensino-aprendizagem, a mesma deve ser ponderada, diversificada e transparente. Para tal, pode e deve recorrer a um variado leque de instrumentos, para que a subjetividade seja a menor possível. Principalmente, deve ser objeto de trabalho colaborativo entre professores, de forma a que o aluno seja capaz de, progressivamente, autorregular o seu processo de ensino-aprendizagem.

Capítulo III – Programas de Matemática: 1991 e 2007. Análise comparativa.

1. Introdução

Explorar, descobrir ou pôr em questão (…) o propósito não é apenas o conteúdo matemático, mas também aprender a investigar.

Goldenberg (1999, p.15)

Neste capítulo, fazemos um estudo comparativo entre o Programa de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991) e de 2007 (Ponte et al., 2007). Procuraremos apontar aspetos comuns, discrepâncias existentes e transformações ocorridas, relativas aos temas ou às capacidades transversais. Para um entendimento mais eficaz fundamentado, das semelhanças e diferenças, entre os dois programas, é feita uma análise sobre o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001). Finalmente são referenciadas as Metas Curriculares (DGE, 2013), como último documento curricular, relativo à aprendizagem pretendida dos alunos.

2. Programas de Matemática de 1991 e 2007

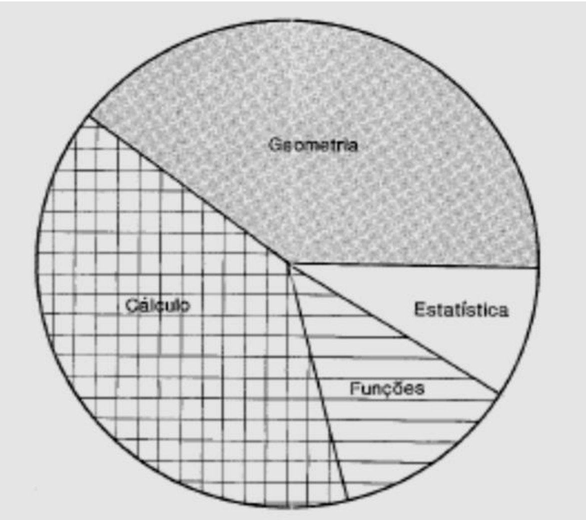
O Programa de Matemática, datado de 1991 (DGEBS, 1991), divide-se em dois volumes: o primeiro, de carácter geral, designado *Organização Curricular e Programa* e o segundo volume, já de carácter específico, intitulado *Programa de Matemática*: *Plano de Organização do Ensino Aprendizagem*.

O primeiro volume divide-se da seguinte forma:

- Introdução;
- Organização curricular do Ensino Básico;
- Objetivos;
- Estrutura curricular;
- Princípios orientadores da ação pedagógica;
- Programas de cada disciplina.

Relativamente ao Programa de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991), constante deste primeiro volume, observa-se uma estruturação em introdução, finalidades, objetivos gerais, conteúdos, orientações metodológicas gerais e avaliação. Os temas – Geometria, Números e Cálculo, Estatística e Funções - a tratar, ao longo dos três ciclos, estão definidos na introdução. Em relação aos objetivos gerais, é feita a divisão entre valores e atitudes, capacidades e aptidões e, por último, conhecimentos. Os conteúdos encontram-se discriminados por tema. A resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação, o conhecimento, a história da Matemática, o papel do professor e os recursos constam das diversas orientações metodológicas gerais. Por fim, e no que concerne à avaliação, são apresentadas sugestões de instrumentos de avaliação, com especial incidência na avaliação formativa. De salientar que, neste volume, existe uma preocupação relativa à promoção das atitudes e dos valores, bem como um cuidado visível na coerência, numa perspetiva de pedagogia englobadora. No gráfico 1 encontra-se a distribuição do peso relativo dos conteúdos, no Programa de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991), no qual podemos verificar como o Cálculo e a Geometria são, claramente, os temas com maior peso.

Gráfico 1 - Peso relativo dos conteúdos do programa de 1991



Fonte: Programa de Matemática (DGEBS, 1991, p. 191).

Por sua vez, o segundo volume está distribuído da seguinte forma:

- Objetivos gerais;
- Indicações gerais para gestão do programa;
- Conteúdos agrupados em unidades e distribuídos por anos de escolaridade;

- Objetivos específicos;
- Sugestões metodológicas;
- Peso e número de horas por unidade.

O quadro que se segue sintetiza o Programa de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991).

Quadro 9 - Estrutura do Programa de Matemática de 1991

	Volume I	Volume II
Programa de 1991	- Introdução; - Organização curricular do Ensino Básico; - Objetivos; - Estrutura curricular; -Princípios orientadores da acção pedagógica; - Programa de Matemática • Introdução; • Finalidades; • Objetivos gerais; • Conteúdos; • Orientações metodológicas gerais; • Avaliação.	- Objetivos gerais; - Indicações gerais para a gestão do programa; - Conteúdos por unidade e divididos por anos de escolaridade; - Objetivos específicos; - Sugestões metodológicas; - Unidades por peso e horas.

Fonte: Programa de Matemática (DGEBS, 1991).

Entre os dois Programas de Matemática de 1991 e 2007 (DGEBS, 1991; Ponte et al., 2007), surge o Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (DEB, 2001), o qual se divide em introdução e competências gerais (operacionalização transversal, operacionalização específica e ações a desenvolver por cada docente), tendo uma seção própria, destinada a Matemática. A estruturação relativa a Matemática engloba competências essenciais, finalidades e competências específicas, as quais se dividem em áreas temáticas, por ciclo, e experiências de aprendizagem. Podemos verificar que, no que respeita a Matemática, o documento define dois objetivos: facultar aos alunos um maior contacto com métodos e ideias matemáticas, bom como desenvolver o raciocínio e a comunicação matemática. Estes objetivos, de acordo com este documento, só serão atingidos pelos alunos, quando os mesmos concretizem experiências de aprendizagem adequadas e significativas. A finalidade primordial é "promover o desenvolvimento integrado de capacidades e atitudes que viabilizam a utilização dos conhecimentos em situações diversas, mais ou menos familiares aos alunos" (DEB, 2001, p.9). As principais componentes, do Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001), estão condensadas no quadro 10:

Quadro 10 - Currículo Nacional do Ensino Básico (Matemática)

<table>
<tr><td rowspan="2">CNEB de 2001</td><td>Matemática</td></tr>
<tr><td>- Competências essenciais;
- Finalidades;
- Competências específicas:
• Áreas temáticas (por e para cada ciclo);
• Experiências de aprendizagem.</td></tr>
</table>

Fonte: Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001).

O Programa de Matemática de 2007 (PMEB) (Ponte et al., 2007), o qual foi homologado após um período de dezoito meses de reajustamento, está disposto, em termos de organização, no sentido de valorizar a aprendizagem matemática e a articulação entre ciclos. Contrariamente ao anterior programa (DGEBS, 1991), que se estruturava por anos de escolaridade, o Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007) assenta a sua estrutura em partes comuns aos três ciclos, com orientações específicas.

Com efeito, o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) efetua uma distribuição por quatro temas – Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados - e por Capacidades Transversais – resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática - ao longo dos três ciclos de escolaridade, como podemos constatar através do quadro 5, no qual observamos uma valorização da Estatística e da Álgebra, face ao anterior programa (DGEBS, 1991).

Assim, passamos a ter nove objetivos gerais interligados, relativos ao desenvolvimento do conhecimento, das capacidades e das atitudes. No Programa de 1991 (DGEBS, 1991), existia uma categorização separada para os conhecimentos, as capacidades e as atitudes (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Ponte et al., 2007). No entendimento do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (Ponte et al., 2007, pp.4-6), os alunos devem atingir os objetivos gerais seguintes, que apresentamos sem ordem específica:

- Conhecer os factos e procedimentos básicos da Matemática;
- Desenvolver uma compreensão da Matemática;

- Adquirir a capacidade de lidar com ideias matemáticas em diversas representações;
- Comunicar as suas ideias e interpretar as dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático;
- Raciocinar matematicamente usando os conceitos, as representações e os procedimentos matemáticos;
- Resolver problemas;
- Estabelecer conexões, entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas;
- Fazer Matemática de modo autónomo;
- Apreciar a Matemática.

Neste contexto, é percetível a importância que assume o «saber porquê», a capacidade de selecionar e usar a forma mais ajustada a cada contexto e a valorização da comunicação, do raciocínio e da autonomia. Também é de realçar a criação de ligações entre, por exemplo, conceitos matemáticos, bem como o gosto pela disciplina e a sua aplicação nos mais variados âmbitos (Bandarra & Alves, 2010).

Desta forma, procuraremos as principais distinções entre os programas para cada tema, bom como para cada capacidade transversal.

2.1 Tema: Números e Operações

No Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007), este tema destaca-se nos três ciclos de escolaridade por apresentar "três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido do número e desenvolver a fluência no cálculo" (Ponte et al., 2007, p.7).

Nesta perspetiva, pretende-se que o sentido do número crie uma conexão entre os números, as suas representações e respetiva aplicação contextualizada. Na opinião de Mcintosh, Reys e Reys (1992, p. 3) "o sentido do número refere-se à sua compreensão geral e respetivas operações, juntamente com a capacidade e inclinação do sujeito para usar essa compreensão de maneira flexível, de forma a fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias para os números e operações". Ainda segundo os mesmos autores, o sentido do número é adquirido gradualmente.

Neste entendimento, apontamos as principais mudanças, face ao anterior Programa (DGEBS,1991), neste tema:

- A representação dos números sob a forma de fração e com aspeto decimal ocorre em simultâneo, esperando-se que os alunos sejam capazes de utilizar a forma mais conveniente, de acordo com o contexto, fazendo facilmente a transição entre as duas representações;
- A promoção da importância da reta numérica, bem como a representação dos números na mesma;
- O incentivo ao desenvolvimento do cálculo mental, através da realização de estimações e do uso de valores aproximados;
- O entendimento da aprendizagem e o conhecimento dos algoritmos das operações.

É de salientar que, neste tema, surgem, pela primeira vez e no 2º ciclo, dois tópicos separados: Números Naturais e Números Racionais Não Negativos.

2.2 Tema: Álgebra

Apesar de ser feita uma primeira abordagem através, por exemplo, do estudo dos padrões geométricos, no 1º ciclo do Ensino Básico, a valorização deste tema ocorre nos dois ciclos seguintes. O PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007, p.39) aponta, como promoção do pensamento algébrico

- "A compreensão de padrões, relações e funções.
- A representação e análise de situações e estruturas matemáticas, usando símbolos algébricos.
- A utilização de modelos matemáticos, para representar e compreender relações quantitativas.
- A análise da variação em diversos contextos".

Tal como Vale e Pimentel (2011, p. 5), também entendemos a "forte ligação dos padrões com a resolução de problemas e, ainda, com a generalização e o pensamento algébrico, ideais fundamentais dos temas Números e Operações e Álgebra". Nesta perspetiva, também defendemos que a Álgebra deverá ir para além da utilização de um conjunto de regras e técnicas. Trabalhar algebricamente implica relacionar variáveis, estabelecer ligações, ou ainda, construir caminhos de resolução de problemas (Abrantes et al., 1999; Neves, 1999; Souza & Diniz, 1994).

Por isso, entendemos por que motivo a principal distinção deste programa (Ponte et al., 2007), relativamente ao anterior (DGEBS, 1991), assenta na criação de um pensamento algébrico desde o início da escolaridade e que se mantém ao longo dos três ciclos.

2.3 Tema: Geometria

O tema da Geometria permanece, no Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), ao longo dos ciclos. Assim, a Geometria tem como "ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos " (Ponte et al., 2007, p. 7). O investigador Van de Walle (2007, p. 408) defende que

> "O sentido espacial pode ser definido como uma intuição sobre as formas e as relações entre formas. Indivíduos com senso espacial têm uma sensação para os aspetos e formas geométricas formados pelos objetos, no seu meio ambiente. O sentido espacial inclui a capacidade de visualizar mentalmente objetos e relações espaciais – que mudam a perceção das coisas (…). Pessoas com senso espacial apreciam formas geométricas na arte, natureza e arquitetura. Elas são capazes de usar ideias geométricas para descrever e analisar o seu mundo."

Neste tema, e em consonância com o contexto acima descrito, salientamos que a principal diferença no PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) reside no aumento do grau de formalização das transformações geométricas e na diminuição do conceito de medida, durante os três ciclos. No entanto, é de ressalvar que, apesar da noção de «medida» passar a ter menor expressão ao longo dos ciclos, não deixa de existir; pelo contrário, deverá ser contextualizada dentro e entre diferentes temas.

2.4 Tema: Organização e Tratamento de Dados

O tema atualmente denominado Organização e Tratamento de Dados, que era designado por Estatística no Programa de 1991 (DGEBS, 1991), prevalece nos três ciclos de escolaridade, reforçando o entendimento da informação, de caráter estatístico.

Assim, a ênfase deste tema prende-se, essencialmente, com questões de cidadania, nomeadamente, com a necessidade de ajudar os alunos a tornarem-se adultos críticos e conscientes, em relação às questões que os rodeiam no quotidiano, decidindo e argumentando, de forma eficaz.

Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2006, p. 91), este tema

> "constitui uma importante ferramenta para a realização de projectos e investigações em numerosos domínios, sendo usada no planeamento, na recolha e análise de dados e na realização de inferências para tomar decisões. A sua linguagem e conceitos são utilizados em cada passo do dia-a-dia para apoiar afirmações em domínios como a saúde, o desporto, a educação, a ciência, a economia e a política."

Portanto, constatamos que as principais modificações, para além do aprofundamento do tema em si, residem na forma de representação do conjunto de dados, na complexidade dos dados a analisar, no maior conhecimento das medidas de tendência central e de dispersão e na realização de projetos, com consequente argumentação dos resultados obtidos. Através do quadro 11, procuramos sintetizar o que acabamos de explanar:

Quadro 11 - Principais diferenças temáticas entre o programa de 1991 e o programa de 2007

Números e operações - representação, utilização e transformação entre números escritos sob a forma de fração e decimal; - representação de números na reta numérica; - estimação e utilização de valores aproximados e desenvolvimento do cálculo mental; - compreensão dos algoritmos das operações.	**Álgebra** - criação de um pensamento algébrico desde o 1º ciclo de escolaridade.
Geometria - formalização das transformações geométricas, desde o 1º ciclo, com respetivo aumento ao longo dos ciclos seguintes; - utilização de «medida» com início no 1º ciclo e diminuição do seu peso ao longo dos anos seguintes.	**Organização e tratamento de dados** - complexidão dos dados a trabalhar; - aprofundação das medidas de tendência central; - noção das medidas de dispersão; - representação dos dados em diversos aspetos; - elaboração, concretização e discussão dos trabalhos estatísticos.

Fonte: Programas de Matemática (DGEBS, 1991; Ponte et al., 2007).

2.5 Capacidades Transversais

Tal como já referido anteriormente, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, isto é, as capacidades transversais, aparecem no PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) em pé de igualdade com os temas, no que diz respeito à aprendizagem.

As Capacidades Transversais sempre foram tidas em conta nos programas de Matemática (DGEBS, 1991; Ponte et al., 2007). No entanto e de acordo com o espírito do Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007), espera-se que os alunos desenvolvam a capacidade de demonstração, justificação e crítica de argumentos, pensamentos e resultados matemáticos. Neste contexto, elaboramos o quadro 12, que sintetiza os objetivos das capacidades transversais no programa de 2007 (Ponte et al., 2007).

Quadro 12 - Objetivos das Capacidades Transversais do PMEB de 2007

Resolução de problemas	Raciocínio matemático	Comunicação matemática
- Resolver e formular problemas; - Elaborar, aplicar, analisar e justificar diversificadas estratégias aplicadas para resolver um problema; - Identificar mudanças nos enunciados.	- Entender o que é uma generalização, um caso particular e um contraexemplo; - Enunciar, testar e mostrar conjeturas; - Diferenciar raciocínio intuitivo e dedutivo; - Perceber diferentes metodologias de demonstração.	- Comunicar as suas ideias desenvolvendo, cada vez mais a linguagem matemática, de forma escrita ou falada; - Interpretar e compreender os argumentos fornecidos por outros; - Participar ativa e eficazmente no debate matemático.

Fonte: Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007).

Deste modo, no que concerne ao reajustamento que o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) oferece, entendemos que ocorrem mudanças significativas. Não podemos esquecer que cada tema se organiza tendo em conta:

- A articulação com o ciclo anterior;
- Os objetivos gerais de aprendizagem;
- As indicações metodológicas;
- Os tópicos;
- Os objetivos específicos.

Apesar de não ser o nosso objeto de estudo, parece-nos importante fazermos uma breve referência sobre as alterações sofridas no 2º ciclo. Sem dúvida, terão influência no percurso relativo ao 3º ciclo do Ensino Básico, uma vez que o PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) está projetado para os três ciclos. Assim, podemos constatar, na figura 17, os conteúdos que saem e os que passam a fazer parte do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007):

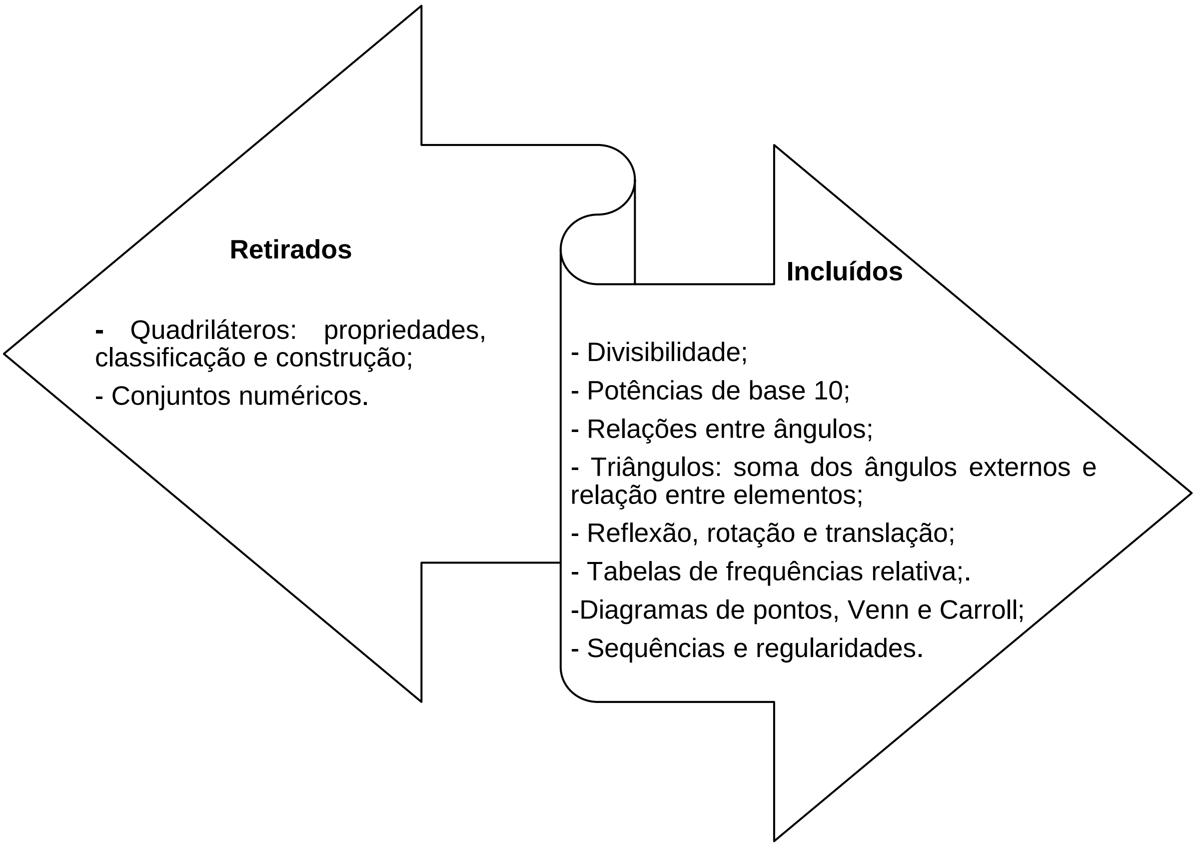


Figura 17 – Alteração de conteúdos programáticos no 2º ciclo do Ensino Básico

Fonte: Programas de Matemática (DGEBS, 1991; Ponte et al., 2007).

Assim, faremos um paralelo entre os dois programas (DGEBS, 1991; Ponte et al., 2007), por ano de escolaridade: o primeiro, porque se dividia dessa forma e o segundo, apesar de não apresentar a sua organização por ciclos, porque, na sua implementação, terá de ser assim aplicado. Neste contexto, nos quadros 13, 14 e 15, podemos ver a distribuição entre os tópicos e subtópicos previstos para o 7º, 8º e 9º ano de escolaridade, no programa de 2007 (Ponte et al., 2007), bem como a organização que ocorria no Programa de 1991 (DGEBS,1991), para os mesmos anos letivos.

Quadro 13 - Comparação entre os conteúdos programáticos no 7º ano

<table>
<tr><td rowspan="4">Programa de 1991</td><td>Conhecer melhor os números
• Número primo
• Potências de expoente natural
• Raiz quadrada e raiz cúbica: valores aproximados
• Expressões com variáveis</td><td>Estatística
• Recolha e organização de dados
- Tabelas
- Frequência absoluta e relativa
- Gráficos
• Medidas de tendência central</td></tr>
<tr><td>Proporcionalidade direta
• Constante de proporcionalidade
• Tabelas
• Gráficos cartesianos</td><td>Equações
• Noção de equação
• Equações equivalentes
• Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita</td></tr>
<tr><td>Semelhança de figuras
• Ampliação e redução de figuras
- Construção à escala
- Noção de forma
• Polígonos semelhantes e razão de semelhança</td><td rowspan="2">Do espaço ao plano
• Sólidos com faces triangulares e quadrangulares
- Posições relativas de retas e planos
• Construção de triângulos
- Desigualdade triangular
- Critérios de igualdade de triângulos
• Ângulos verticalmente opostos
• Ângulos de lados paralelos
- Soma dos ângulos internos de um triângulo
- Ângulo externo de um triângulo
• Propriedades dos paralelogramos
• Eixos de simetria em triângulos e quadriláteros
• Áreas e volumes de sólidos
- Volume da pirâmide e do cone</td></tr>
<tr><td>Os números racionais
• Números racionais relativos
- Representação na reta
- Ordenação
- Valores aproximados
- $\mathbb{Q}$ e subconjuntos de $\mathbb{Q}$
• Operações em $\mathbb{Q}$
- Adição algébrica, multiplicação, divisão, propriedades
- Potenciação
- Regras operatórias</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Programa de 2007</td><td>Números inteiros
• Propriedades da multiplicação e da divisão
• Raiz quadrada e raiz cúbica
• Potências de base inteira e expoente natural</td><td>Tratamento de dados
•Organização, análise e interpretação de dados
• Medidas de localização e de dispersão
• Discussão dos resultados</td></tr>
<tr><td>Sequências e regularidades
• Termo geral de uma sequência numérica
• Representação

Funções
• Conceito de função e de gráfico de uma função
• Proporcionalidade direta como função</td><td>Equações
• Equações do 1º grau com uma incógnita (com parênteses, mas sem denominadores)</td></tr>
<tr><td>Triângulos e quadriláteros
• Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo
• Congruência de triângulos
Propriedades, classificação e construção de quadriláteros</td><td>Semelhança
• Noção de semelhança
• Ampliação e redução de um polígono
• Polígonos semelhantes
• Semelhança de triângulos</td></tr>
</table>

Fonte: Programas de Matemática (DGEBS, 1991; Ponte et al., 2007).

Quadro 14 - Comparação entre os conteúdos programáticos no 8º ano

Programa de 1991	**Decomposição de figuras. Teorema de Pitágoras** • Decomposição de polígonos em triângulos e quadriláteros -Decomposição de um triângulo por uma mediana - Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa - Equivalência de polígonos; área do trapézio • Teorema de Pitágoras - Demonstração por decomposição de um quadrado • Teorema de Pitágoras no espaço - Perpendicularidade entre reta e plano - Perpendicularidade de planos - Diagonal do paralelepípedo retângulo	**Equações** •Equações do 1° grau - Equações com denominadores - Equações literais • Equações de grau superior ao 1° - Operações com polinómios (adição algébrica, multiplicação) - Lei do anulamento do produto, disjunção de condições e reunião de conjuntos - Casos notáveis da multiplicação de binómios
	Funções • Conceito de função - Tabelas - Gráficos - Funções definidas por uma expressão analítica • A proporcionalidade direta como função $x \rightarrow kx$ - Gráfico da função $x \rightarrow kx$ - Gráfico da função $x \rightarrow kx + b$	**Translações** • Translações - Imagem de uma figura numa translação dada - Propriedades das translações - Vetor • Composição de translações: adição de vetores
	Ainda os números • Sequências de números • M.m.c. e M.d.c. de dois números • Potências de expoente inteiro • Escrita de números utilizando potências de 10	**Lugares geométricos** • Circunferência, círculo • Superfície esférica, esfera • Mediatriz de um segmento de reta • Circunferência circunscrita • Conjunção de condições e interseção de conjuntos
	Semelhança de triângulos • Critérios de semelhança de triângulos	**Estatística** • Organização e representação de dados - Polígonos de frequência - Pictogramas • Interpretação da informação
Programa de 2007	**Números racionais** • Representação, comparação e ordenação • Operações, propriedades e regras operatórias • Potências de base racional e expoente inteiro	**Planeamento estatístico** • Especificação do problema • Recolha de dados • População e amostra
	Funções • Função linear e afim **Equações** • Equações do 1º grau (com denominadores) com uma incógnita • Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas	**Sequências e regularidades** • Expressões algébricas **Equações** • Equações literais • Operações com polinómios • Equações do 2º grau (incompletas) com uma incógnita
	Sólidos geométricos • Área da superfície e volume • Critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos e entre retas e planos	**Isometrias** • Translação associada a um vetor • Propriedades das isometrias
	Teorema de Pitágoras • Demonstração e aplicação	

Fonte: Programas de Matemática (DGEBS,1991; Ponte et al., 2007).

Quadro 15 - Comparação entre os conteúdos programáticos no 9º ano

Programa de 1991	**Estatística e probabilidades** • Alguns aspetos de linguagem • Noção de probabilidade de um acontecimento	**Equações** • Resolução de equações do 2° grau - Incompletas; Completas - Fórmula resolvente
	Sistema de equações • Equações do 1° grau com duas incógnitas • Sistemas de duas equações do 1° grau a duas incógnitas - Método de substituição para a resolução de sistemas **Proporcionalidade inversa** **Representações gráficas** • Proporcionalidade inversa - Constante de proporcionalidade inversa - Tabelas - Gráficos • A proporcionalidade inversa com função $x \rightarrow k/x$ • Análise de gráficos que traduzem situações da vida real	**Trigonometria do triângulo retângulo** • Razões trigonométricas de ângulos agudos: seno, cosseno e tangente • Relações entre as razões trigonométricas • $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ e $\text{tg } a = (\sin a)/(\cos a)$ •Tabelas de valores naturais e calculadoras **Espaço – Outra visão** • Sólidos geométricos - Áreas e volumes • Representação no plano de retas e planos do espaço • Critérios de - Paralelismo de reta e plano - Paralelismo de planos - Perpendicularidade de reta e plano - Perpendicularidade de planos • Referência à Geometria como construção hipotético-dedutiva - Axioma, teorema, demonstração
	Os números reais. Inequações • Dízimas • Números irracionais • Números reais - A recta real • Relações «<» e «>» em *IR* - Transitividade - Equivalência entre $a < b$ e $b > a$ • Intervalos • Inequações - Regras para revolver inequações do 1° grau a uma incógnita • Conjuntos definidos por condições	**Circunferência e polígonos: rotações** • Ângulos ao centro e arcos correspondentes • Ângulo inscrito num arco de circunferência • Simetrias numa circunferência • Polígonos inscritos; polígonos regulares • Áreas de polígonos • Áreas e volumes de sólidos • Rotações • Isometrias
Programa de 2007	**Probabilidades** • Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória • Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento	**Inequações** • Noção de número real e reta real • Relações < e > em *IR* • Intervalos
	Funções • Proporcionalidade inversa como função • Funções do tipo $y = ax^2$ **Equações** • Equações do 2° grau (completas) a uma incógnita	**Circunferência** • Ângulo ao centro, ângulo inscrito e ângulo excêntrico • Lugares geométricos • Circunferência inscrita e circunferência circunscrita a um triângulo • Polígono regular inscrito numa circunferência
	Inequações • Inequações do 1° grau a uma incógnita	**Trigonometria no triângulo retângulo** • Razões trigonométricas de ângulos agudos • Relações entre razões trigonométricas

Fonte: Programas de Matemática (DGEBS, 1991; Ponte et al., 2007).

Desta forma, é percetível como os conteúdos disciplinares estão em constante mudança, tornando-se necessário que haja discussão sobre essas mudanças antes e durante a respetiva aplicação, com o objetivo de que todos os alunos aprendam, com compreensão, conceitos e procedimentos matemáticos relevantes, que compreendam a Matemática de que necessitam, e que se envolvam no seu próprio processo de ensino-aprendizagem (NCTM, 2008).

Na opinião de Pacheco (1996, p.16)

> "o conjunto de conteúdos a ensinar (organizados por disciplinas, temas, áreas de estudo) e como o plano de acção pedagógica, fundamentado e implementado num sistema tecnológico (…) correspondem a um plano de estudos, ou a um programa, muito estruturado e organizado na base de objectivos, conteúdos e actividades e de acordo com a natureza das disciplinas".

Quando se fala em programa, de uma forma geral, identifica-se a um conjunto de conteúdos a lecionar no ciclo em questão, acompanhados dos respetivos objetivos, finalidades e orientações metodológicas. O Programa apresentado pode, assim, considerar-se mais exigente, abrangendo uma grande variedade de conteúdos dentro de quatro áreas importantes: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados (Vale, 2010).

Assim, a necessidade de uma intervenção urgente, que corrigisse os principais problemas existentes ao nível dos conteúdos, determinou que em vez de um programa radicalmente novo se procedesse a um reajustamento, tomando como ponto de partida o anterior. Destaca-se então a importância dos conhecimentos, da comunicação, dos recursos, do papel do professor, da história da Matemática, de aptidões como o raciocínio e de metodologias e conteúdos que apelam à resolução, criativa e investigativa, de problemas (Pintassilgo, Teixeira & Dias, 2008).

Nos anexos I, II e III, é feita uma apresentação dos tópicos e dos objetivos específicos para o 3º ciclo, do Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007), nomeadamente, para o 7º, 8º e 9º ano de escolaridade.

Quanto à ordem pela qual os tópicos devem ser lecionados, as escolas podem optar por vários percursos temáticos de aprendizagem: A, B ou outro elaborado pelos docentes da área disciplinar de Matemática. Num documento de 2008, onde são atualizados os percursos temáticos de aprendizagem relativo ao PMEB (Ponte et al., 2008, p.1) é referenciado que

> " os percursos temáticos de aprendizagem que se apresentam constituem possíveis sequências para o desenvolvimento do trabalho lectivo com o novo

de Matemática. Cada um dos percursos é apresentado esquematicamente sob a forma de uma sequência de tópicos e subtópicos matemáticos, distribuídos por anos de escolaridade em cada ciclo, indicando as balizas temáticas do trabalho a realizar. Caberá às escolas introduzir alterações nestes percursos ou conceber percursos alternativos, que melhor se adaptem às características dos alunos, aos recursos existentes, às suas condições e ao contexto social e escolar, de acordo com as metas estabelecidas no programa para cada ciclo.”

Neste contexto, apresentamos o quadro 16, com os percursos A e B propostos pela DGIDC, para os três anos do 3º ciclo do Ensino Básico.

Quadro 16 - Percursos temáticos de aprendizagem para o 3º ciclo

	Percurso			**Percurso**			**Percurso**	
	A	**B**		**A**	**B**		**A**	**B**
7º ano	Tratamento de dados Números inteiros Triângulos e quadriláteros Sequências e regularidades Funções Equações Semelhança	Números inteiros Sequências e regularidades Funções Triângulos e quadriláteros Tratamento de dados Equações Semelhança	**8º ano**	Números racionais Isometrias Funções Equações Planeamento estatístico Sequências e regularidades Equações Teorema de Pitágoras Sólidos geométricos	Isometrias Números racionais Planeamento estatístico Funções Equações Sólidos geométricos Sequências e regularidades Equações Teorema de Pitágoras	**9º ano**	Funções Equações Circunferência Probabilidade Números reais Inequações Trigonometria no triângulo retângulo	Probabilidade Funções Equações Circunferência Números reais Inequações Trigonometria no triângulo retângulo

Fonte: Percursos temáticos de aprendizagem (Ponte et al., 2008).

Sintetizando, o Programa de Matemática, homologado em 2007 (Ponte et al., 2007), é um reajustamento do Programa de 1991 (DGEBS, 1991). No entanto, são visíveis as mudanças em vários aspetos: estrutura, conteúdo e linguagem. O Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) não pretende acabar com o anterior, mas antes “procura dar continuidade, embora introduzindo elementos de inovação importantes (…) as inovações introduzidas são as mais necessárias e exequíveis” (Ponte & Sousa, 2010, p. 38). Quanto às alterações, relativas às finalidades e objetivos, constatamos que existem novas formulações, que permitem uma melhor perceção das metas propostas, para o processo de ensino-aprendizagem, sendo que as mesmas estabelecem uma maior ligação com o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001). No que concerne às Capacidades Transversais, salienta-se o facto das mesmas terem um tratamento idêntico aos temas: são estabelecidos objetivos gerais e específicos de aprendizagem em relação a cada capacidade (resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática), pelos vários ciclos do Ensino Básico. Ainda no referente aos quatro temas – os "quatro eixos fundamentais: o trabalho com os Números e Operações, o pensamento algébrico, o pensamento geométrico e o trabalho com dados" (Ponte et al., 2007, p.1), é notória a importância atribuída à Estatística, agora denominada de Organização e Tratamento de Dados, através de um estudo mais aprofundado. A valorização da Álgebra advém da sua introdução como tema, já no 2º ciclo do Ensino Básico. Em relação a Números e Operações, entende-se uma outra forma de abordar os números racionais e os algoritmos das operações. Finalmente, salientamos a enfatização no estudo geométrico, nomeadamente, nas suas transformações (Vale & Pimentel, 2011).

Nesta perspetiva, também somos da opinião de Ponte e Sousa (2010), quando afirmam que o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), comparativamente com o anterior (DGEBS, 1991), valoriza aspetos matemáticos que nem sempre tinham expressão no ensino da Matemática. Entre eles, destacam-se o cálculo mental ou as demonstrações, a ênfase para processos matemáticos relacionados com as capacidades transversais ou ainda o reforço de questões relacionadas com investigações ou explorações matemáticas, na sala de aula. Assim, é de realçar, como aspetos positivos do PMEB (Ponte et al., 2007), a sua organização num só documento, permitindo uma articulação curricular mais eficaz, para os três ciclos. Além disso, as finalidades e os objetivos são equiparados aos indicados no Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001), sendo as indicações metodológicas completas e de fácil entendimento. Ainda é de mencionar que o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) faz uma clara referência ao uso das novas tecnologias, como forma de adquirir, consolidar e aprofundar conhecimentos, em todos os ciclos de escolaridade. Apesar de o Programa de 1991 (DGEBS, 1991) já apresentar uma linha orientadora, para o processo de ensino-aprendizagem, valorizando uma atitude dinâmica, construtora e ativa, quer para alunos, quer para professores, tal nem sempre acontece. Muitas aulas continuam a ter o professor como centro pedagógico e os alunos como elementos passivos (Marques, 2011).

3. Metas Curriculares de Matemática

A constante evolução da sociedade originou um conjunto de novos objetivos educacionais, entre os quais, o de proporcionar uma aprendizagem alargada da Matemática. Nesta perspetiva, foram demarcados os seus objetivos gerais e específicos, através de capacidades matemáticas, fortemente destacadas no PMEB (Ponte et al., 2007), bem como de Metas Curriculares de aprendizagem, definidas em cada ano e em cada ciclo de escolaridade, pelo documento homologado a 3 de Agosto de 2012 (DGE, 2013).

As Metas Curriculares emergem, não só no final de ciclo, mas também nos anos intermédios, caracterizando um conjunto de conhecimentos, que os alunos têm de dominar. Numa coerência de articulação programativa, determinam-se no currículo áreas do saber específicas e integradoras, que servem de referência a todo o processo de ensino-aprendizagem. Assim, verifica-se uma gradual perceção da particularidade dos conhecimentos, acentuando a sua incorporação, em unidades curriculares, que tornem eficaz a construção complementar do saber. Deste modo, as metas constituem uma referência fundamental e obrigatória ao longo de todo o processo de ensino-aprendizagem (Leite & Lopes, 2008).

Neste contexto, as Metas Curriculares estabelecem aquilo que pode ser considerado como a aprendizagem essencial, a realizar pelos alunos, em cada um dos anos de escolaridade ou ciclos do Ensino Básico. Por tal, é um documento de referência, não só para professores, mas também para encarregados de educação, podendo motivar e impulsionar a procura dos meios e estratégias necessários, para que os discentes desenvolvam as suas capacidades e adquiram os conhecimentos indispensáveis, ao prosseguimento dos seus estudos e às necessidades da sociedade atual (Pacheco & Leite, 2010).

Sendo uma iniciativa do Ministério da Educação e Ciência (MEC), as Metas Curriculares surgem na sequência da revogação do Currículo Nacional do Ensino Básico (Despacho n.º 17169/2011, de 23 de dezembro). Juntamente com o Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007), as metas são entendidas como referências basilares, para o desenvolvimento do ensino, tendo em conta que nelas se clarifica o que no Programa de Matemática se deve eleger como prioritário, explanando os conhecimentos a adquirir e as capacidades a desenvolver pelos alunos, nos diferentes anos de escolaridade (Despacho n.º 5306/2012, de 18 de abril).

Relativamente à elaboração das Metas Curriculares, a sua base de fundamentação assenta em estudos científicos e que se basearam nas já existentes em outros países, com bons níveis de desempenho (DGE, 2013). Desta forma, as metas enunciam o que pode ser considerado como a aprendizagem essencial a realizar pelos alunos em Matemática, por ano de escolaridade, ou, sempre que necessário, por ciclo, enfatizando que o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) deve ser objeto de ensino, representando um documento normativo a ser utilizado, pelos docentes, progressivamente.

No que concerne aos princípios orientadores, estabeleceu-se que as metas deveriam reconhecer os desempenhos que traduzem os conhecimentos a adquirir e as capacidades a serem desenvolvidas pelos alunos, tendo em conta uma ordem gradual de aquisição. Para a sua formulação existe uma consideração de clareza, para que os vários elementos da comunidade educativa, nomeadamente alunos e professores, entendam o pretendido com as mesmas. Assim, o documento pretende apresentar-se como um meio privilegiado de apoio à planificação, à organização e avaliação do ensino. É de salientar que as metas procuram ser uma referência para as aprendizagens essenciais, para a avaliação interna nas escolas e externa, nos testes intermédios, provas finais e exames nacionais (GAVE, 2013).

Relativamente à leitura esperada das Metas Curriculares, no que se refere aos alunos de 3º ciclo, as mesmas explicitam o pretendido ao ser fornecido um conjunto de vocábulos tais como *identificar*, *designar*, *reconhecer*, *dado*, *saber*, *provar*, *demonstrar*, *entender* e *justificar,* definindo cada um dos termos e conceitos (DGE, 2013).

4. Conclusão

Em suma, realizamos uma análise comparativa entre o Programa de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991) e de 2007 (Ponte et al., 2007). Apontamos as semelhanças, as diferenças, bem como as adaptações e complementaridades existentes, para os temas e para as capacidades Transversais. Como se tratou de um documento intermédio aos dois programas, analisamos o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001). Por fim, foram feitas considerações sobre as Metas Curriculares (DGE, 2013), já que se apresentam como última referência oficial, à data de realização da presente investigação, relativa à aprendizagem pretendida dos alunos.

INVESTIGAÇÃO EMPÍRICA

Capítulo IV – Metodologia do Estudo

1. Introdução

> *A preocupação central não é a de se os resultados são susceptíveis de generalização, mas sim a de que os outros contextos e sujeitos a eles podem ser generalizados.*
>
> Bogdan & Biklen (1994, p.66)

A investigação em Educação deve ser sistémica, ter rigor científico, adequar-se ao objeto de estudo e atender a princípios de clareza, lógica e síntese (Almeida & Freire, 2008; Pacheco, 1995).

Através deste estudo, pretendemos analisar, comparar, interpretar e avaliar as tarefas matemáticas, à luz dos dois últimos Programas de Matemática (DGEBS, 1991; Ponte et al., 2007), como promotoras de alunos mais autónomos e matematicamente mais competentes.

Neste capítulo, é apresentada uma descrição e uma justificação das opções metodológicas tomadas, referenciando-se as diferentes fases de implementação da investigação, a forma de recolha de dados, bem como os procedimentos tomados para tal.

2. Problemática

A nossa investigação tem, como finalidade, a análise crítica e comparativa dos últimos Programas de Matemática, confrontando o Programa homologado em 1991 (DGEBS, 1991) com o de 2007 (Ponte et al., 2007), tendo em conta o processo de ensino-aprendizagem, a diversificação de estratégias, atividades e instrumentos, a autonomia da aprendizagem, bem como a auto e a heteroavaliação. Estas vertentes serão objeto de análise categorial comparativa, entre os programas citados anteriormente.

Tendo em conta as perspetivas de ensino da Matemática, consubstanciadas pelo Plano de Ação para a Matemática (PAM), implementado em 2006, e sujeito a sucessivas reformulações (ME, 2009), interessa apreender as transformações conducentes a um novo paradigma de ensino, na tentativa de contrariar o insucesso a Matemática, referenciado no último PISA (2009), em avaliação simultaneamente internacional e nacional.

Há ainda a considerar a avaliação externa que decorre dos exames nacionais do 9º ano, assim como, o projeto dos Testes Intermédios do Ensino Básico (GAVE, 2005), os quais permitem aferir anualmente os resultados gerais dos alunos, em termos de competências e capacidades matemáticas.

Considerando os pressupostos enunciados, os programas têm vindo a sofrer alterações, no sentido de uma aprendizagem mais ativa, diferenciadora e autónoma.

É neste sentido, que o estudo visa averiguar de que forma a evolução dos Programas espelha as mudanças ocorridas na disciplina de Matemática, o que está explícito na Pergunta de Partida.

2.1 Pergunta de partida

A problemática subjacente à nossa pesquisa motivou o levantar de uma questão, em busca de resposta:

De que forma a evolução dos programas de Matemática evidencia um novo paradigma de ensino-aprendizagem, potenciando uma avaliação formativa, baseada na auto e heteroavaliação, a partir da concretização de tarefas matemáticas?

2.2 Objetivos

De acordo com a nossa Pergunta de Partida, **o objetivo geral** é:

- Analisar comparativamente as principais diferenças entre o Programa de 1991 (DGEBS, 1991), e o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ponte et al., 2007), considerando os conteúdos, as tarefas, a avaliação, a aprendizagem e a autonomia.

Com o intuito de melhor orientar a nossa investigação, e tendo em consideração este nosso objetivo geral, procedemos à apresentação dos **objetivos específicos**:

- Relacionar a aprendizagem com uma progressiva autonomia, através da concretização de tarefas matemáticas específicas;
- Analisar a interligação entre a aprendizagem e a auto e heteroavaliação, para o sucesso educativo;
- Relacionar a gestão curricular em sala de aula, com o aperfeiçoamento das práticas educativas;
- Analisar comparativamente o Pprograma de Matemática do Ensino Básico de 1991 (DGEBS, 1991) e de 2007 (Ponte et al., 2007), considerando caraterísticas diferenciadoras;
- Verificar a consolidação nas práticas da mudança paradigmática preconizada pelo Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (Ponte et al., 2007).

3. Estratégia metodológica

As opções metodológicas num trabalho científico reproduzem um conjunto de princípios que norteiam o desenrolar do estudo, de modo a garantir a validade do mesmo. A experiência profissional do investigador revela-se um fator importante para a concretização do trabalho de investigação. Afonso (2005) menciona que as experiências de vida e o saber dos mundos profissionais específicos constituem uma base privilegiada para o "trabalho de identificação de problemas, de prospeção de pistas de questionamento, para a pesquisa de contextos organizacionais onde possa vir a ser desenvolvido o trabalho empírico, para a localização das fontes de informação (Idem, p.48). Assim, nas Ciências da Educação, a investigação é uma atividade fundamental, já que há um constante levantar de questões, para a análise contextual da realidade. A investigação exige que o investigador tenha um conhecimento o mais aprofundado possível de métodos e técnicas, para que daí surja um processo rigoroso e metódico. Na procura da explicação ou da compreensão de um determinado problema, a análise de dados é fundamental, a fim de tornar as conclusões obtidas em dados fundamentados. Já que é necessário optar por uma ou mais metodologias que melhor encaixem no desenho da investigação, para que a análise seja o mais completa e rigorosa possível, é importante planificar, recolher, tratar e analisar os dados (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008).

O investigador, em função da sua Pergunta de Partida e dos seus objetivos, seleciona o método de investigação. Assim, na escolha do modelo empírico deve ser tida em conta, não só a problemática em estudo, como o tipo de dados a recolher e as especificidades do próprio investigador, de forma a desenvolver um trabalho consistente. Tal significa que o investigador deve fundamentar as suas decisões metodológicas, considerando diferentes paradigmas, de acordo com os respetivos referenciais teóricos (Coutinho, 2004). De facto, o paradigma adotado pelo investigador direciona a formulação da Pergunta de Partida e o *design* de investigação (Hussén,1990). Por isso, procurar os fundamentos teóricos da investigação é refletir sobre diferentes conceções sobre a natureza do conhecimento e a sua aplicabilidade (Coutinho, 2004).

Nesta perspetiva, na nossa investigação recorremos a uma Metodologia Qualitativa e ao Estudo de Caso. A opção pela pesquisa qualitativa, em detrimento da quantitativa, deve-se ao facto de se tratar de uma análise de uma realidade plural, em contexto (Flick, 2005).

Como afirma Coutinho (Idem, p.440):

> "Os defensores de uma avaliação qualitativa rejeitam que uma correcta aplicação de métodos e técnicas de investigação (ferramentas metodológicas) seja um garante da objectividade da busca do conhecimento/informação; acreditam que há diferenças fundamentais entre os fenómenos naturais e os sociais e que os métodos preconizados pelo paradigma positivista se revelam inadequados para o estudo destes últimos."

Stake (2009) aponta três diferenças entre as abordagens qualitativa e quantitativa da investigação: a distinção entre explicação e compreensão; distinção entre o papel pessoal e impessoal do investigador, e, por último, distinção entre conhecimento descoberto e construído. Por isso, uma segunda opção teve a ver com seleção de Estudo de Caso como estratégia de investigação adequada à nossa problemática.

Segundo Cohen e Manion (1990), os Estudos de Caso predominam em pesquisa educacional alicerçados num conjunto de técnicas, quer qualitativas, quer quantitativas, para a recolha de dados. Carateriza-se por ser descritivo e interpretativo, pois está direcionado para a observação e análise do que se passa no terreno. O fenómeno é situado no seu contexto, sendo que as fronteiras entre eles (fenómeno e contexto) nem sempre estão claramente delimitadas (Yin, 2005). Segundo Tuckman (2005, p. 532), "a preocupação essencial é descrever, referindo o processo, analisando os dados indutivamente e preocupando-se com o significado". Assim sendo, há uma valorização do quê e do porquê, das perceções e do discurso dos sujeitos, na procura de significados (Bogdan & Biklen, 1994; Tuckman, 2005).

A análise categorial, aplicada ao discurso escrito, neste Estudo de Caso, dos Programas de Matemática, permitirá descortinar regularidades e inferir conclusões (Stake, 2009), recorrendo a procedimentos estatísticos, a partir da contagem das ocorrências.

Em síntese, o paradigma qualitativo, dada a especificidade do nosso estudo, prende-se com a necessidade que temos em compreender e analisar a influência dos programas nas práticas educativas, em contexto de sala de aula.

4. Técnicas e instrumentos utilizados

Nesta investigação, foram aplicados procedimentos, em vários momentos, que envolveram atuação e sistematização, e que foram a base da estratégia metodológica. Desta forma, foi possível a recolha e consequente análise dos dados obtidos, através de tarefas matemáticas, relatório matemático, diário de bordo, teste em duas fases e estratégias de ensino diferenciadas, bem como entrevistas a professores. Nem todas as turmas aplicaram os mesmos instrumentos, tal como será explicitado na apresentação e análise dos resultados.

4.1 Análise de conteúdo

A fase que se segue, após a recolha de dados, é a análise e interpretação desses mesmos dados. Estes dois últimos processos possuem uma estreita ligação e complementam-se. Assim, a análise organiza e sumaria os dados, possibilitando as respostas à problemática investigada, procurando resultados e estabelecendo uma junção a outros conhecimentos anteriores (Leandro, 2006).

Para analisar as tarefas matemáticas aplicadas, aspeto central da nossa investigação, procuramos as relações entre a teoria e a prática, que possam estar ocultas, tendo em conta que traduzem a realidade e podem levar a uma construção do que se investiga. Como afirma Pereira (2001, p.59), “a tradução significa sempre a produção de algo que transcende a nossa individualidade e a dos outros, por isso ela nunca é exata”. Trata-se, pois, de entender não a linguagem, mas o que lhe está associado, como as “formas de vida e o seu sentido” (Idem, p. 59), tendo em conta o que não é afirmado, as incoerências do discurso, nomeadamente, as suas omissões e contradições, sendo a sua importância significativa na interpretação que é feita. Berger (1992) entende que, ao sermos conduzidos pelo discurso sujeito-objeto, fazemos com que a rigorosa preocupação respeitante à nossa análise de conteúdo, seja mais flexível com o intuito de promover uma maior eficácia ao nível da compreensão e da explicação.

Dada a complexidade dos fenómenos educativos, nem sempre é possível utilizar a dedução de conceitos com características comuns, de uma forma genérica, aplicando-os a diferentes fenómenos. Por isso, a coerência interpretativa dos tipos-ideais que evidenciam a originalidade e o tipo de situação, possibilita a criação específica de conceitos, começando através de inferências entre o que nos é dado pela interpretação e o conteúdo do que vai ser analisado (Alves, 2003).

Segundo Bardin (1977, p. 38), a análise de conteúdo "consiste num conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens". Contudo, um modelo único para a análise é algo inexistente, mas podem ser aplicadas algumas regras básicas, tendo em conta que a análise de conteúdo é constantemente reinventada devido aos problemas investigados. Desta forma, é viável a indicação de algumas normas e regras no que concerne aos cuidados a ter na utilização desta técnica, para que a pesquisa não seja colocada em causa devido à interpretação efetuada. Esta técnica relaciona-se com as ações humanas e as suas ideias. Por isso, na elaboração dos instrumentos de análise, deve ter-se em consideração, primeiro, o determinar das categorias de classificação e, depois, a escolha da unidade de análise (Carmo & Ferreira, 2008). Assim, torna-se importante efetuar uma categorização para uma sistematização dos dados recolhidos e a elaboração de inferências. As categorias, que podem ser pré ou pós estabelecidas, permitem uma simplificação e uma melhor compreensão dos dados recolhidos.

Segundo Bardin (1977, p.121), as várias fases da análise de conteúdo organizam-se à volta de três polos cronológicos". A primeira fase, denominada de pré-análise, corresponde a um período de intuições, no qual as leituras efetuadas se vão tornando mais precisas. A segunda, exploração do material, é um processo longo, pois é a fase que implica a categorização, que deve ser objetiva e fidedigna. Por último, a terceira fase corresponde ao tratamento dos resultados, à inferência e interpretação, visando validar os dados de forma significativa.

Assim, tendo em conta o anteriormente descrito, parece-nos que, no trabalho de análise do conteúdo das tarefas aplicadas, juntamente com o conhecimento construído num certo contexto de ação e com o quadro teórico por nós referenciado, existe uma fiável aproximação dos critérios de cientificidade a que deve obedecer qualquer investigação qualitativa. Atendendo aos posicionamentos relativamente à questão do rigor e da qualidade científica da investigação qualitativa, centramo-nos num posicionamento intermédio, entre os que recusam critérios de cientificidade semelhantes ao da pesquisa quantitativa e aqueles que advogam a aplicação dos mesmos conceitos de validade e fiabilidade, próprios da pesquisa quantitativa (Coutinho, 2008). Esta nossa opção vai ao encontro da proposta de Stake (2009), com a generalização naturalística, deixando a decisão de generalização para o leitor, a partir da descrição pormenorizada e sustentada do Caso.

Numa posição intermédia, menos ortodoxa, temos a linha dos que defendem que a pesquisa qualitativa se deve pautar por critérios de qualidade científica, mas em termos totalmente distintos dos padrões positivistas clássicos assumidos pela investigação quantitativa (Coutinho, 2008).

A análise de conteúdo, de tipo categorial, será aplicada aos inquéritos por entrevista a professores participantes no Projeto.

Gostaríamos de salientar que uma investigação deste tipo levanta a problemática relativa à distância entre o sujeito-objeto, bem como a posição do investigador no campo que investiga, perante os sujeitos investigados. Por isso corroboramos Amiguinho (1992, p.89), quando afirma que o investigador deve "situar-se em relação a si próprio, descentrar-se em relação às suas crenças, às suas representações, aos seus estereótipos e a tudo aquilo que seja suscetível de se projetar na situação".

4.2 Recolha documental de registos

A recolha documental teve por base um Projeto concretizado com nove professores e como tema os novos desafios à aprendizagem e autonomia em Matemática.

Ao longo de todo o Projeto foram sendo registados aspetos importantes relativamente à reação dos alunos, nomeadamente, atitudes e respostas ao proposto na sala de aula (tarefa, diário de bordo, entre outros). A relevância dada ao diálogo individual com professores e/ou alunos está patente ao longo deste trabalho. Nas reuniões com os professores colaboradores, tivemos o cuidado de sermos o mais esclarecedores possível, através de alguma informalidade. Procuramos que o ambiente em que decorreu a aplicação dos vários instrumentos de avaliação fosse o mais normal possível para os vários elementos envolvidos, com o intuito de sermos objetivos, claros e pertinentes. As produções dos alunos são provenientes de cadernos diários ou folha da tarefa, resultado de trabalho individual, em díade, em pequenos grupos de três/quatro alunos ou em grupo-turma. As tarefas são provenientes e/ou adaptadas de manuais escolares atualizados, material de apoio das brochuras da DGIDC (ME, 2008) ou da Associação de Professores de Matemática (APM), dos testes intermédios ou dos exames nacionais. Em relação às aulas assistidas, tentamos que a nossa presença fosse o mais discreta possível para que os alunos ou professores não sentissem alterações ao habitual funcionamento da aula de Matemática.

O desenvolvimento da investigação enquadrou-se no Projeto Educativo (PE) das várias escolas. Uma das linhas orientadoras e comum a qualquer uma das escolas ligadas a este trabalho era a educação dos alunos para a autonomia e para a responsabilidade, sendo o aluno responsável, entre outras coisas, por parte do próprio percurso de aprendizagem e respetivo sucesso.

4.3 Contextualização do Estudo

4.3.1. Implementação do PMEB

Foi longo o período em que a Matemática esteve mecanizada. Centrava-se na realização de atividades com gradual nível de dificuldade que, por sua vez, se fundamentavam em exercícios predefinidos pelo professor e apoiados nos manuais existentes, provas globais e/ou exames nacionais. Mas como é reconhecido, tais pedagogias levam a uma aprendizagem pouco significativa e limitada, à incapacidade de visualização prática da disciplina, com consequente desinteresse por parte dos alunos e quase automático insucesso na mesma.

Desta forma, a Matemática apresenta-se como um meio de ampliar o pensamento indutivo e dedutivo, levando a uma melhor compreensão do mundo, pois ajuda a uma aquisição de saberes científicos, tecnológicos e culturais. O pensar matematicamente facilita o saber de outras disciplinas, atendendo a que, por exemplo, muitas vezes recorre a mapas concetuais, estratégias próprias e diferentes modos de organizar o seu estudo. Neste contexto, o aluno transformará com facilidade a competência essencial matemática em competência geral, ou seja, recorrendo a algoritmos e fórmulas já do seu conhecimento, elabora um pensamento crítico face aos dados fornecidos e obtidos, contestando um gráfico representativo de uma situação do quotidiano, no qual está presente uma clara intenção de «enganar».

Assim, ser matematicamente competente é cada vez mais imperativo, como se pode verificar não só a nível do Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001), mas também nos vários reajustamentos que o Programa de Matemática tem vindo a sofrer, datando de 28 de dezembro de 2007 a homologação da última versão.

As razões subjacentes e impulsionadoras deste projeto prenderam-se com o facto de:

i. Os alunos, para além de revelarem dificuldades de aprendizagem, muitas vezes não são capazes de delinear a estratégia necessária para resolver os problemas propostos ou as questões levantadas. Tal leva a que, tanto a autonomia como as competências matemáticas, não sejam desenvolvidas nem potenciadas da melhor forma. Ir de encontro ao currículo, levar a que competências matemáticas se transformem em competências transversais, transformar alunos em discentes autónomos na sua aprendizagem são exemplos observáveis através das tarefas matemáticas que são a base de sustentação do PMEB (Ponte et al., 2007). Muitas vezes, os alunos resolvem os problemas não refletindo na questão ou na técnica de resolução, mas preocupando-se apenas com o resultado final. Como refere Lopes (2002, p.18) "resolver problemas é uma atividade complexa que envolve a coordenação de conhecimentos, experiências prévias, intuição, atitudes, convicções e várias habilidades".

ii. Os professores têm dificuldade em libertarem-se do ensino tradicional, em que o professor transmite conhecimentos e os alunos fazem uma aprendizagem por treino ou repetição. Por vezes, os docentes desconhecem ou não aplicam outras estratégias de ensino, como por exemplo, tarefas matemáticas ou questões de investigação.

iii. Uma questão, que é muito abordada entre a classe docente, é a avaliação e os variados tipos existentes, bem como os seus instrumentos. A avaliação continua a ser grande objeto de estudo e, algumas vezes, motivo de discórdia entre professores/alunos/encarregados de educação.

O PMEB (Ponte et al., 2007) aborda todos os itens acima referidos de uma forma mais exaustiva, comparativamente ao Programa de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991), tendo as tarefas e avaliação um papel primordial. Relativamente às tarefas, a sua importância é tal que a DGIDC (ME, 2008) lançou uma coleção de brochuras, que se encontram disponíveis *online*[1], de apoio aos vários tópicos lecionados no 1º, 3º, 5º e 7º ano de escolaridade.

Neste contexto, iremos apontar algumas das razões que nos levaram à escolha deste tema, como objeto de estudo, bem como a metodologia que iremos optar para o trabalhar.

Numa primeira análise e debruçando-nos sobre a problemática do PMEB (Ponte et al., 2007), podemos ler, no *site* da DGIDC (ME, 2008), o seguinte

> " o reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico é uma das acções definidas no Plano de Acção para a Matemática que resulta de um processo de reestruturação dos programas em vigor desde 1991, para os adequar ao Currículo Nacional do Ensino Básico. A concretização desta medida implicou o convite a uma equipa de especialistas e investigadores das áreas da Matemática e da Educação Matemática. Este reajustamento, agora designado por Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, consistiu na elaboração de um documento único que engloba para cada um dos ciclos do Ensino Básico os objectivos, os temas matemáticos, as orientações metodológicas e aspectos ligados à gestão curricular e à avaliação. O Novo Programa de Matemática do Ensino Básico foi homologado a 28 de Dezembro de 2007."

Deste modo, o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), para além dos ajustes evidenciados a nível do currículo, demonstra um novo estar perante a Matemática: enfatiza a necessidade da comunicação matemática oralmente e por escrito, o cálculo mental e o raciocínio. A grande diferença entre o Programa de 1991 (DGEBS, 1991) e o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) é acima de tudo a base de trabalho: as atividades deixam de ser exercícios do manual, com fator repetitivo e aumento do grau de dificuldade para passarem a ser tarefas de caráter investigativo e exploratório. Sintetizamos o que acabamos de descrever através da figura 18, ou seja, enquanto o Programa de 1991 (DGEBS, 1991) assentava em exercícios do manual adotado pelas escolas, o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) centra-se nas tarefas matemáticas.

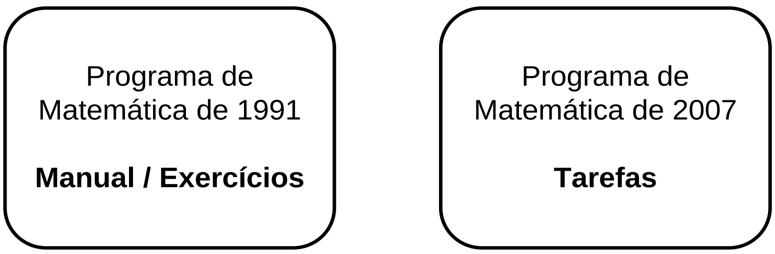


Figura 18 - Principal diferença da base de trabalho entre os programas

[1] http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/home.htm

A implementação do PMEB (Ponte et al., 2007) teve um percurso cronológico, desde a homologação da última versão, como podemos constatar através da figura 19.

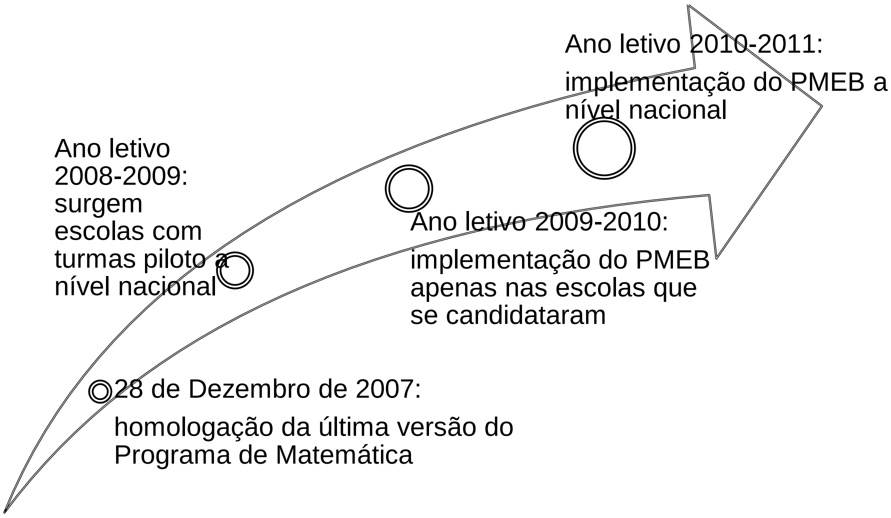


Figura 19 - Datas relativas à implementação do PMEB de 2007

Fonte: Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC).

É importante realçar que a sua implementação foi inicialmente concretizada em turmas-piloto, no ano letivo de 2008-2009, em turmas do 1º, 3º, 5º e 7º ano de escolaridade pertencentes às diversas direções regionais da educação de Portugal Continental, como podemos comprovar através do Anexo IV. No quadro 17, estão contabilizadas a totalidade de turmas-piloto, por ciclo e ano de escolaridade.

Quadro 17 - Distribuição das turmas-piloto por ciclo e ano, no ano letivo de 2008-2009

Ciclo	Ano	Nº de turmas
1º Ciclo	1º Ano	10
	3º Ano	10
2º Ciclo	5º Ano	10
3º Ciclo	7º Ano	10
	Total	40

Fonte: Direção-Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC).

No ano letivo de 2009-2010, iniciou-se o processo de generalização de implementação do PMEB (Ponte et al., 2007) a nível nacional. Esta implementação decorreu segundo um processo de candidatura, através do qual as escolas teriam de cumprir alguns requisitos. Em resultado dessa candidatura, as escolas, divididas pelas várias direções regionais, que implementaram o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) são as constantes do quadro 18.

Quadro 18 - Número de escolas que implementaram o PMEB, no ano letivo de 2009-2010

	Ano letivo 2009-2010	
Implementação do PMEB		Nº de escolas
	DREN	140
	DREC	61
	DRELVT	135
	DREALENT	50
	DREALG	21
	Total	407

Fonte: Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC).

No ano letivo 2010-2011, todas as escolas que ainda não o tinham feito, implementaram o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) no 1º, 3º, 5º e 7º ano de escolaridade. As escolas que iniciaram o processo no ano transato continuaram com o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) para o 2º, 4º, 6º e 8º ano, para além dos anos de escolaridade já estabelecidos no ano letivo anterior. As escolas que tiveram turmas-piloto no ano letivo de 2008-2009, lecionaram pela primeira vez o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) no 9º ano, em virtude de todos os restantes anos de escolaridade já se encontrarem a desenvolvê-los.

No que toca ao Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), o plano de implementação incluía três atuações: materiais de apoio, reuniões entre coordenadores com a presença ou não de professores acompanhantes do PMEB/PM II e formação contínua. Assim, os materiais disponibilizados pela DGIDC (ME, 2008), no ano letivo de 2009-2010, foram os seguintes:

- Cinco brochuras de apoio ao trabalho dos professores sobre: Números, Álgebra, Geometria, Organização e Tratamento de Dados e Capacidades Transversais;
- Materiais destinados ao uso em sala de aula, com propostas de tarefas para os três ciclos do Ensino Básico;
- Um Website que inclui materiais de apoio (textos, planos aula, tarefas, relatos de experiências em sala de aula, …) e um apoio *online* aos professores.

No entanto, as brochuras demoraram de tal forma a estarem disponíveis no *site* da DGDIC (ME, 2008), que os docentes ponderaram elaborarem tarefas. Contudo, algumas questões continuavam a preocupar os docentes: Como elaborar tarefas sem terem recebido formação para tal? E após a sua elaboração, como as implementar? Estas eram algumas das muitas preocupações que se podem ler no diário de bordo relativo aos docentes de 3º ciclo, datado do dia oito de setembro de 2009, começando o ano letivo no dia doze do mesmo mês (EBLP, 2011).

De uma forma geral, os docentes que eram coordenadores, e que estavam presentes em reuniões em várias escolas associadas a uma professora acompanhante ou lecionavam o Programa de 2007, pronunciavam-se nos encontros realizados todas as terças-feiras (dia previsto para as reuniões e no qual os docentes deveriam estar libertos de componente letiva no turno da tarde). Lamentaram que, muitas vezes, as tarefas existentes nas brochuras oficiais contivessem erros e não estivessem no melhor suporte digital (não permitindo assim uma utilização mais rentável), que nem todos os tópicos estivessem detalhadamente contemplados nos cadernos de apoio e que o apoio *online* nem sempre funcionasse (Relatórios Intermédios dos Coordenadores do PMEB) (EBLP, 2011).

Relativamente às medidas de apoio, mais especificamente as reuniões, no ano letivo 2009-2010, nas escolas em que entrou em vigor, foi criado um dispositivo de apoio com as seguintes caraterísticas:

- Cada escola teve uma equipa de coordenação do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) constituída por três elementos, um de cada ciclo de escolaridade.
- Existência entre setenta a oitenta professores acompanhantes, selecionados por concurso nacional.

O único meio de comunicação existente entre os vários Coordenadores do PMEB (Ponte et al., 2007) dos três ciclos das escolas para partilha de informação, recebimento de indicações, entre outros, era através de reuniões supervisionadas por uma professora acompanhante com a periodicidade mensal, a qual nem sempre foi cumprida. De salientar que, os encontros previstos para as terças-feiras, entre colegas da mesma escola, nem sempre foram possíveis. Houve situações de incompatibilidade de horários, por não cumprimento do edital, para salvaguardar, aos professores de Matemática de 2º e 3º ciclo e aos docentes do 1º ciclo, essa tarde sem atividade letiva para a ocorrência das reuniões.

No âmbito da implementação do Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007), a formação foi prevista da seguinte forma: no ano letivo 2008-2009, uma vez por semestre, ocorreu replicação da formação que decorreu para professores do 2.º e 3.º Ciclo do Ensino Básico da responsabilidade da DGIDC (ME, 2008). Estas ações, previstas num total de cinquenta e quatro, decorreram a nível nacional na modalidade de Oficina de Formação composta por vinte e cinco horas presenciais e vinte e cinco horas de trabalho autónomo. No ano letivo seguinte, 2009-2010, a formação iniciada aos docentes de 1º e 2º ciclo foi continuada. No entanto, apesar de várias escolas terem visto a sua candidatura aprovada, a formação para os professores de 3º ciclo foi disponibilizada apenas aos Coordenadores, num total de quinze horas divididas em três sessões: outubro e novembro de 2009, março de 2010. Assim, no 3º ciclo, o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) foi implementado em simultâneo à formação que foi dada apenas aos Coordenadores e só puderam usufruir escolas que já estivessem a desenvolver o PMEB (Ponte et al., 2007). Em reuniões entre várias escolas, uma das várias queixas apresentadas era essa mesma: a formação surgiu ao mesmo tempo ou após a implementação.

Assim, para uma análise comparativa entre os Programas (1991 e 2007) (DGEBS, 1991; Ponte et al., 2007), iremos ter em conta os relatórios/atas existentes das várias reuniões e encontros, que irão ser publicados oportunamente pela Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC) (ME, 2008) e instrumentos diversificados de recolha de dados inerentes ao PMEB (Ponte et al., 2007).

4.3.2. Contexto do Estudo de Caso

As cinco escolas em que este estudo foi realizado localizam-se no concelho de Matosinhos e ministram o 2º e o 3º ciclo do Ensino Básico, bem como, em alguns casos, o Ensino Secundário. São escolas muito diferentes entre si, tendo em conta que duas encontram-se muito bem posicionadas nos *rankings* nacionais, e uma está inserida em território educativo de intervenção prioritária, vulgarmente conhecido como escola TEIP. Todas as escolas encontram-se representadas, institucionalmente, no Concelho de Escolas de Matosinhos. A ação educativa, de todas as escolas, é caracterizada, no quadro da autonomia, por uma filosofia de interação e cooperação entre os variados órgãos de gestão, nomeadamente, Conselho Geral, Direção e Conselho Pedagógico. Todas possuem uma oferta educativa que passa pelo ensino regular e pelos Cursos de Educação e Formação de jovens e adultos. Uma das escolas pertencentes a este estudo trabalha em parceria com os estabelecimentos prisionais, masculinos e femininos, do concelho de Matosinhos.

Para dar resposta a tantos desafios, as escolas tiveram de se adaptar e criar novas dinâmicas, passando a integrar variados projetos nacionais como Plano de Ação da Matemática (PAM), Plano da Matemática II (PM II), Plano Nacional de Leitura (PNL), Plano Tecnológico de Educação (PTE), projeto *RIOS*, programa da Rede de Bibliotecas Escolares, Desporto Escolar, ou, ainda, programas de parcerias com empresas como a LIPOR, no âmbito das Eco-Escolas. De uma forma geral, as escolas visadas neste estudo, envolvem-se em atividades culturais, recreativas e pedagógicas, através de exposições, *workshops*, concursos dinamizados pelos departamentos/áreas disciplinares de âmbito local, nacional ou internacional, visitas de estudo, torneios desportivos e campanhas de solidariedade, de acordo com o Projeto Educativo (PE) e o Plano Anual de Atividades (PAA).

Assim, tendo em conta a variedade da oferta educativa das escolas nas quais o nosso projeto decorre, concluímos que existe uma heterogeneidade de alunos, tanto no que diz respeito à sua faixa etária, como à diversidade dos seus interesses.

5. População e Amostra

A nossa população engloba os alunos de 3º ciclo do Ensino Básico, num total de 2175 alunos e vinte e um docentes que lecionam Matemática. A amostra relativamente aos alunos totaliza quatrocentos e trinta e um participantes, com ou sem retenções, pertencentes a turmas de 7º e 8º ano muito diversas em aproveitamento e comportamento. As duas turmas, nas quais a investigadora lecionava, continham um total de cinquenta e sete alunos (vinte e oito e vinte e nove, respetivamente), doze turmas possuíam uma média de vinte e seis alunos, duas turmas tinham vinte e um alunos e apenas uma turma tinha dezoito alunos.

A nossa amostra é composta por nove docentes que lecionavam Matemática ao 3º ciclo do Ensino Básico. No entanto, apenas um professor, de cada escola, teve formação para o PMEB (Ponte et al., 2007), tendo a mesma decorrido em simultâneo à implementação, como já foi anteriormente referido.

Os professores colaborantes neste projeto, ou pertenciam todos ao quadro da escola onde se encontravam a lecionar, ou apesar de serem do quadro de zona pedagógica, já se encontravam a dar aulas no mesmo local, no mínimo, há dois anos. Todos os professores contactados aceitaram participar, até porque já conheciam e trabalhavam segundo as indicações do Projeto, tal como descrito anteriormente no Contexto. Não obstante a efetiva participação e o trabalho colaborativo nas reuniões previstas, manteve-se uma certa resistência dos docentes perante novos desafios. Alguns professores realçaram como constrangimento a sobrecarga do seu horário de trabalho, não desejando ultrapassar a carga horária inicialmente prevista, o que dificultou a conciliação de horários entre docentes participantes no Projeto.

Em acréscimo, os docentes denotaram dificuldade em optar pelas tarefas mais apropriadas para as suas turmas, tendo em conta que, para além de se tratar de um novo programa, no caso do 3º ciclo é a primeira vez que o docente entra em contacto com a turma, não tendo qualquer conhecimento sobre a mesma.

6. Conclusão

Em síntese, a nossa investigação segue um paradigma predominantemente qualitativo, com um Estudo de Caso simples, efetuado com alunos e professores do 3º ciclo do Ensino Básico. Dado que entendemos que as questões relativas ao PMEB (Ponte et al., 2007) são pertinentes e extremamente atuais, o estudo centrar-se-á nas tarefas matemáticas, de acordo com o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007). Consideramos que a Matemática não é apenas um problema do investigador, mas também da comunidade educativa, visando a qualidade e o sucesso. Assim, pretendemos com este estudo, contribuir para a clarificação de algumas interrogações relativas às tarefas, estratégias de ensino e avaliação.

Capítulo V – Análise e tratamento de dados

1. Introdução

Neste capítulo é feita uma análise dos dados recolhidos através de diferentes instrumentos. Relativamente às tarefas aplicadas, e para uma melhor interpretação, são apontados os objetivos gerais previstos no PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), bem como as aprendizagens visadas, com o objetivo de um maior entendimento dos dados recolhidos. Procuraremos apontar aspetos comuns, diferenças existentes e transformações ocorridas, que sejam relativas aos temas e às capacidades transversais.

Para o relatório matemático, o diário de bordo e o teste em duas fases é feita uma análise qualitativa e comparativa, com o intuito de aferir a possível ocorrência de alterações, em função do previsto no Programa de Matemática de 2007 (Idem, 2007). Em relação ao relatório final do PM II/PMEB (Santos, 2010_b), faremos uma análise sobre o mesmo, tendo em conta que se trata de um documento que compila os vários relatórios intermédios, feitos por todas as escolas que se encontravam na implementação do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007).

2. Desenvolvimento do projeto

O projeto decorreu ao longo de dois anos letivos (2009/2010 - 2010/2011), com início em setembro de 2009. No desenrolar do projeto é possível distinguir duas fases distintas: a seleção das tarefas a aplicar, bem como dos instrumentos de avaliação, e a aplicação propriamente dita.

Neste sentido, na primeira fase, antes da escolha das tarefas e dos instrumentos de avaliação a aplicar, o nosso trabalho prendeu-se com a seleção fundamentada dos temas, sobre os quais as tarefas aplicadas iriam recair: Álgebra e Números e Operações. Entendemos que, no que diz respeito à Álgebra, a importância que este tema adquire no espírito do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) justifica a nossa decisão, tendo em conta que "surge como um dos quatro temas fundamentais a serem trabalhados ao longo dos três ciclos de ensino" (Bandarra & Alves, 2010, p.257). As mesmas investigadoras (p. 261), baseando-se no PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), afirmam que "a actividade algébrica, a desenvolver pelo aluno, assume necessariamente a natureza exploratória e investigativa, em que as situações relacionadas com a realidade assumem um papel relevante como o ponto de partida para a elaboração de modelos e exploração de relações".

No que concerne a nossa opção, relativamente a Números e Operações, entendemos, tal como Ponte et al. (2006, p.55), que

> " o conceito de número ocupa um lugar de destaque na Matemática escolar. Desenvolver o sentido do número, ou seja, adquirir uma compreensão global dos números e das operações e usá-la de modo flexível para analisar situações e desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e as operações é um objectivo central da aprendizagem da Matemática. As investigações numéricas contribuem para desenvolver essa compreensão global dos números e operações, bem como capacidades matemáticas importantes como a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações."

Assim, após a decisão dos temas, passámos para a seleção das tarefas a aplicar. No quadro 19, podemos observar a distribuição das tarefas aplicadas por tema:

Quadro 19 - Divisão das tarefas por temas

<table>
<tr><td></td><th colspan="2">Temas</th></tr>
<tr><th rowspan="5">Tarefas</th><th>Álgebra</th><th>Números e Operações</th></tr>
<tr><td>Aluguer de automóveis</td><td>A comida</td></tr>
<tr><td>A poupança</td><td>Notação científica</td></tr>
<tr><td>Os quadrados</td><td>Passeio a pé</td></tr>
<tr><td>Os quadrados e os círculos</td><td>Análise de gráficos</td></tr>
</table>

A aplicação das tarefas ocorreu de acordo com o planeamento estabelecido, isto é, foi feita tendo em conta a planificação anual da área disciplinar de Matemática, quer na escola onde já estava implementado o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), quer aos alunos abrangidos pelo Programa de 1991 (DGEBS, 1991). No entanto, não foi fácil conseguir professores dispostos a aplicar as tarefas em outras escolas. Não por falta de interesse, mas pelo contrarrelógio em que os professores vivem relativamente ao cumprimento das planificações. Tal é particularmente evidente para os docentes de Matemática, que têm prazos muito curtos, para lecionar vários conteúdos, que serão alvo de avaliação externa, em testes intermédios e/ou exames nacionais que, por sua vez, influenciam os rankings das escolas. Por tal, foi necessário uma fase de negociação/conversação, que se pautou por algumas sessões de esclarecimento sobre o projeto a desenvolver, as tarefas a aplicar e os dados a recolher.

Após construído o plano de trabalho, que não descurou a época de avaliações nem as obrigações junto dos departamentos de cada um dos docentes aplicadores, o que acalmou algumas ansiedades existentes, passou-se à etapa seguinte: onde e como aplicar as tarefas. Durante as sessões de trabalho de esclarecimento, ficou acordado que as tarefas seriam aplicadas aquando da lecionação do conteúdo, sempre que possível. Também foi definido que as mesmas seriam aplicadas durante a aula curricular de Matemática, como trabalho de casa, ou ainda na área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado que, em muitas escolas, está atribuída a Matemática e/ou Língua Portuguesa, de acordo com o Decreto-Lei nº 18/2011 de 2 de fevereiro. Este Decreto-Lei veio alterar o Decreto-Lei nº 6/2001 de 18 de janeiro, relativamente aos princípios orientadores da organização e da gestão curricular do Ensino Básico. No mesmo pode-se ler que se procura dar uma nova "ênfase ao estudo acompanhado, no objetivo da promoção da autonomia da aprendizagem e melhoria dos resultados escolares. (…) uma estratégia de reforço ao apoio nas disciplinas de Língua Portuguesa e de Matemática".

No entanto, tal situação seria sempre gerida pelo professor de Matemática tutor da turma, pois também teriam de ser tidas em conta as caraterísticas de cada turma. No caso da realização na sala de aula, o trabalho poderia passar por ser individual, de pares, ou ainda em grupos de três ou quatro alunos no máximo. Os professores forneceram as tarefas aos alunos sem indicações sobre a sua resolução nem sugestões. A única instrução que os alunos tinham, no caso de não conseguirem resolver, era fazerem menção dessa dificuldade, incluindo o porquê. Concluímos, pois, que foram bastante importantes as sessões de esclarecimento/orientação do trabalho a efetuar, junto dos docentes que iriam aplicar as tarefas, para que houvesse um maior envolvimento dos mesmos, tendo em conta que, em algumas situações, era o primeiro contacto pessoal/profissional que existia.

Apesar de não ser nosso objeto de estudo aprofundar as experiências, conclusões ou reflexões dos professores colaborantes com o projeto, entendemos que seria pertinente expor alguns relatos ou comentários. Assim, após a aplicação das tarefas, salientamos a opinião da maioria dos docentes, concretamente alguns aspetos seguintes relativamente à experiência:

- Os alunos preocupavam-se em explicar mais e melhor quando trabalhavam em díade ou em grupo, do que quando executavam as tarefas individualmente;
- Os discentes comunicavam mais, em termos matemáticos, oralmente e no papel, por se tratar de questões que envolviam investigação;

- Os alunos mostravam-se mais seguros e reagiam de forma mais espontânea em trabalhos colaborativos;
- Os alunos aperfeiçoavam-se e corrigiam-se naturalmente, quando dialogavam entre si;
- Os erros cometidos eram objeto de discussão entre eles;
- As dificuldades de interpretação eram o primeiro obstáculo;
- As questões investigativas originavam maior entusiasmo;
- A gestão do tempo foi problemática, principalmente, nas tarefas iniciais.

Ainda neste contexto, salientamos o facto de os professores, que ainda lecionavam o Programa de 1991 (DGEBS, 1991), se terem mostrado mais predispostos para elaborarem/aplicarem tarefas aos seus alunos, tendo em conta o entusiasmo que sentiram, por parte destes, perante uma aula com recurso a tarefas exploratórias. No entanto, os docentes continuam a destacar o grande entrave à aplicação de tarefas, na sala de aula: o fator tempo.

De seguida, apresentaremos diferentes exemplos de respostas dos alunos às várias questões constantes das tarefas. Para cada relato, faremos uma análise sobre a produção do discente.

3. Instrumentos de recolha de dados

3.1 As tarefas aplicadas

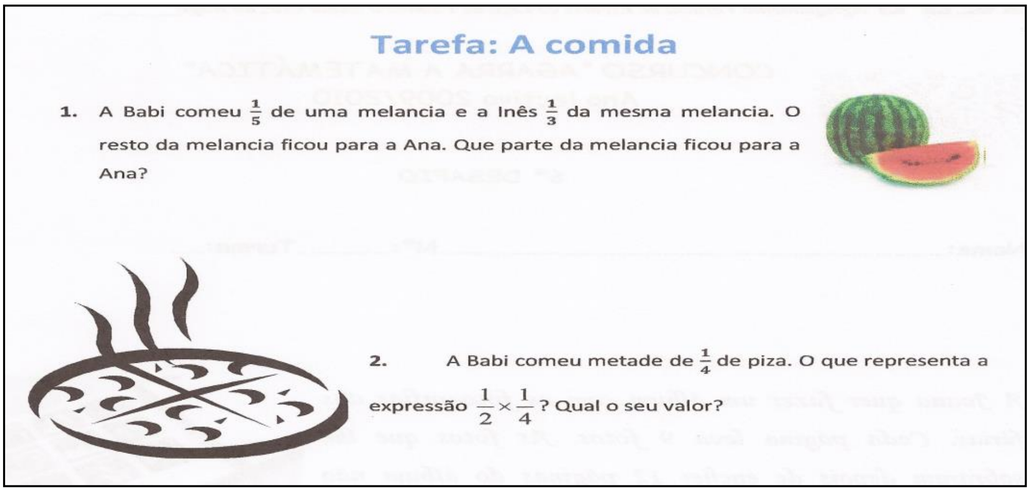
1. **Tarefa**: A comida

A tarefa em causa incluía-se no tema “Números e Operações”, no tópico “Números racionais”. Assim, teve como objetivo geral de aprendizagem que os alunos fossem “capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos”. Mais especificamente, pretendeu-se que os alunos calculassem “o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais”. Nas indicações metodológicas do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007, pp.48-50) podemos ler

> “ as tarefas propostas aos alunos devem incluir, a resolução de problemas e a exploração e investigação de situações numéricas. (…) A realização destas tarefas também deve permitir aos alunos o desenvolvimento da sua capacidade de cálculo numérico, de escolher o processo de cálculo numérico mais adequado a cada situação.”

A tarefa era constituída por duas questões. As aprendizagens visadas incluíam, para além de levar os alunos a operar com números racionais, calculando o valor de expressões numéricas, que os discentes fossem capazes de representar matematicamente a informação fornecida.

A tarefa proposta aos alunos foi a seguinte:



Tarefa: A comida

1. A Babi comeu $\frac{1}{5}$ de uma melancia e a Inês $\frac{1}{3}$ da mesma melancia. O resto da melancia ficou para a Ana. Que parte da melancia ficou para a Ana?

2. A Babi comeu metade de $\frac{1}{4}$ de piza. O que representa a expressão $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$? Qual o seu valor?

Figura 20 - Tarefa: A comida
Fonte: Adaptado de Neves, Silva, Raposo e Silva (2010).

Quase todos os alunos envolvidos tentaram responder às questões colocadas, não havendo, por isso, muitas respostas em branco ou apenas um valor final. Para analisar as produções escritas, sentimos necessidade de estabelecer vários tipos de níveis e respetivos descritores, para que a interpretação fosse "uma descrição objectiva, sistemática e quantitativa do conteúdo manifesto na comunicação" (Bardin, 1977, p.20), que iremos utilizar sempre que seja oportuno.

Quadro 20 - Descrição dos níveis de desempenho

Níveis	Descritores
A	Apresenta uma estratégia correta ou uma composição bem estruturada e conclui o pretendido.
B	Apresenta alguns cálculos, mas comete erros ou dá uma resposta errada OU elabora uma composição razoavelmente estruturada, mas comete erros ou conclui erradamente.
C	Inicia uma estratégia de resolução ou uma composição, mas não conclui.
D	Apresenta apenas um resultado final errado.

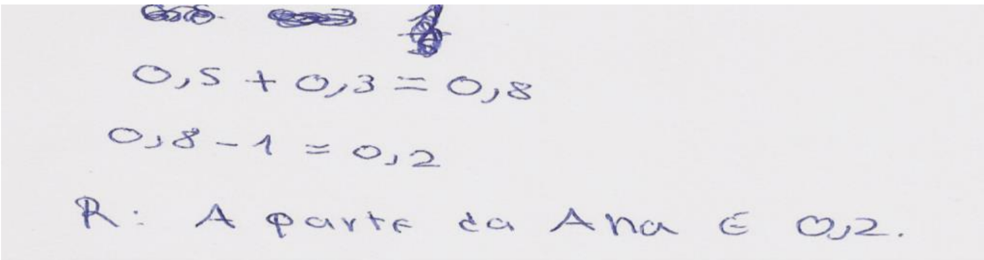
Fonte: Adaptado de Carvalho e Silvestre (2010) e dos critérios gerais de classificação dos testes intermédios e exames nacionais de Matemática (GAVE, 2011).

No que diz respeito a esta tarefa e pela forma como a grande maioria das tarefas foram aplicadas, iremos começar por apresentar algumas produções de alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991), bem como de discentes que já se encontram no PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007).

No que se refere às produções escritas pelos alunos, optamos por mostrar não só aquelas com maior representatividade, mas também as que diferem do comum.

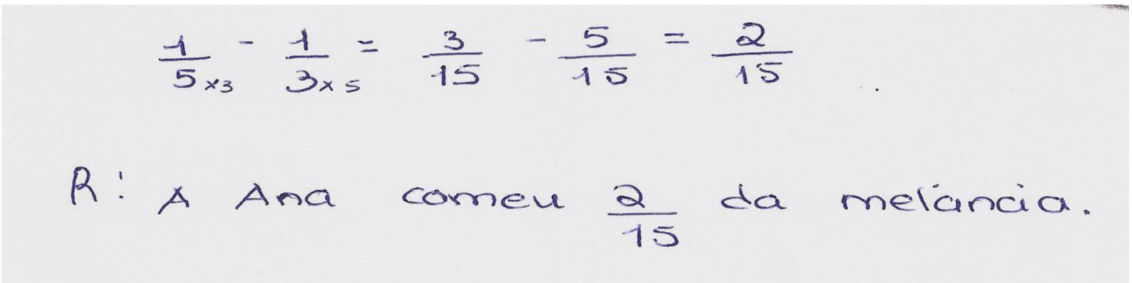
Neste contexto, através dos exemplos seguintes, verificamos que na primeira questão muitos optam por não trabalhar com frações, mas com os valores na forma decimal, cometendo alguns erros de arredondamento. Também é visível a dificuldade em operar com números racionais:

Exemplo 1



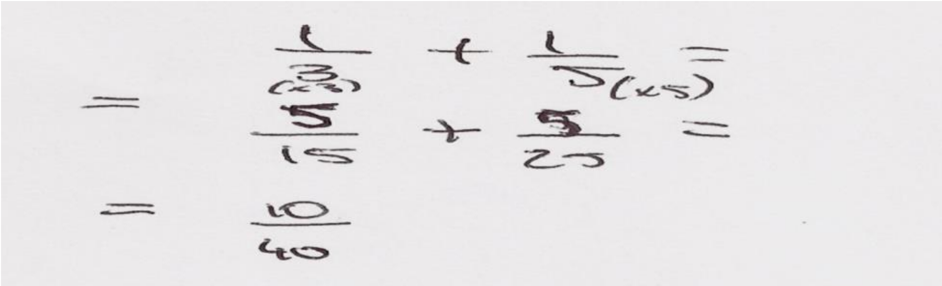
No exemplo 1, o aluno optou por trabalhar com decimais, mas erradamente, pois é percetível que não sabe reduzir à dízima, já que, para ele, a fração $\frac{1}{5}$ é equivalente a cinco décimas. No entanto, como não descreve o seu raciocínio, fica a dúvida se não sabe que a unidade é superior a oito décimas, ou, se o erro é relativo à interpretação do enunciado, pois não retira o que comem à melancia.

Exemplo 2



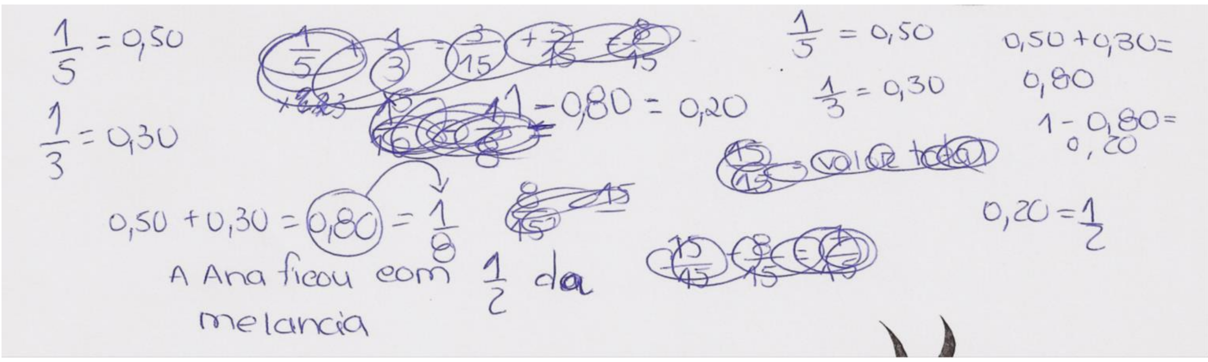
Relativamente ao exemplo 2, é evidente que o aluno é capaz de efetuar algoritmos, pois trabalha com facilidade as frações apesar de não ser entendível se o resultado final se deve a distração, ou se não sabe adicionar algebricamente. Por outro lado, não compreende o problema o que leva a que realize um cálculo, sem perceber o que faz. Pensamos que a resposta que dá, se deve a não saber qual o cálculo seguinte, que poderia efetuar, ou por entender que já efetuou todos os necessários.

Exemplo 3



Em relação ao exemplo anterior (exemplo 3), somos levados a concluir que o aluno não conhece os procedimentos básicos da Matemática, pois não é capaz de realizar operações com números racionais. No exemplo, percebe-se que a melancia nunca é referenciada pelo facto de não revelar o que pensou, podemos entender que existe uma falta de compreensão do proposto na questão.

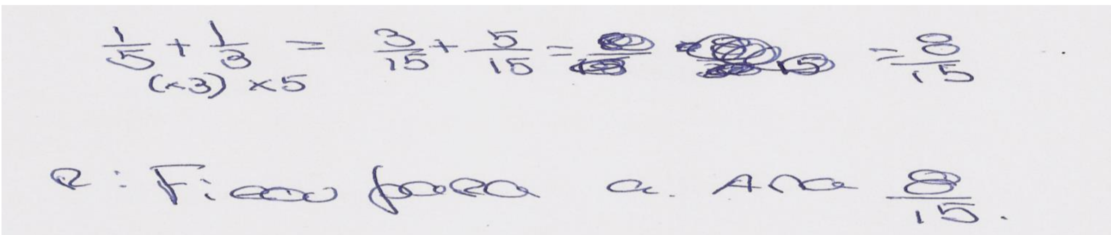
Exemplo 4



Apesar de ter alguma compreensão do questionado (exemplo 4), o aluno não sabe transformar corretamente um número racional fracionário em decimal, e vice-versa, já que a fração $\frac{1}{5}$ é igual a cinco décimas ou oito décimas é o mesmo que $\frac{1}{8}$. Este aluno também não é crítico, relativamente ao resultado encontrado, pois não estranha que, apesar da Babi e da Inês juntas terem comido oitenta décimas, a Ana possa ter ficado com meia melancia.

Tendo em conta os descritores do quadro 20, os alunos, que se enquadram no nível B, têm como registo mais frequente o seguinte:

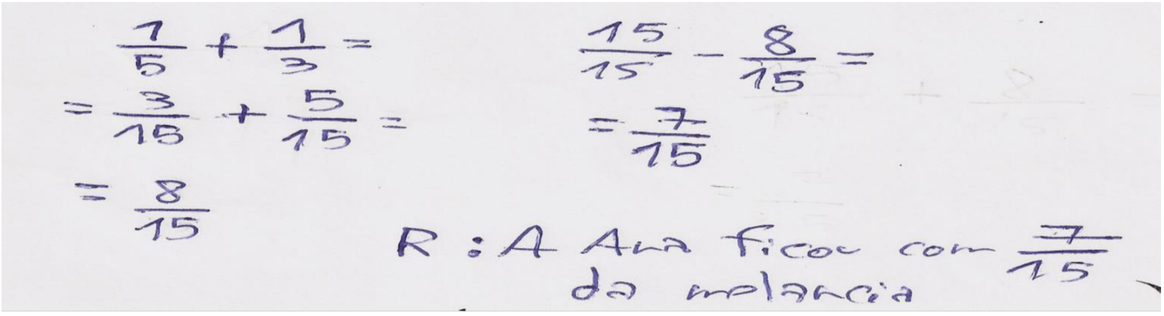
Exemplo 5



Neste caso (exemplo 5) e como refere o PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), o aluno «sabe fazer», mas não «sabe porquê». É capaz de efetuar algoritmos, mas não percebe a razão de ser dos mesmos, bem como não entende o problema na globalidade, já que a melancia, no seu todo, nunca é evidenciada nos cálculos.

Relativamente às respostas, que correspondem ao nível A, o exemplo que se segue é o que representa as mais apresentadas.

Exemplo 6

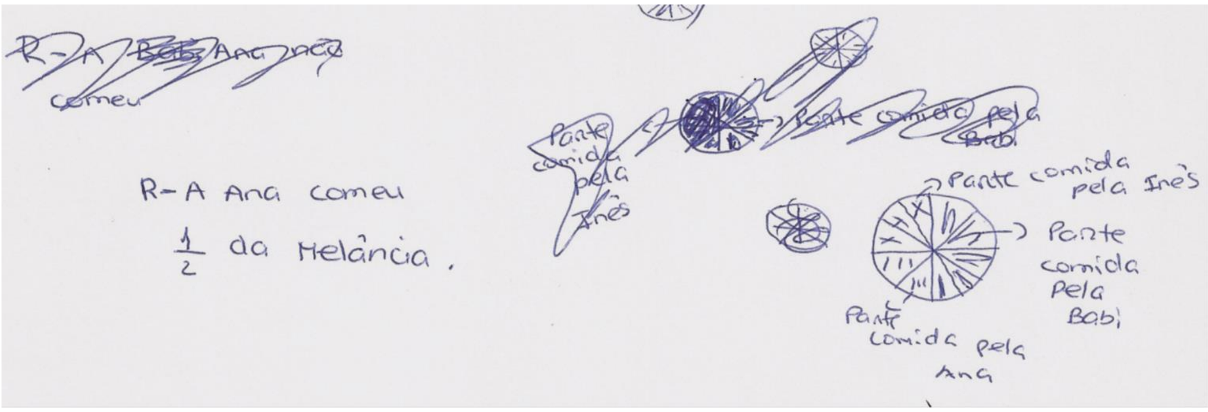


Quanto a este caso (exemplo 6), existe um entendimento do problema, com uma elaboração de uma estratégia, clara e correta, e uma resposta certa.

No que concerne aos alunos do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), muitos dos registos são similares aos anteriores. No entanto, e em qualquer um dos níveis de desempenho que se englobe a resposta produzida, observamos que existe uma maior preocupação, em explicar o raciocínio através de palavras e/ou esquemas. Também fomos surpreendidos pelo facto de alguns optarem por resolver o problema, recorrendo a equações.

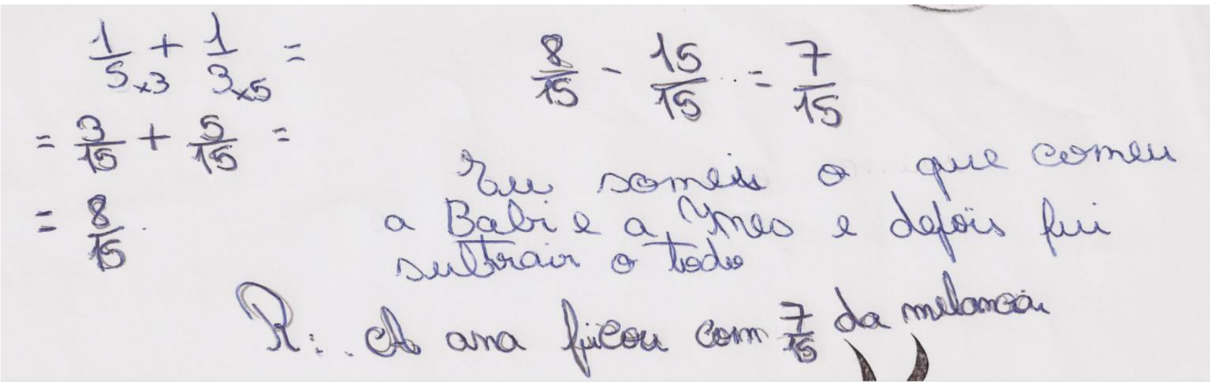
No exemplo 7, é visível a tentativa de esquematizar o problema, sem ter compreendido quanto vale cada uma das frações. No entanto, entende a melancia como um todo.

Exemplo 7



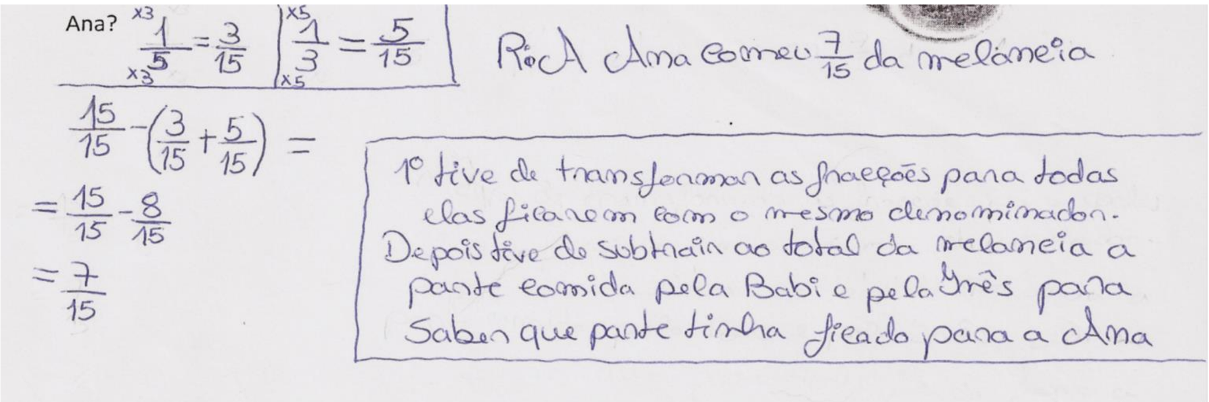
No caso seguinte (exemplo 8), podemos constatar que o aluno retira a melancia inteira, ao que a Babi e a Inês comeram, não só pelo cálculo, mas também pelo que descreve. Por tal, o erro cometido nas operações, com números racionais, provém de uma má concretização do problema, já que retira o todo às parcelas.

Exemplo 8

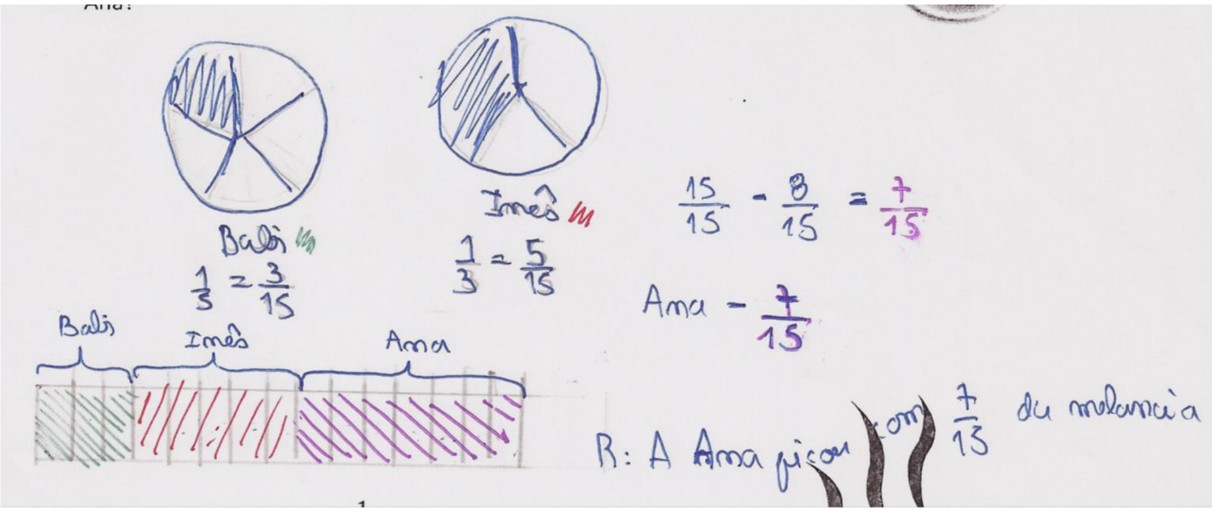


Nos exemplos 9 e 10, os alunos «sabem», «sabem fazer» e «sabem porquê». São capazes de descrever e explicar, através de esquemas e/ou palavras, a estratégia e os procedimentos utilizados, assim como justificar as suas respostas.

Exemplo 9



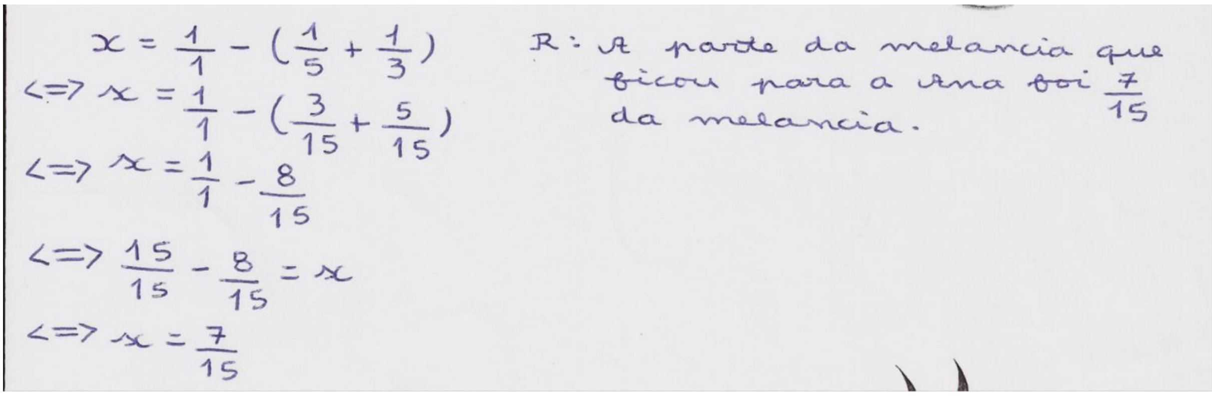
Exemplo 10



Ainda no que diz respeito ao exemplo 10, o registo dá-nos conta da exploração, realizada pelo aluno, a partir do enunciado.

Tal como já havia sido referido, também faremos uma apresentação dos exemplos menos comuns. Neste caso, apresentamos dois exemplos (11 e 12): o primeiro, prima por ter uma estratégia pouco utilizada, e que foi exclusiva dos alunos do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) - as equações como estratégia de resolução; o segundo distingue-se por alguma falta de capacidade de síntese na argumentação, já que o aluno utiliza linguagem matemática menos rigorosa, para justificar as suas ideias, o que nos leva a supor que possa ter sido usada pelo docente, quando lecionou o tópico dos números racionais, com o intuito de esclarecer dúvidas ou explicar um erro comum, utilizando linguagem corrente e que o aluno não soube abstrair-se da mesma (referimo-nos à expressão «batatas a cebolas»).

Exemplo 11



$x = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{1} - \left(\frac{3}{15} + \frac{5}{15}\right)$

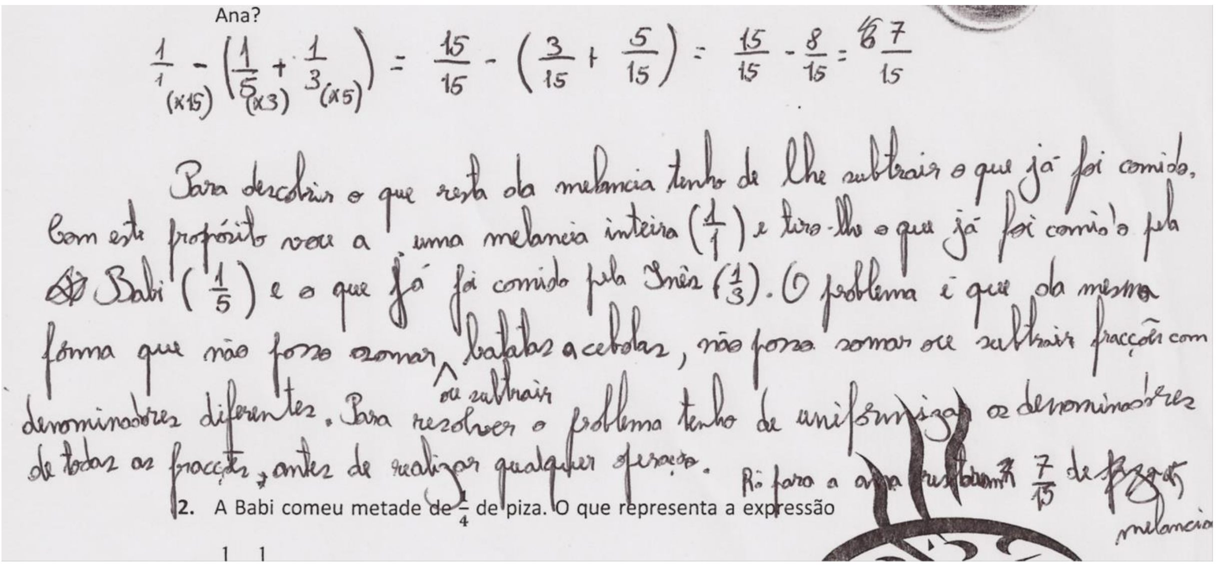
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{1} - \frac{8}{15}$

$\Leftrightarrow \frac{15}{15} - \frac{8}{15} = x$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{15}$

R: A parte da melancia que ficou para a Ana foi $\frac{7}{15}$ da melancia.

Exemplo 12



Ana?

$\frac{1}{1}_{(\times 15)} - \left(\frac{1}{5}_{(\times 3)} + \frac{1}{3}_{(\times 5)}\right) = \frac{15}{15} - \left(\frac{3}{15} + \frac{5}{15}\right) = \frac{15}{15} - \frac{8}{15} = \frac{\cancel{8}\,7}{15}$

Para descobrir o que resta da melancia tenho de lhe subtrair o que já foi comido. Com este propósito vou a uma melancia inteira $\left(\frac{1}{1}\right)$ e tiro-lhe o que já foi comido pela Babi $\left(\frac{1}{5}\right)$ e o que já foi comido pela Inês $\left(\frac{1}{3}\right)$. O problema é que, da mesma forma que não posso somar ou subtrair batatas a cebolas, não posso somar ou subtrair fracções com denominadores diferentes. Para resolver o problema tenho de uniformizar os denominadores de todas as fracções, antes de realizar qualquer operação.

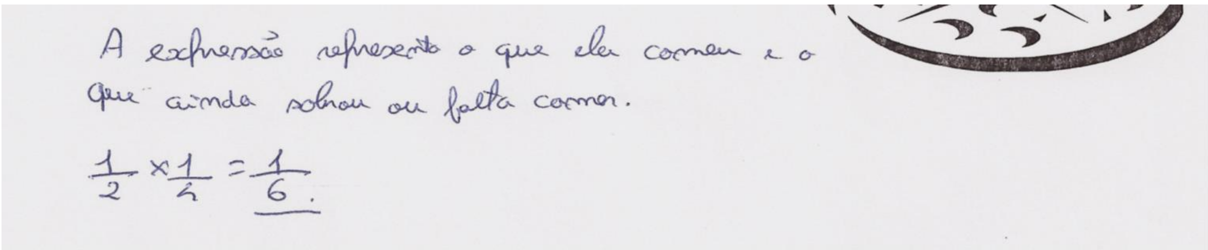
R: Para a Ana sobraram $\frac{7}{15}$ de ~~pizza~~ melancia

2. A Babi comeu metade de $\frac{1}{4}$ de piza. O que representa a expressão

1 1

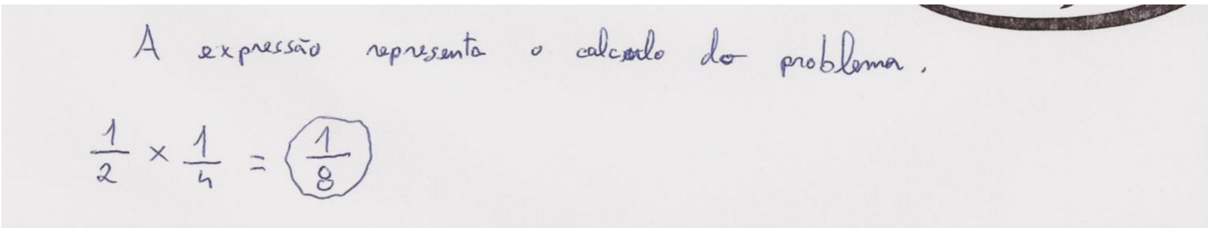
Quanto à segunda questão da tarefa *A comida,* e relativamente aos alunos abrangidos pelo Programa de 1991 (DGEBS, 1991), foi percetível a dificuldade em traduzir de linguagem matemática para corrente. Assim, foram vários os alunos que, para além de não saberem multiplicar frações, manifestaram dificuldades em explicar o que representava a expressão fornecida. Apesar de termos variadíssimos exemplos do que acabamos de referir, optamos por apresentar os seguintes (13, 14 e 15) já que são os que melhor representam uma grande parte desses registos.

Exemplo 13


A exfressão refresento o que ela comeu e o que ainda sobrou ou falta comer.

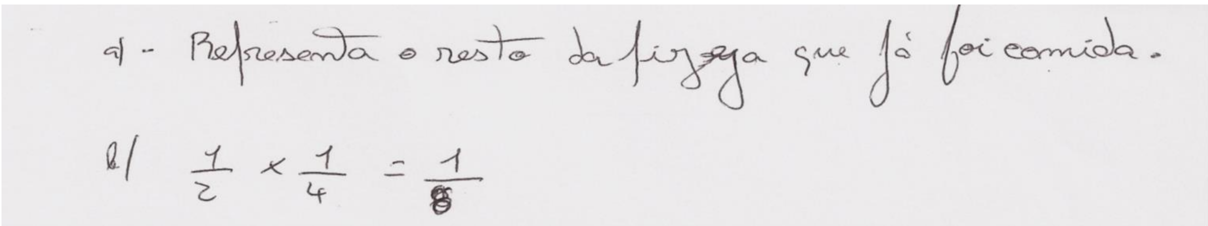
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.

Exemplo 14


A expressão representa o calculo do problema.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

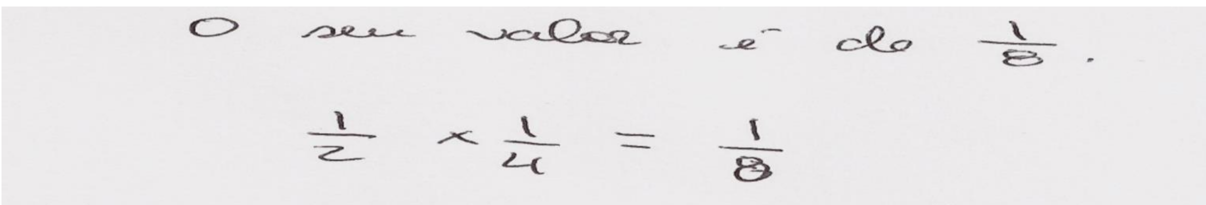
Exemplo 15


a) - Refresenta o resto da fizzga que já foi comida.

b) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Ainda no referente aos alunos do programa de 1991 (DGEBS, 1991), poucos se enquadram no nível A (quadro 20), já que a grande maioria, dos que efetuam os cálculos corretamente, não explica o que representa a expressão, como podemos constatar no exemplo 16.

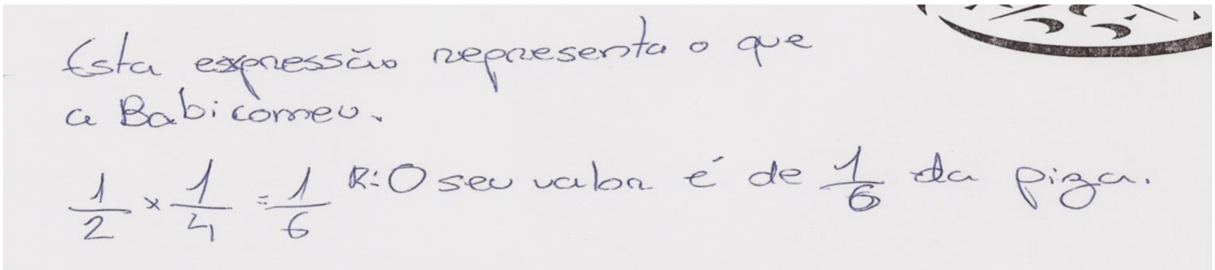
Exemplo 16


O seu valor é de $\frac{1}{8}$.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

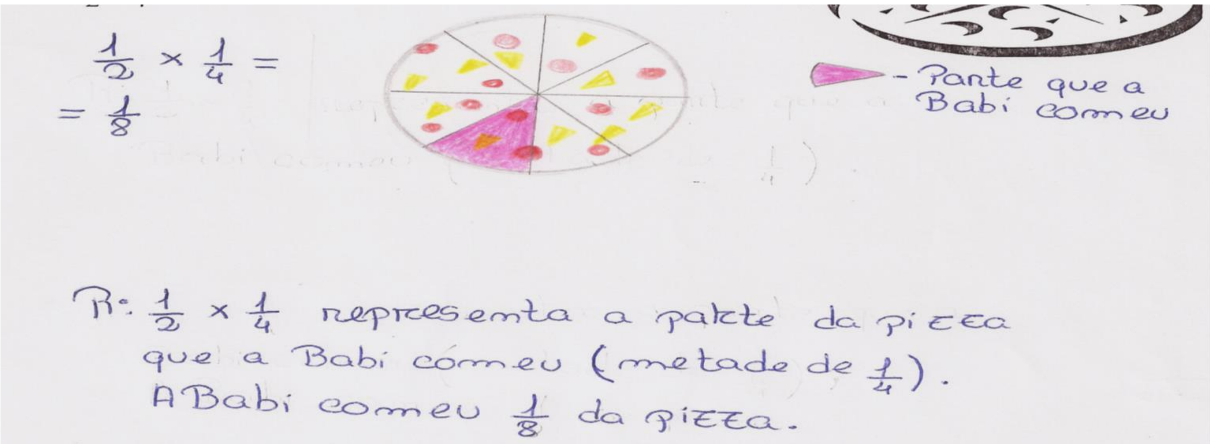
Relativamente aos alunos pertencentes ao PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), e no que concerne aos que cometeram erros na resolução da expressão, parece-nos que têm a noção do que a mesma representa. O exemplo 17 é bem elucidativo, do que acabamos de afirmar:

Exemplo 17

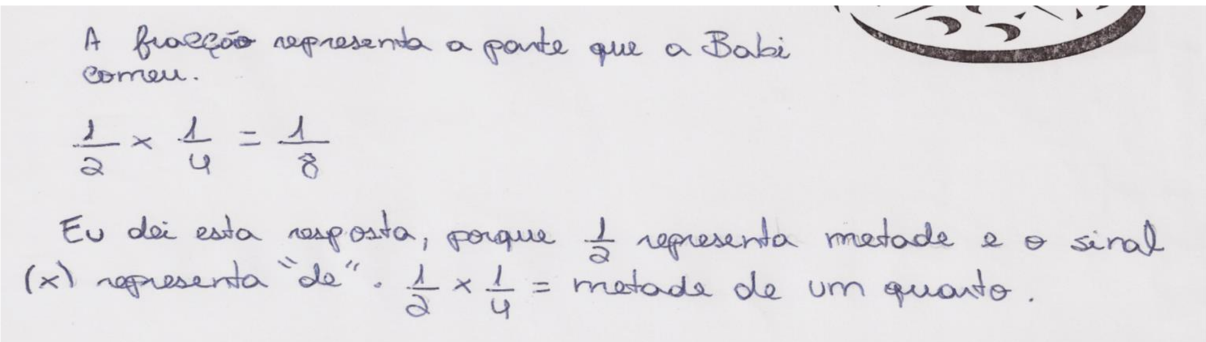


No caso dos alunos que se enquadram no nível A, no quadro dos descritores, uma vez mais, observamos a preocupação em explicar por palavras, e /ou esquemas, o significado da expressão, assim como a estratégia utilizada para o cálculo. Nos exemplos 18, 19, 20 e 21 é notório o anteriormente descrito (o cuidado em explicar a tradução do sinal da multiplicação em linguagem corrente),sobressaindo alguma falta de síntese, principalmente no último exemplo.

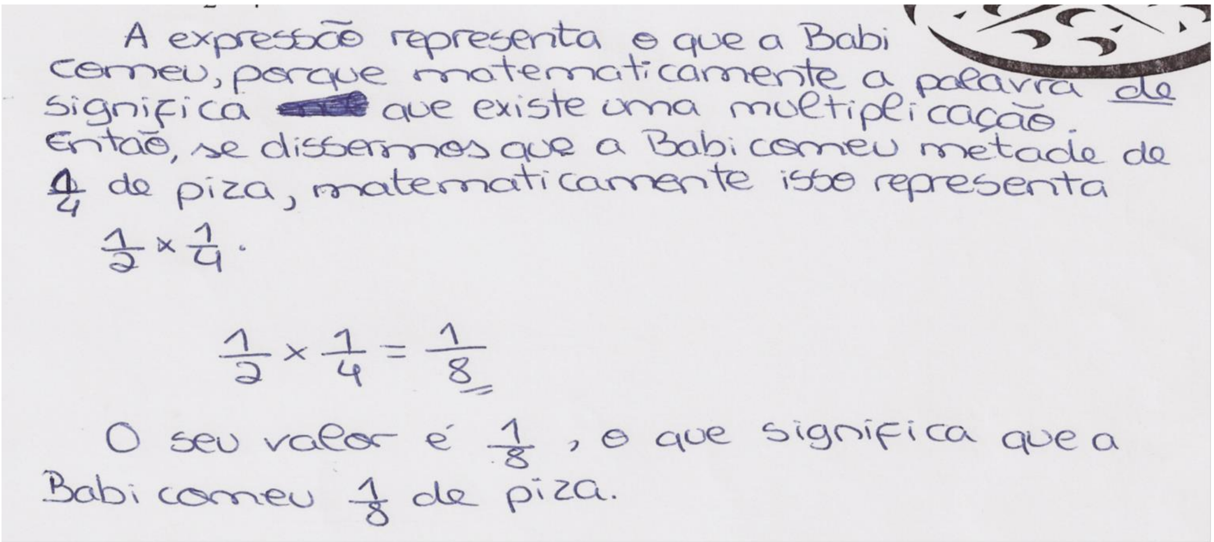
Exemplo 18



Exemplo 19



Exemplo 20

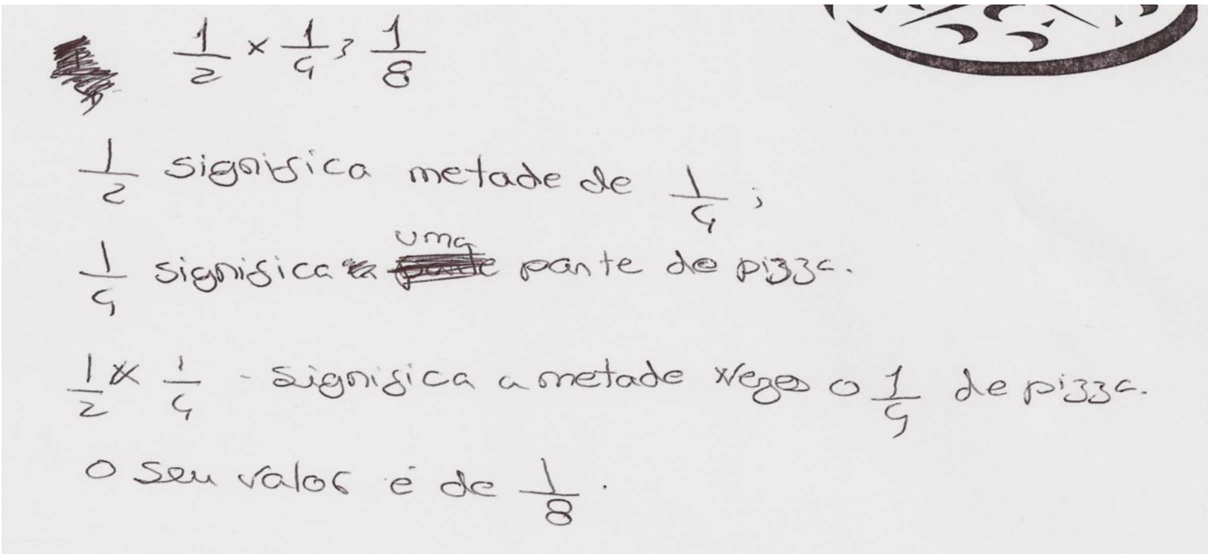


A expressão representa o que a Babi comeu, porque matematicamente a palavra ~~de~~ significa que existe uma multiplicação. Então, se dissermos que a Babi comeu metade de $\frac{1}{4}$ de piza, matematicamente isso representa $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

O seu valor é $\frac{1}{8}$, o que significa que a Babi comeu $\frac{1}{8}$ de piza.

Exemplo 21



$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}$ significa metade de $\frac{1}{4}$;

$\frac{1}{4}$ significa uma parte da pizza.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ - significa a metade vezes o $\frac{1}{4}$ de pizza.

O seu valor é de $\frac{1}{8}$.

Em suma, de acordo com os registos analisados, relativamente às duas questões que constituíam esta tarefa, somos levados a concluir que a comunicação matemática escrita é mais utilizada pelos alunos do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007). A mesma favorece o processo de ensino-aprendizagem, no sentido de ser mais fácil para o docente, compreender o erro dos alunos, os conteúdos não interiorizados e incorretamente consolidados. Somos da opinião de Boavida et al. (2008), quando afirmam que é essencial valorizar a comunicação, para um maior desenvolvimento da aprendizagem. Quanto ao facto de as tarefas proporcionarem uma articulação, entre vários tópicos, notamos que apenas os alunos do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) o fizeram, ao recorrerem às equações de 1º grau a uma incógnita. Apesar dos alunos do

Programa de 1991 (DGEBS, 1991) também já serem capazes de as trabalhar, não o fizeram, o que nos leva a pensar que não terão a mesma propensão para delinearem estratégias de resolução diversificadas.

2. **Tarefa**: Notação científica

O tópico respeitante a esta tarefa era "Números racionais", que se enquadrava no tema "Números e Operações".

Por isso, era objetivo específico que os alunos fossem capazes de "representar e comparar números racionais positivos em notação científica" (Ponte et al., 2007, p. 50).

Como notas metodológicas, o Programa de 2007 (Ponte et al, 2007) indica que, relativamente à representação em notação científica, se deve "privilegiar os exemplos que emergem de contextos científicos, tecnológicos ou da realidade quotidiana", bem como "reconhecer o modo como a calculadora representa um número em notação científica" (Idem, 2007, p. 50).

A tarefa era constituída por duas questões, que obrigavam a que os alunos operassem com números escritos, em notação científica, optando pela operação adequada ao contexto do problema proposto.

A tarefa fornecida aos alunos foi a seguinte:

1. O monumento Padrão dos Descobrimentos tem 50 metros de altura e a distância da Terra à Lua é 4 X 10^5 km. Quantos monumentos como este eram necessários, uns sobre os outros, para chegar de Lisboa à Lua?
2. No couro cabeludo de um ser humano há aproximadamente 120 000 cabelos. Cada cabelo tem cerca de **1 X 10^{-5}** metros de diâmetro. Se fosse possível colocar todos os cabelos lado a lado, encostados uns aos outros, qual seria o total do comprimento obtido?

Figura 21 - Tarefa: Notação científica

Fonte: Adaptado de Neves et al. (2010).

Tal como na tarefa anterior, deparamos-mos com uma quantidade ínfima de respostas em branco, dentro das produções recolhidas.

No entanto, optamos por iniciar a análise desta tarefa, reproduzindo um excerto de uma aplicação da mesma, relativamente à primeira questão com alunos do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), em contexto de sala de aula. De salientar que a questão se encontrava projetada no quadro, o tempo inteiro da discussão, o que evitou que os alunos dispersassem a sua atenção para o documento, que também tinham em papel:

Excerto 1

Prof: "*Muito bem, agora que já lemos, vamos tentar resolver o nosso problema. Quem quer começar?*"

Aluno A: "*Podemos começar por escrever* 4×10^5 *sem a potência de base 10*."

Aluno B: "*Poder podíamos, mas não é prático, pois a calculadora faz os cálculos com as potências*."

Aluno C: "*Professor, não era melhor começar por reduzir tudo à mesma unidade?*"

Prof: "*Porquê?*"

Aluno A: "*Porque temos a distância da Terra à Lua em quilómetros e a altura do edifício está em metros. Ele tem razão. Eu não tinha visto esse pormenor*."

Através deste excerto, é percetível que, após tomarem contacto com os dados fornecidos, os alunos começam por delinear uma estratégia para descodificarem a informação provida. Através da interpretação dos dados, apercebem-se que os valores não são fornecidos na mesma unidade de comprimento.

Excerto 2

Prof: "*Então, se todos concordam, vamos começar por reduzir. Mas o que reduzimos?*"

Aluno A: *"Eu para reduzir a distância da Terra à Lua a metros, tenho de acrescentar 3 zeros. Mas o número está em potência. Por isso, vou…*"

Aluno B: "*Vais aumentar o expoente, ele passa de cinco para oito. Está certo, não está professor?*"

Prof: "*Está. Mas eu quero saber porquê. Quem me explica?*" (entretanto o professor registou, no quadro, $4\times10^5\,km = 4\times10^8\,m$)

Aluno D: " *Um quilómetro são mil metros. Isso nós sabemos! Então, um quilómetro é* 10^3 *metros. Agora não sei explicar como é que de* 10^5*, chegamos a* 10^8*."*

Aluno B: "*Já percebi. Pelas regras das potências, não é, professor?*"

Prof: "*Muito bem. Então vamos continuar. Já percebemos que a primeira coisa que tínhamos a fazer era reduzir para a mesma unidade de medida e também decidimos manter o número escrito em notação científica. Mas ainda não temos o nosso problema resolvido*."

Depois de converterem os valores e trabalharem as potências de base 10 e as regras das potências, o professor faz um ponto de situação da discussão decorrida, tendo o cuidado de alertar os alunos que a resolução não estava concluída. Também não forneceu qualquer indicação que lhes permitisse adiantar a resposta final.

Excerto 3

Aluno A: "*Se eu quero saber quantos monumentos cabem, uns em cima dos outros, tenho de multiplicar a distância pela altura dos monumentos*."

Aluno D: "*Multiplicar? Multiplicar não, se não ainda vou ter um valor maior e nos queremos é saber quantos cabem, que parte*."

Aluno B: "*Percebi. Temos de dividir a distância por muitos prédios*."

Prof: " *Não são prédios, são monumentos. Então vamos escrever o que estão a dizer*."

Aluno A: "*O professor tem de pôr* $4\times10^{8}\,m$ *a dividir por* $50\,m$*. É para dividir a parte grande por muitos prédios, quero dizer, monumentos. Para ver quantos encaixavam. Tem lógica*".

Neste excerto, podemos constatar que os alunos optam pela operação de resolução mediante a estratégia já estabelecida. Apesar de, em primeiro lugar, ter sido escolhida a operação errada, após correção da mesma, o aluno compreende o porquê da mudança.

Excerto 4

(enquanto o professor regista no quadro $\frac{4\times10^{8}}{50}$, os alunos recorrem à calculadora)

Aluno A: "*Dá oito milhões! Nem quero imaginar que número dá se em vez de dividirmos, multiplicarmos!"*

Aluno B: "*Na minha máquina, quando multipliquei, deu* 2^{10}*!*"

Prof: "*O que significa?*"

Aluno B: "*Quer dizer* 2×10^{10}*. Quer dizer, o dois seguido de dez zeros!*"

Aluna A: "*Esse sim é um número enorme!*"

Prof: " *Vamos finalizar o nosso problema. O que significa então 8 000 000?*"

Aluno D: "*Quer dizer que se eu puser oito milhões de monumentos empilhados, a partir da Terra, chego à Lua*."

Através da leitura deste excerto, vemos como os alunos investigam o resultado errado que obteriam se não tivessem a resolução do problema correta e interpretam o valor apresentado pela máquina, compreendendo o seu valor. Por outro lado, analisam o resultado correto, em função do contexto do problema.

Excerto 5

Prof: "*Muito bem. Só falta explicarem uma coisa. Quando o aluno A disse que ia multiplicar, vocês disseram que não, que tinham de dividir. Por palavras vossas, o que significava essa multiplicação?*"

Aluno B: " *Eram muitos.*"

Prof: "*Muitos quê?*"

Aluno C: "*Muitas distâncias, era a distância entre a Terra e a Lua muitas vezes*."

Prof: "*Sendo mais exato…*"

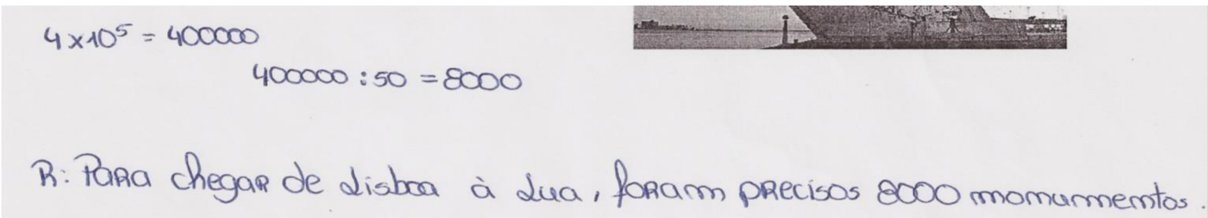
Aluno C: "*Era a distância da Terra à Lua cinquenta vezes.*"

Aluna A: "*Por isso, é que dava um número tão grande. Professor, eu sozinho não tinha conseguido fazer*."

Da transcrição anteriormente apresentada, somos levados a pensar que, pelo facto de ter sido discutido em conjunto, os alunos ficaram alertados para pormenores, como a questão das unidades. Assim, é visível uma maior interação aluno-aluno, em detrimento de aluno-professor. Por procurarem explicar e justificar os passos, as ideias e os resultados, efetuaram uma análise mais exaustiva da questão e exploraram outros resultados, já que as explicações/deduções/conclusões foram realizadas pelos alunos. No entanto, não podemos deixar de notar a necessidade que continuam a ter da confirmação do pensamento e/ou resultados, junto do professor. Quanto à exploração da tarefa em si, houve um benefício, através da recorrência à comunicação oral e da discussão coletiva de ideias matemáticas. Por esse motivo, somos da opinião que a discussão alargada, expondo coletivamente as ideias, conforme é sugerido pelo PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), é um argumento forte, para um melhor pensamento matemático e respetiva consolidação de ideias/conceitos.

No que concerne aos registos em suporte de papel, a baixa representatividade de respostas, completamente corretas, sugere-nos que os alunos falharam na leitura do problema ao não atenderem aos dados, assim como ao não criticaram os resultados encontrados. Ao contrário da tarefa anterior, não foi visível a diferença na resolução da primeira questão, entre os alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991) e do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007). No entanto, os alunos abrangidos pelo PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) são os que mais explicações fornecem, na resposta final. Desta forma, os exemplos que apresentaremos enquadravam-se nos níveis B ou C dos descritores do quadro 20.

Exemplo 1

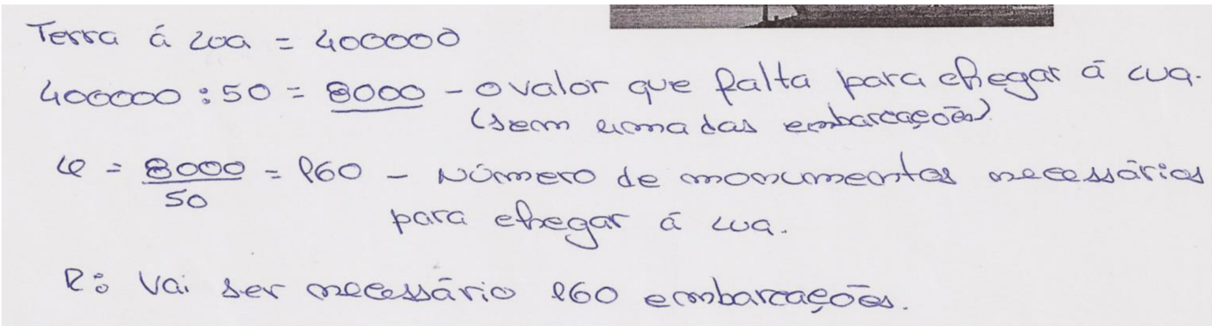

$4 \times 10^5 = 400000$

$400000 : 50 = 8000$

R: Para chegar de Lisboa à Lua, foram precisos 8000 monumentos.

No exemplo 1, é percetível que o erro cometido se deve ao facto de não trabalharem na mesma unidade de comprimento, isto é, não reduzem metros a quilómetros ou vice-versa. Quando foram recolhidas as tarefas junto dos professores aplicadores, os mesmos comentaram que este é um dos erros mais frequentes, independentemente dos docentes chamarem à atenção para os dados dos problemas.

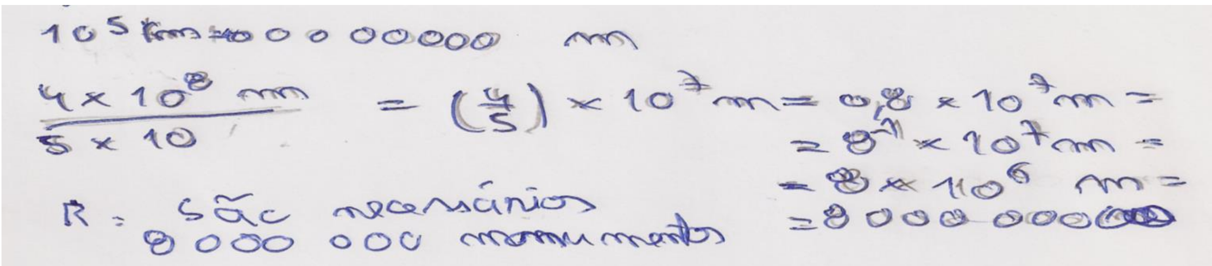
Exemplo 2



No exemplo 2, e uma vez mais, não existe conversão de unidades. Parece-nos que o aluno entende que terá de efetuar uma divisão, de acordo com o contexto do problema. No entanto, e pelo facto de efetuar duas vezes a divisão pelo mesmo valor (cinquenta), somos levados a pensar que não entenderá muito bem o significado desse mesmo valor. Julgamos também que não tem muita noção da realidade, pois encontra, como resultado final, cento e sessenta embarcações e não critica o valor, tomando-o como possível.

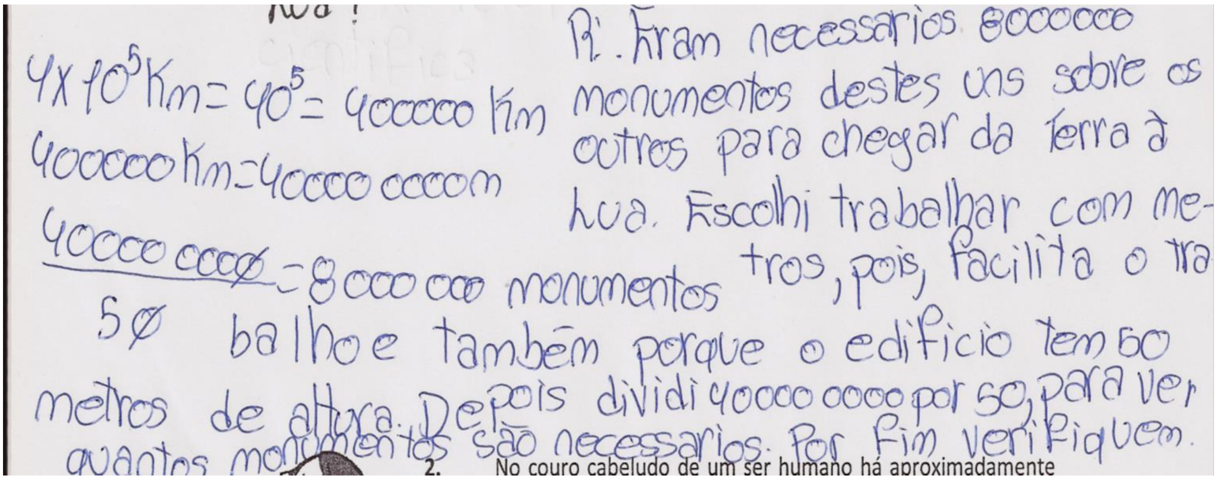
Os exemplos 3 e 4 são produções de alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991) e do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), respetivamente. Graficamente, são os exemplos mais representativos das produções recolhidas. Por isso, apresentamos duas, onde é visível uma forma diferente de esquematização da resolução da questão.

Exemplo 3



(Nota: no exemplo 3 quando o aluno escreve 8^{-1} não significa $\frac{1}{8}$. Na máquina 0,8 aparece com a forma 8^{-1} e quer dizer 8×10^{-1})

Exemplo 4



4×10^5 Km = 40^5 = 400000 Km

400000 Km = 40000 0000 m

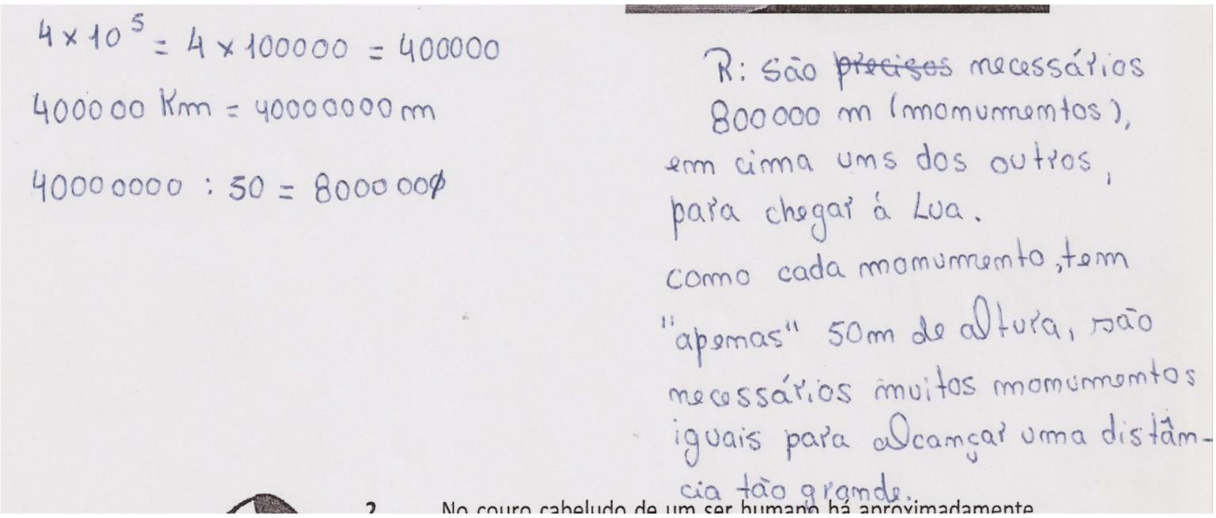
$\frac{40000\ 000\cancel{0}}{5\cancel{0}}$ = 8000 000 monumentos

R: Eram necessarios 8000000 monumentos destes uns sobre os outros para chegar da Terra à Lua. Escolhi trabalhar com metros, pois, facilita o trabalho e também porque o edificio tem 50 metros de altura. Depois dividi 40000 0000 por 50, para ver quantos monumentos são necessarios. Por fim verifiquem.

2. No couro cabeludo de um ser humano há aproximadamente

Tal como já referimos, os alunos que se encontram dentro do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) são os que mais procuram explicar o seu raciocínio, os seus cálculos. Os exemplos 5 e 6 constituem mais um exemplo das diferenças entre os alunos do programa de 2007 (Ponte et al., 2007) e do programa de 1991 (DGEBS, 1991).

Exemplo 5



$4\times10^5 = 4\times100000 = 400000$

400000 Km = 400000000 m

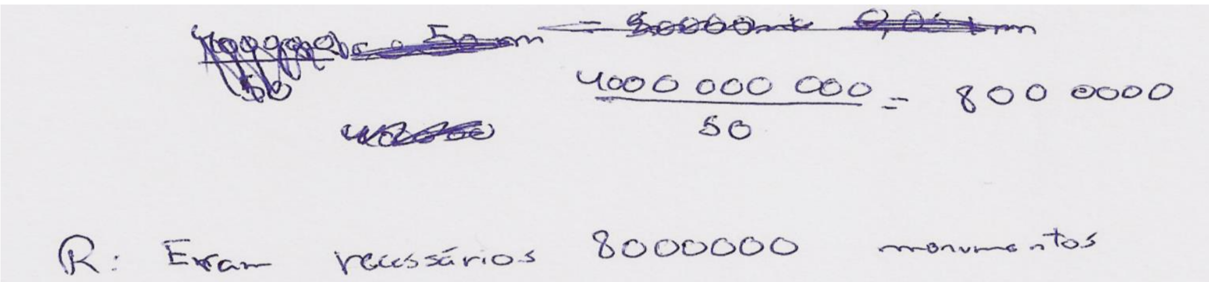
4000 0000 : 50 = 8000 00$\cancel{0}$

R: São ~~precisos~~ necessários 800000 m (monumentos), em cima uns dos outros, para chegar à Lua.

Como cada monumento, tem "apenas" 50m de altura, são necessários muitos monumentos iguais para alcançar uma distância tão grande.

2. No couro cabeludo de um ser humano há aproximadamente

Exemplo 6



$\frac{4000\ 000\ 000}{50}$ = 800 0000

R: Eram necessários 8000000 monumentos

No último exemplo apresentado, podemos constatar que não ocorrem registos de cálculos auxiliares, nem as reduções à mesma unidade de comprimento são apresentadas. Tal sucede com uma quantidade significativa de registos de alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991), o que denota alguma falta de hábito em demonstrar o caminho percorrido na resolução de um problema. Ainda no que concerne ao exemplo 5, observamos a capacidade de entendimento do aluno, pela resposta dada, quando refere que «são necessários muitos monumentos para alcançar uma distância tão grande».

Relativamente à segunda questão desta tarefa, fomos confrontadas com um maior, mas não significativo, número de respostas em branco. Mas, por outro lado, o número de respostas corretas e com uma estratégia de resolução adequada foi igualmente mais elevada. Em suma, esta tarefa apresentou dois tipos de produções predominantes: sem resposta ou completamente correto, sendo, esta última, em número muito mais alargado.

No âmbito dos registos que se enquadravam nos descritores A, B ou C, (quadro 20),os alunos abarcados pelo Programa de 1991 (DGEBS, 1991) predominam resoluções semelhantes aos exemplos que escolhemos, 7, 8 e 9.

Exemplo 7

1-05 x 120000 = 1.2 m

R: no total do comprimento dos 120000 cabelos seria 1,2 m.

Exemplo 8

$1 \times 10^{-5} = 0,00001$

$0,00001 \times 120000 = 1,2$ metros

R: Se alinhássemos os cabelos todos, o seu comprimento era de 1,2 metros

Exemplo 9

$\cancel{1 \times 10^{-5} = 1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^5 = 1 \times \frac{5}{50} = \frac{5}{50} = 0,1}$

$\cancel{120000 \times 0,1 = 12000}$

$1 \times 10^{-5} = 1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^5 = 1 \times \frac{1}{100000} = \frac{1}{100000} = 0,00001$

$120000 \times 0,00001 = 1,2m$

R: Seria de 1,2m.

Como já foi mencionado, não nos parece que haja, por parte destes alunos, uma preocupação em comunicar matematicamente, através da expressão escrita ou do raciocínio inerente ao cálculo efetuado. Apenas têm o cuidado de dar a resposta final por extenso.

Sintetizando, através da análise realizada aos registos visualizados, bem como ao questionamento inquiridor, exposto pelo relato, entendemos que, em relação às duas questões constantes desta tarefa, os alunos que beneficiam do PMEB (Ponte et al., 2007) se encontram mais predispostos para explicar o raciocínio envolvido na resolução de um problema. Assim, e tal como Carvalho e Silvestre (2010) referem, observamos que os alunos fizeram progressos em termos escritos. Passaram da escrita de pequenas frases e cálculos mínimos para explicações mais elaboradas e cálculos auxiliares, entendidos como importantes, importância essa verificada pela existência de registos. Mas, apesar de estes alunos argumentarem matematicamente, recorrendo a esquemas e dando algumas explicações dos seus raciocínios, é notório que ainda há um longo caminho a percorrer, como se pode constatar pelas ausências de justificação, dado que a maioria não explica por que motivo multiplicam.

3. **Tarefa**: Aluguer de automóveis

Enquadra-se no tema “Álgebra” e diz respeito ao tópico “Funções”. A opção por esta tarefa prendeu-se com uma das indicações metodológicas do PMEB (Ponte et al., 2007, p. 56) e que refere que “as tarefas a propor aos alunos devem privilegiar a resolução de problemas e a modelação de situações”. Por outro lado, o relatório dos exames nacionais de 2010 (GAVE, 2011, p. 12) tem, como proposta de intervenção didática, a necessidade de “continuar a propor problemas que exijam interpretação e definição de uma estratégia”, já que o tópico das funções continua a ser um dos que apresenta maiores índices de insucesso. A acrescentar aos motivos descritos, tivemos como objetivo específico, relativamente às Capacidades Transversais do PMEB (Idem, 2007, p. 63), que os alunos identificassem “os dados, as condições e o objetivo do problema”, bem como concebessem e colocassem em prática estratégias de resolução.

A tarefa foi proposta aos alunos com a visualização que se apresenta.

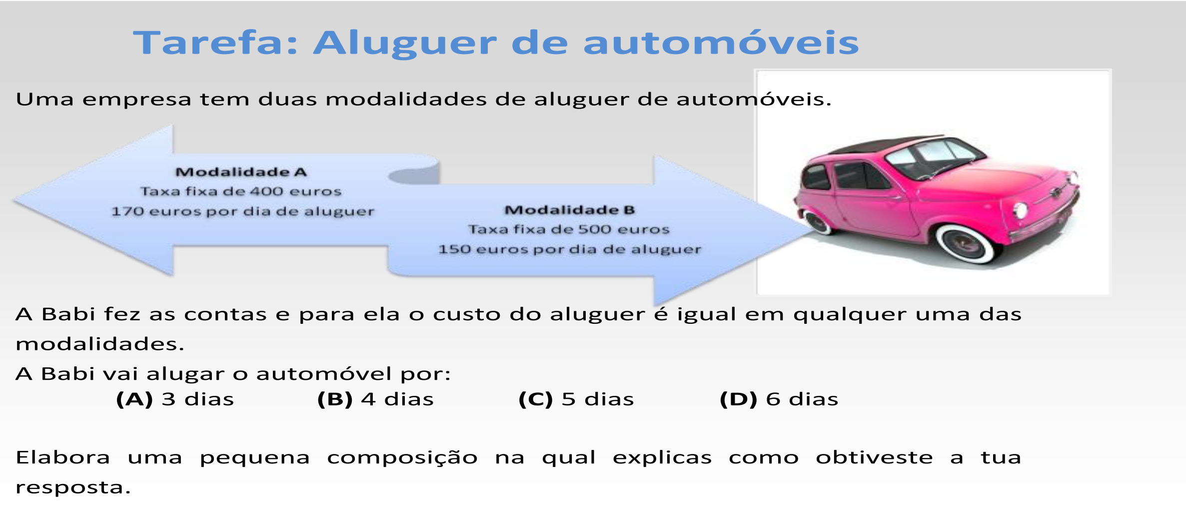
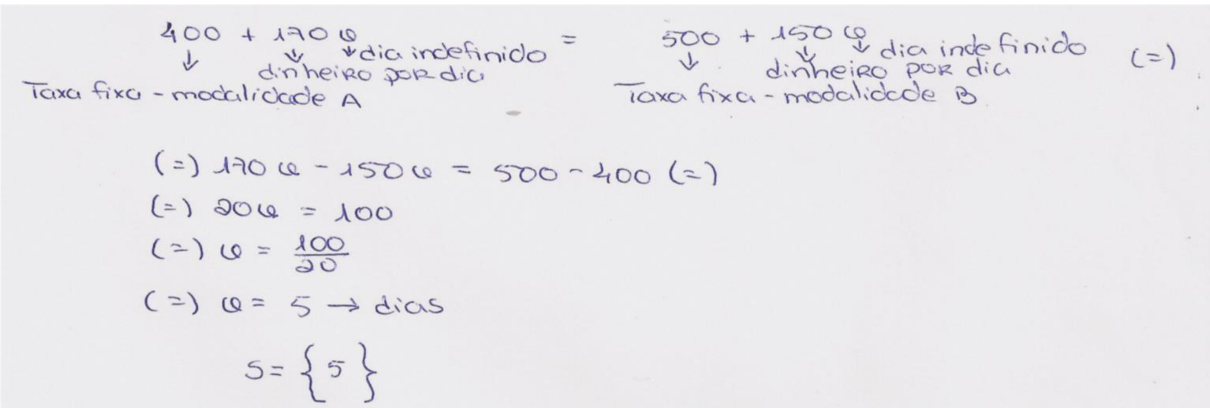


Figura 22 - Tarefa: Aluguer de automóveis
Fonte: Adaptado de Neves et al. (2010).

Talvez por se tratar de um problema do quotidiano, independentemente do contexto referido (o aluguer de automóveis), trata-se de uma das tarefas com mais resultados escritos que se enquadram no nível A, dos descritores dos níveis de desempenho. Assim, os alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991) e do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) apresentam resoluções corretas e respetivas estratégias bem delineadas. No entanto, apenas os alunos do PMEB (Ponte et al., 2007) utilizam equações, como forma de resolução. Pensamos que tal se deva à nova reestruturação do programa, já que a mesma apresenta uma maior proximidade temporal, na lecionação destes dois tópicos – Equações e Funções.

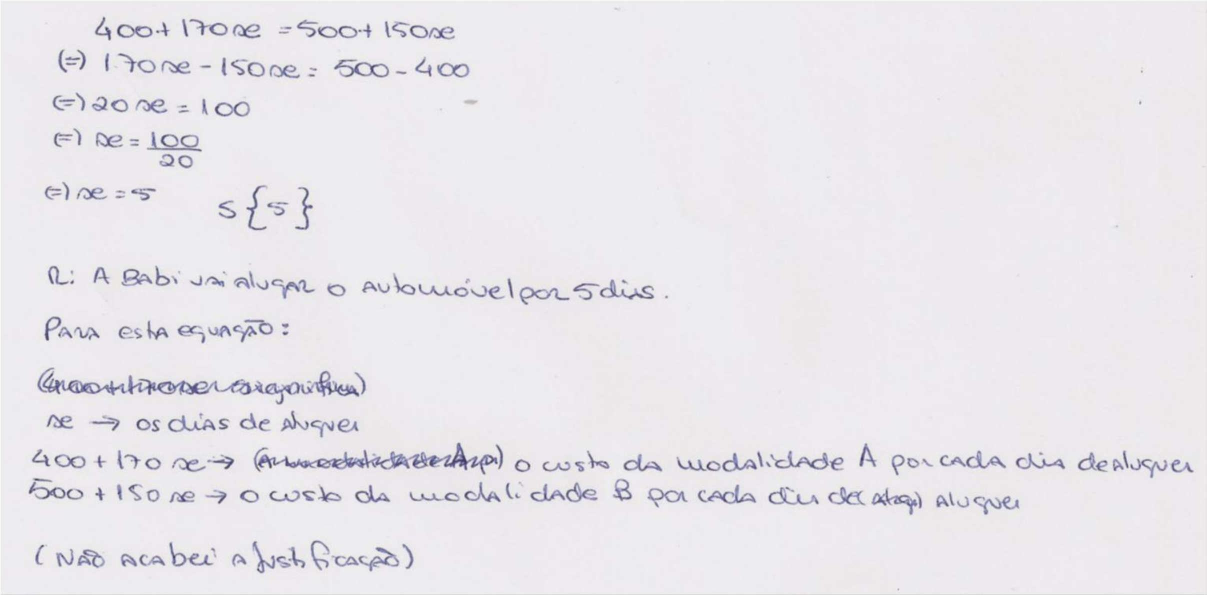
Nos primeiros quatro exemplos que apresentamos a seguir, e que dizem respeito a alunos do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), a estratégia de resolução é a mesma. Contudo, diferem um pouco na forma como identificam os dados, traduzem o significado da incógnita ou elaboram a resposta.

Exemplo 1



Neste exemplo (exemplo 1), o aluno optou por indicar, na própria equação, o significado de cada um dos termos. Encontrou a solução correta, contudo não redigiu nenhuma composição sobre o procedimento adotado.

Exemplo 2



$400+170x=500+150x$
$\Leftrightarrow 170x-150x=500-400$
$\Leftrightarrow 20x=100$
$\Leftrightarrow x=\frac{100}{20}$
$\Leftrightarrow x=5$ $\quad S\{5\}$

R: A Babi vai alugar o automóvel por 5 dias.

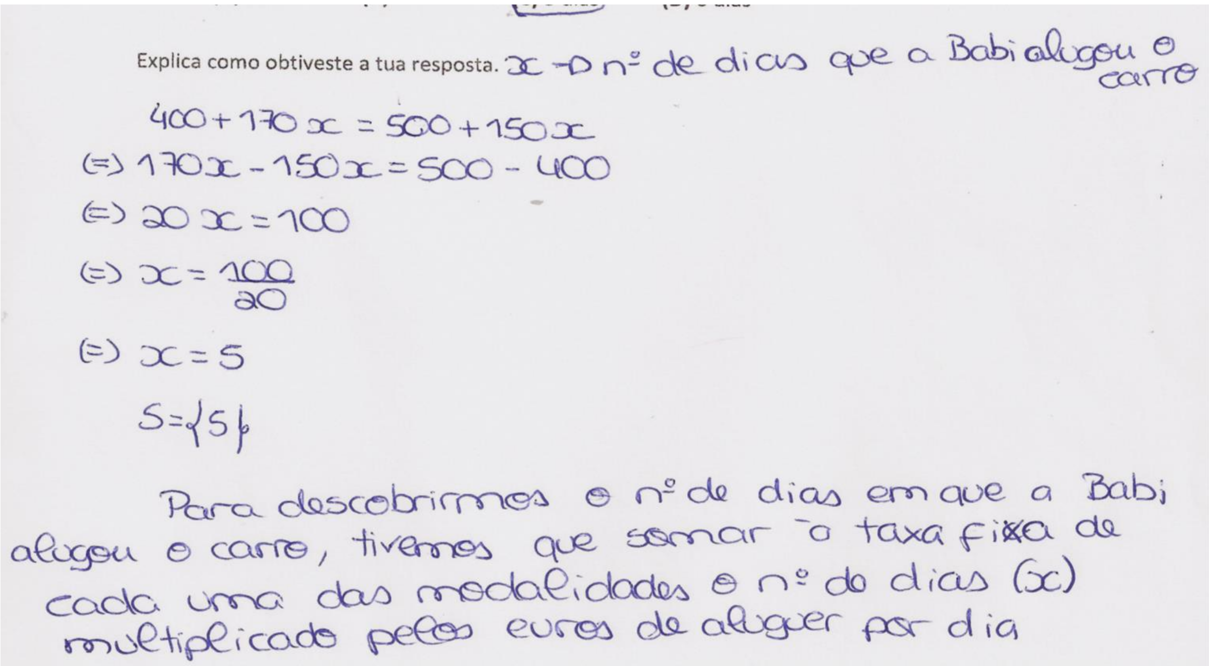
Para esta equação:

x → os dias de aluguer
400 + 170 x → o custo da modalidade A por cada dia de aluguer
500 + 150 x → o custo da modalidade B por cada dia de aluguer

(Não acabei a justificação)

Aqui (exemplo 2) é visível que o aluno não completou o solicitado, pois escreve que não finalizou a justificação. Comparativamente ao caso anterior, no exemplo 2, o aluno explicita o que falta, enquanto no exemplo 1 fica por entender se esqueceu a elaboração da pequena composição, ou se, no seu entender, os cálculos eram suficientes e justificativos, não necessitando, por isso, de redação escrita explanatória.

Exemplo 3



Explica como obtiveste a tua resposta. x → nº de dias que a Babi alugou o carro

$400+170x=500+150x$
$\Leftrightarrow 170x-150x=500-400$
$\Leftrightarrow 20x=100$
$\Leftrightarrow x=\frac{100}{20}$
$\Leftrightarrow x=5$
$S=\{5\}$

Para descobrimos o nº de dias em que a Babi alugou o carro, tivemos que somar o taxa fixa de cada uma das modalidades o nº do dias (x) multiplicado pelos euros de aluguer por dia

No exemplo 3, para além da identificação da incógnita, o aluno tem o cuidado de elaborar uma pequena composição, na qual explica cada um dos membros da equação. No entanto, ficou por dizer o porquê de optar por este processo de resolução.

Exemplo 4

Explica como obtiveste a tua resposta.

$x \rightarrow$ dias de aluguer

$$400 + 170x = 500 + 150x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 170x - 150x = 500 - 400$$
$$\Leftrightarrow 20x = 100$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{100}{20}$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$

Eu descobri este resultado, porque sei que a taxa fixa paga-se quando se aluga um carro, e depois vai-se pagar por dia, uma determinada quantia,

O interessante da resposta do exemplo 4 é o facto de o aluno fazer referência ao seu conhecimento do dia-a-dia, para escrever a equação. Curiosamente, o aluno entendeu que o problema corresponde a uma situação próxima da vida quotidiana, não deixando de ser um problema matemático propriamente dito.

Os exemplos 5 e 6 são os que mostram a maior representatividade de respostas dos alunos, de qualquer um dos programas. A organização de dados é semelhante e a estratégia utilizada também, podendo os dados surgirem organizados com aspeto de tabela. Vários alunos indicam que a sua metodologia foi de tentativa e erro. É ainda de salientar que os alunos souberam utilizar toda a informação corretamente.

Exemplo 5

Explica como obtiveste a tua resposta.

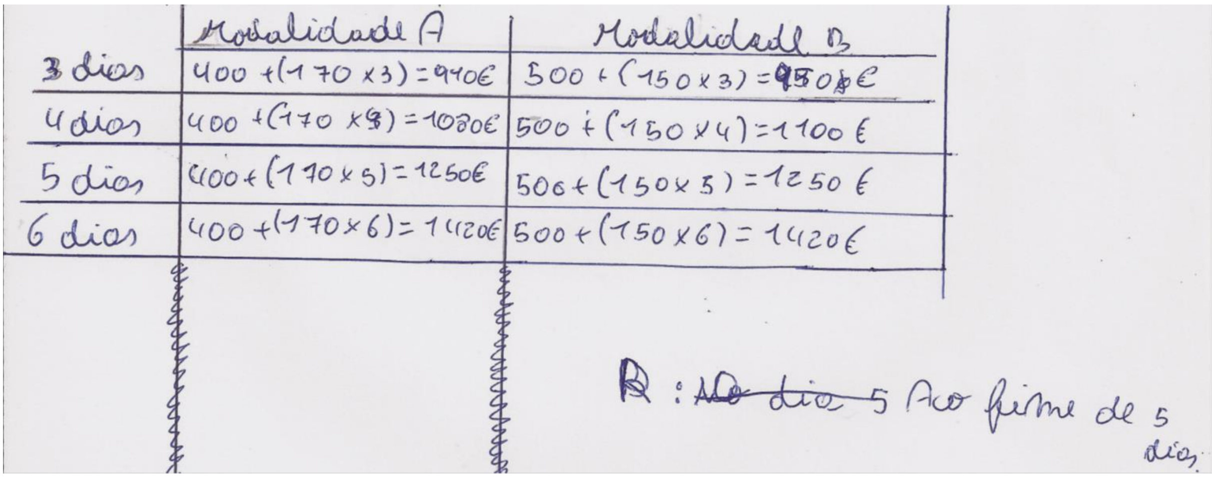
A) $400 + 170 \times 3 = 400 + 510 = 910$ €
$500 + 150 \times 3 = 500 + 450 = 950$ €

B) $400 + 170 \times 4 = 400 + 680 = 1080$ €
$500 + 150 \times 4 = 500 + 600 = 1100$ €

C) $400 + 170 \times 5 = 400 + 850 = 1250$ €
$500 + 150 \times 5 = 500 + 750 = 1250$ €

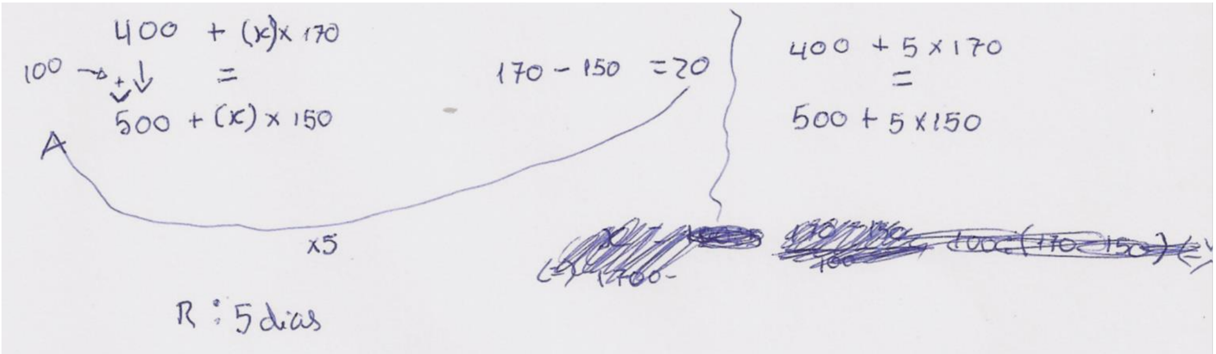
Resolvi este problema por tentativas. Para isto, calculei quanto é que a Babi ia pagar por cada hipótese, até achar o número comum a ambas as modalidades.

Exemplo 6

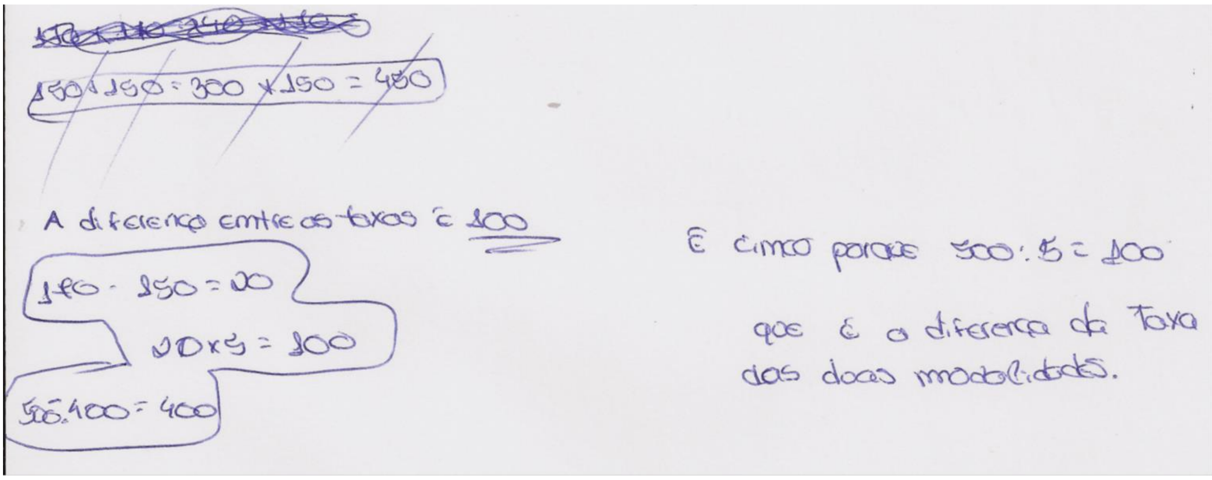


Os exemplos 7 e 8 são exemplares únicos e pertencentes a alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991). Visualmente são diferentes, no entanto o raciocínio foi o mesmo: calcularam as diferenças entre as duas modalidades de forma a encontrarem o dia em que o aluguer tem o mesmo valor.

Exemplo 7

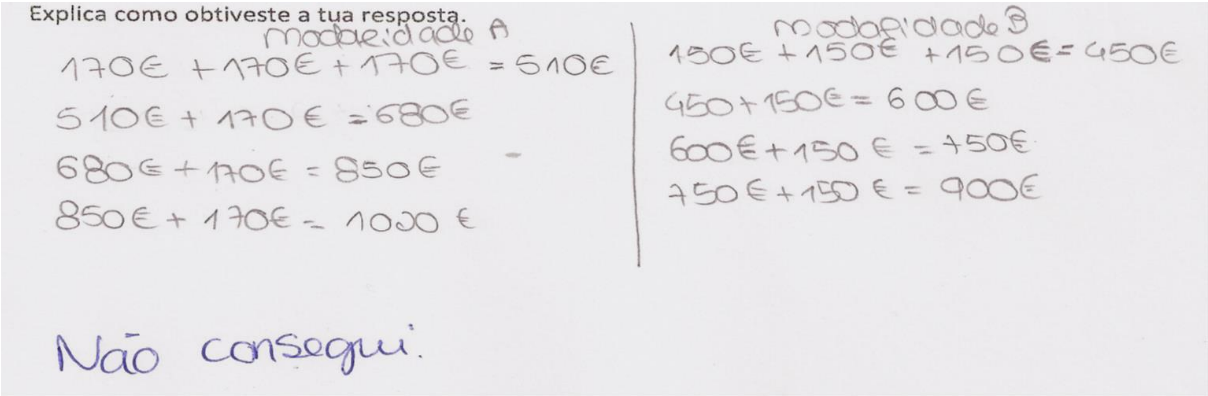


Exemplo 8



Dentro dos registos que se enquadram no nível C, dos descritores dos níveis de desempenho, o que traduz o mais frequente é o exemplo 9. Nele, os alunos entendem o cálculo diário do aluguer a pagar, por modalidade, mas não compreendem o significado da taxa fixa, em nenhuma das modalidades. Tratou-se de um erro comum aos alunos de ambos os programas.

Exemplo 9


Explica como obtiveste a tua resposta.

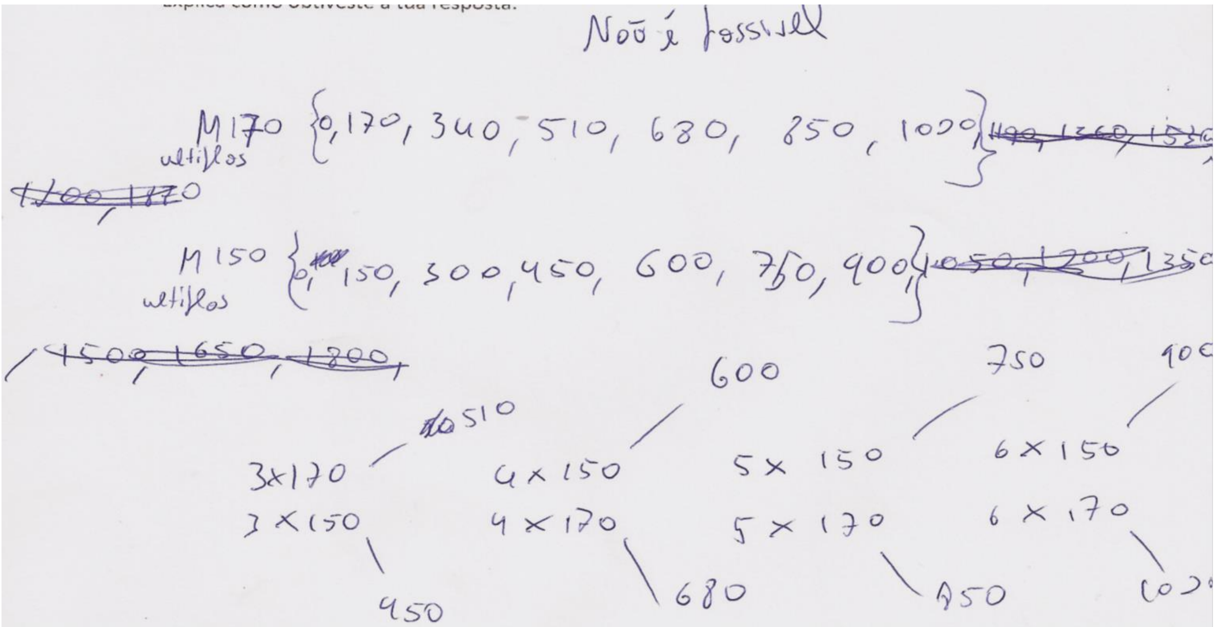
modalidade A
170€ + 170€ + 170€ = 510€
510€ + 170€ = 680€
680€ + 170€ = 850€
850€ + 170€ = 1020 €

modalidade B
150€ + 150€ + 150€ = 450€
450 + 150€ = 600 €
600€ + 150 € = 750€
750 € + 150 € = 900€

Não consegui.

Tal como no registo anterior (exemplo 9), o exemplo 10 é também um caso onde o aluno não entra com a taxa fixa para a resolução da questão. A originalidade deste exemplo é a recorrência aos múltiplos.

Exemplo 10


Noõ é possível

M170 ultiplos {0, 170, 340, 510, 680, 850, 1020, ~~1190, 1360, 1530~~ ~~1700, 1870~~}

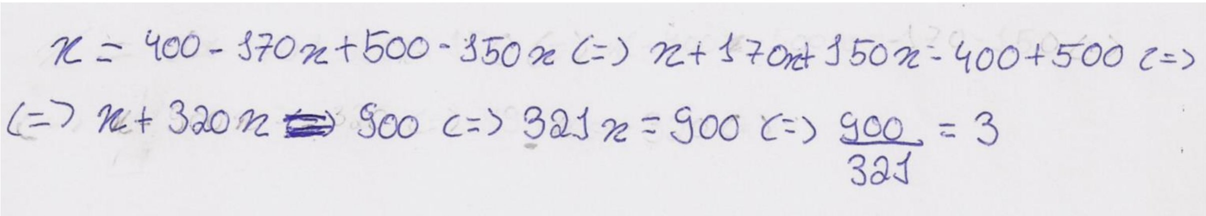
M150 ultiplos {0, 150, 300, 450, 600, 750, 900, ~~1050, 1200~~, 1350 ~~1500, 1650, 1800~~}

3×170 — 510
3×150 — 450
4×150 — 600
4×170 — 680
5×150 — 750
5×170 — 850
6×150 — 900
6×170 — 1020

No exemplo seguinte (exemplo 11), e que também é único, o aluno opta por tentar traduzir o problema através de uma equação. Neste sentido, é entendível que consegue traduzir cada uma das modalidades (modalidade A $400-170x$; modalidade B

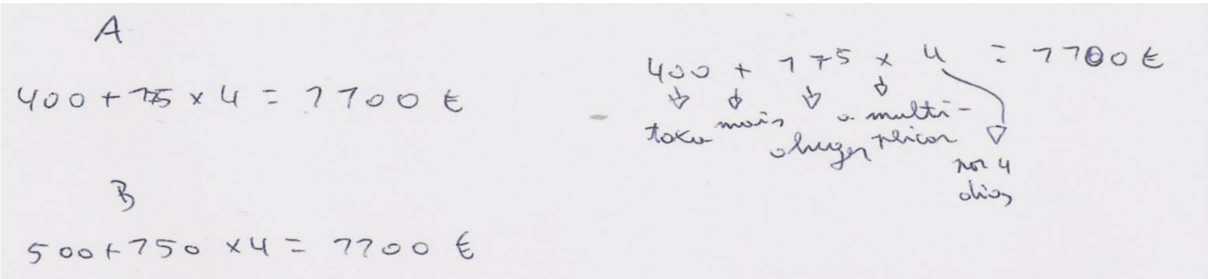
$500-150x$), mas não compreende que o aluguer por dia acresce ao custo diário relativo ao automóvel, já que subtrai esse valor à taxa fixa. Por outro lado, ficamos sem perceber se o aluno sabe o que a incógnita realmente significa, pois não explica a sua significação e utiliza-a como um dos membros da equação.

Exemplo 11



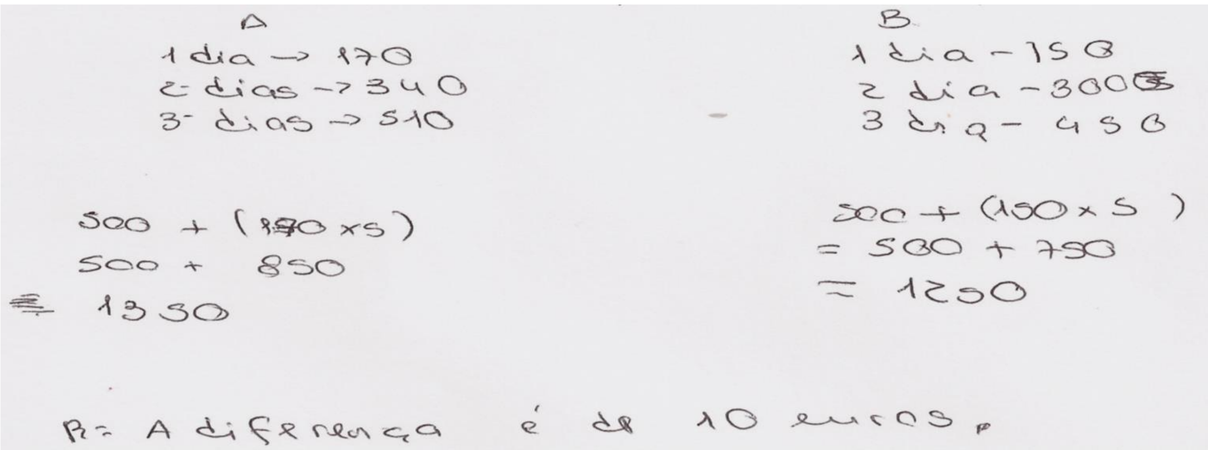
No que concerne aos exemplos 12 e 13, podemos constatar um dos aspetos mais apontados pelos docentes, de uma forma geral, para a não conclusão do pretendido nos problemas: a falta de atenção no tratamento dos dados.

Exemplo 12



Assim, o valor de cento e setenta euros por dia passa para cento e setenta e cinco euros. Por isso é que resulta no valor de quatro dias. Numa questão de escolha múltipla, a falta de atenção aos dados fornecidos teria um custo alto, na cotação final de um teste, já que a opção encontrada, e que está errada, faz parte da lista de opções das respostas da questão.

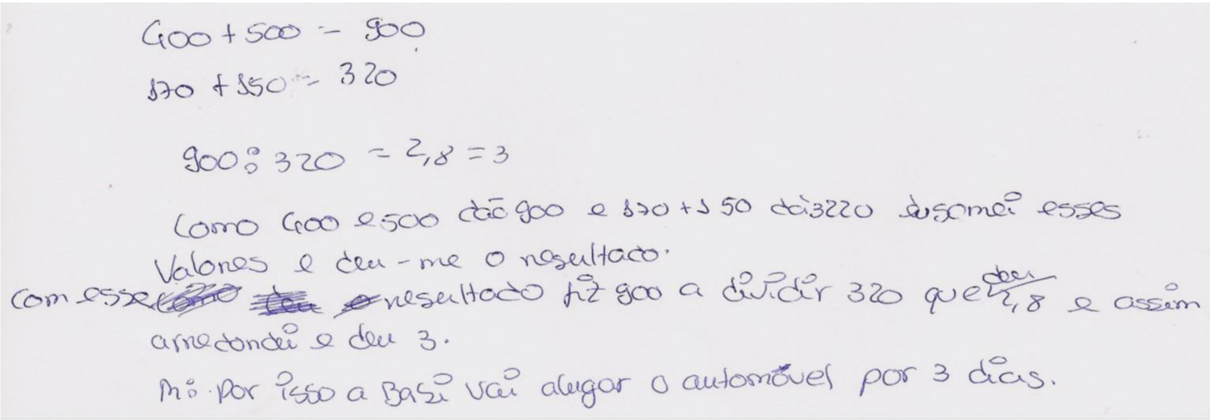
Exemplo 13



Neste caso, o erro cometido relaciona-se com a taxa fixa, pela utilização do mesmo valor para as duas modalidades. Apesar de obter resultados diferentes, indica que existe uma diferença nos valores encontrados. Uma vez mais, o erro pode ser desastroso, pelo simples facto de, em questões de resposta aberta, a perda de cotação ser mínima, relativamente à mesma pergunta, apresentada sob a forma de escolha múltipla. A resposta final também está errada: de acordo com os cálculos efetuados pelo aluno a diferença seria cem euros.

Tal como nas tarefas anteriores e nos exemplos já apresentados, para além de mostrarmos o que existe de semelhante, vamos reportar um exemplo onde é perfeitamente visível que o aluno não faz a mínima ideia do que trata o problema, quais as variáveis em estudo, ou ainda a relação existente entre os dados fornecidos. Também não consegue perceber que os valores da taxa fixa e do aluguer diário, existente nas duas modalidades, não são passíveis de serem alvo de algoritmos entre si, no contexto do problema. Por isso, adiciona as taxas entre si, bem como os alugueres, para depois os dividir entre si, o que nos leva a pensar que não entende o significado da divisão. O arredondamento, efetuado no final, não nos permite concluir que haja uma compreensão de que o número de dias tenha de ser expresso em valores inteiros. Explicar-se-á pelo facto de acertar numa das hipóteses possíveis de resposta.

Exemplo 14


400 + 500 = 900
170 + 150 = 320
900 : 320 = 2,8 = 3
Como 400 e 500 dão 900 e 170 + 150 dá 320 eu somei esses valores e deu-me o resultado.
Com esse resultado fiz 900 a dividir 320 que deu 2,8 e assim arredondei e deu 3.
R.: Por isso a Basí vai alugar o automóvel por 3 dias.

Por todos os elementos que aqui foram registados, relativamente à tarefa em questão, é nossa opinião que os alunos abrangidos pelo PMEB (Ponte et al., 2007) parecem mais propensos a explicar a estratégia escolhida para a resolução. A nossa afirmação prende-se com a utilização de equações, em exclusivo pelos alunos sujeitos ao Programa de 2007 (Ponte et al., 2007). Não foi entendível se, ao escreverem cada uma das modalidades matematicamente, tiveram a perceção real de terem traduzido por uma expressão algébrica, nomeadamente, a expressão de uma função afim, para cada uma das modalidades que constavam na tarefa. Assim, concluímos que os discentes com mais disponibilidade, para resolverem e formularem problemas e modelarem situações utilizando funções, objetivo específico de qualquer um dos programas de matemática, são os que se encontram dentro do PMEB (Ponte et al., 2007).

Relativamente ao Tópico "Sequências e Regularidades", que faz parte da Álgebra, foi trabalhada uma cadeia de tarefas. Os critérios de seleção para a escolha da cadeia de tarefas tiveram em consideração, entre outros, aspetos como: a diversificação do raciocínio, da comunicação ou ainda do conhecimento. Procuramos que os alunos recorressem ao raciocínio indutivo, nomeadamente para a identificação de padrões. De acordo com Vale (2009, p. 36)

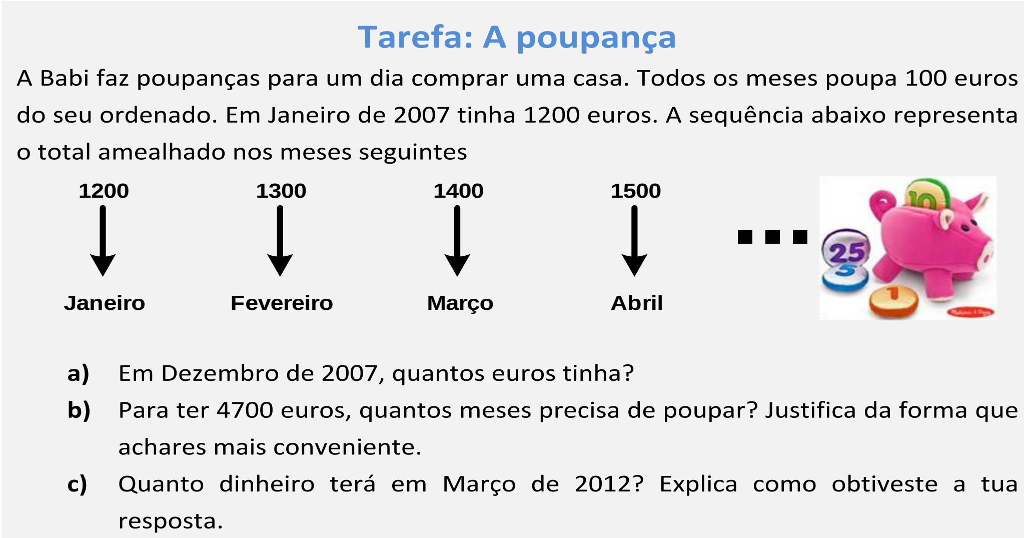
> " a profundidade e a variedade das conexões que os padrões possibilitam com todos os tópicos da Matemática conduz à consideração deste tema como transversal em toda a matemática escolar, quer para preparar os alunos para aprendizagens posteriores quer no desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas e comunicação."

Em relação à comunicação, a cadeia foi pensada com o intuito de levar os alunos a expressar as suas ideias, através do uso de vocabulário e/ou simbologia específica da matemática. No que diz respeito ao conhecimento, procurou-se que os alunos estabelecessem conexões entre conceitos, procedimentos e articulassem a matemática escolar com a do quotidiano.

Quanto à cadeia de tarefas aplicada, optamos por apresentar três das tarefas, tendo em conta que as tarefas seguintes continham questões que sintetizavam e consolidavam os conhecimentos e conceitos, entretanto adquiridos.

4. **Tarefa**: A poupança

A primeira tarefa – A poupança – era constituída por três alíneas e tratava um conteúdo que, apesar de fazer parte do dia-a-dia de muitos, não é um assunto que os alunos discutam com segurança ou com frequência. Desta forma, optámos por fazer a análise da mesma por alínea. Em seguida, apresentamos a tarefa, tal como chegou junto dos discentes:



Tarefa: A poupança

A Babi faz poupanças para um dia comprar uma casa. Todos os meses poupa 100 euros do seu ordenado. Em Janeiro de 2007 tinha 1200 euros. A sequência abaixo representa o total amealhado nos meses seguintes

1200	1300	1400	1500	...
↓	↓	↓	↓	
Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	

a) Em Dezembro de 2007, quantos euros tinha?

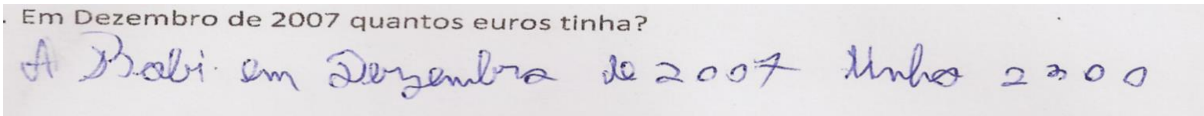
b) Para ter 4700 euros, quantos meses precisa de poupar? Justifica da forma que achares mais conveniente.

c) Quanto dinheiro terá em Março de 2012? Explica como obtiveste a tua resposta.

Figura 23 - Tarefa: A poupança
Fonte: Adaptado de Neves et al. (2010).

A primeira alínea foi corretamente respondida por todos os alunos, independentemente de qual o programa matemático em que se situam. O exemplo 1 trata-se de uma apresentação exclusiva dos alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991), com resposta simples, sem indicação de cálculo algum.

Exemplo 1

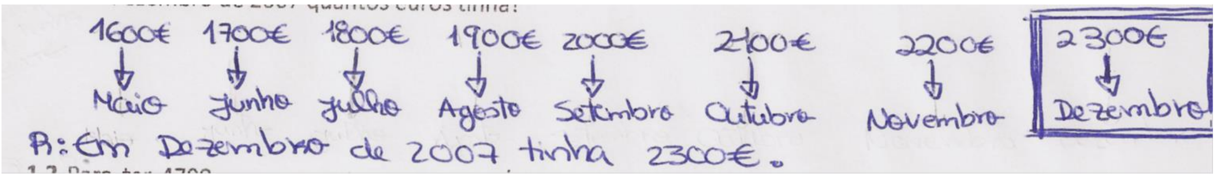


. Em Dezembro de 2007 quantos euros tinha?

A Babi em Dezembro de 2007 tinha 2300

Quanto ao segundo exemplo, representa o dos registos mais frequentes enquanto processo de resolução utilizado pelos alunos, de forma geral. Trata-se de um cálculo esquemático, efetuado sem qualquer dificuldade.

Exemplo 2

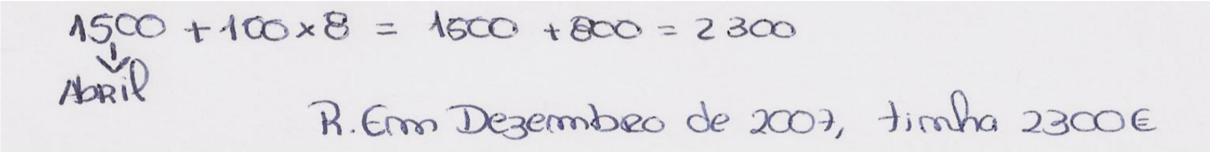


1600€ → Maio, 1700€ → Junho, 1800€ → Julho, 1900€ → Agosto, 2000€ → Setembro, 2100€ → Outubro, 2200€ → Novembro, $\boxed{2300€ \to \text{Dezembro}}$

R: Em Dezembro de 2007 tinha 2300€.

Outras resoluções bastante frequentes são as exemplificadas pelo exemplo 3 (Programa de 1991 (DGEBS, 1991)) e 4 (Programa de 2007 (Ponte et al., 2007)). A estratégia de resolução é idêntica: nos dois casos, o cálculo é iniciado a partir do valor correspondente ao mês de abril. No entanto, parece-nos haver alguma preocupação em explicar a opção de estratégia de resolução, no quarto exemplo.

Exemplo 3

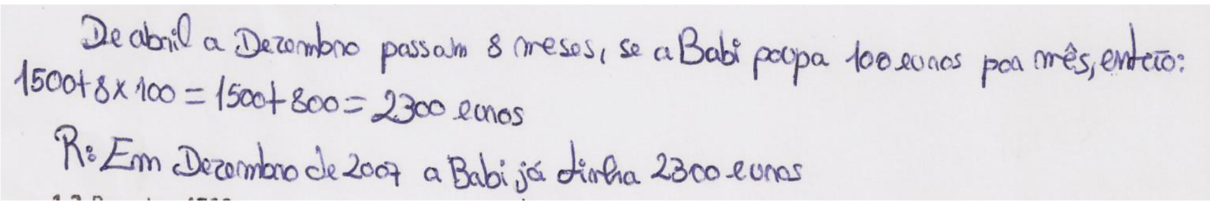


1500 + 100 × 8 = 1500 + 800 = 2300

Abril

R. Em Dezembro de 2007, tinha 2300 €

Exemplo 4



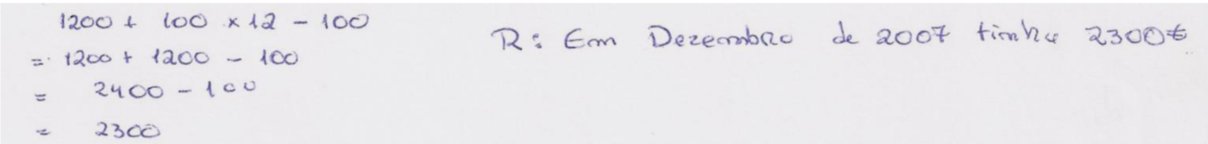
De abril a Dezembro passam 8 meses, se a Babi poupa 100 euros por mês, então:

1500 + 8 × 100 = 1500 + 800 = 2300 euros

R: Em Dezembro de 2007 a Babi já tinha 2300 euros

Os dois últimos exemplos, que escolhemos para abordar esta alínea, são exclusivos de alunos do PMEB (Ponte et al., 2007), mas não únicos. No exemplo 5, o aluno optou por efetuar o cálculo por excesso, aquilo a que os discentes vulgarmente chamam de «fazer a conta certa». No nosso entender, traduz uma estratégia interessante, já que recorre à operação inversa, porém não é uma das metodologias preferenciais dos alunos, de uma forma geral. O exemplo 6 salienta-se pela recorrência à noção de incógnita, mesmo não tendo necessidade de recorrer às equações.

Exemplo 5



1200 + 100 × 12 − 100

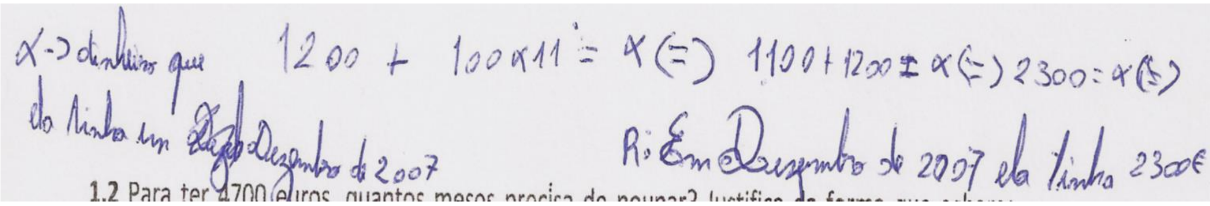
= 1200 + 1200 − 100

= 2400 − 100

= 2300

R: Em Dezembro de 2007 tinha 2300€

Exemplo 6



x -> dinheiro que ela tinha em Dezembro de 2007

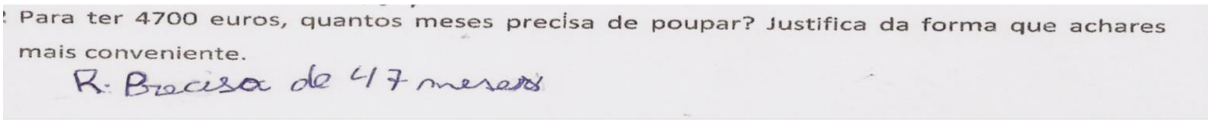
1200 + 100 × 11 = x (=) 1100 + 1200 = x (=) 2300 = x

R: Em Dezembro de 2007 ela tinha 2300€

Quanto à segunda alínea desta tarefa, concluímos que se tratou da que mais respostas se enquadram nos níveis B e D, dentro dos descritores dos níveis de desempenho. Uma significativa quantidade de alunos respondeu erradamente, qualquer que fosse o seu programa de matemática. Outro pormenor pertinente, é o facto de não haver registos exclusivos de um programa só, com exceção das resoluções que utilizaram equações.

No exemplo 7, que se adapta no nível D (quadro 20), podemos apenas constatar um resultado errado. Por isso, não nos é possível tecer qualquer comentário. A nossa decisão de apresentar este exemplo justifica-se por se tratar de um registo que surge com alguma frequência.

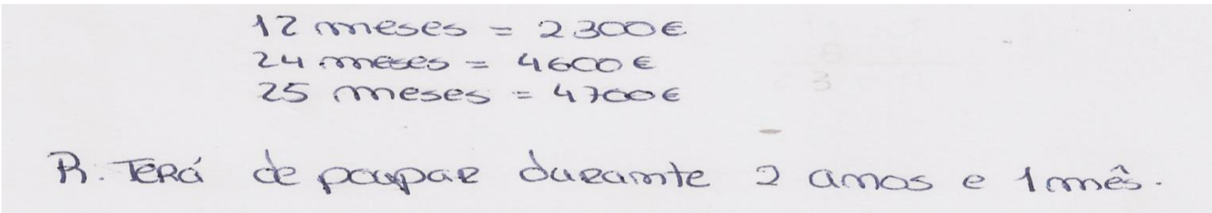
Exemplo 7


Para ter 4700 euros, quantos meses precisa de poupar? Justifica da forma que achares mais conveniente.

R: Precisa de 47 meses.

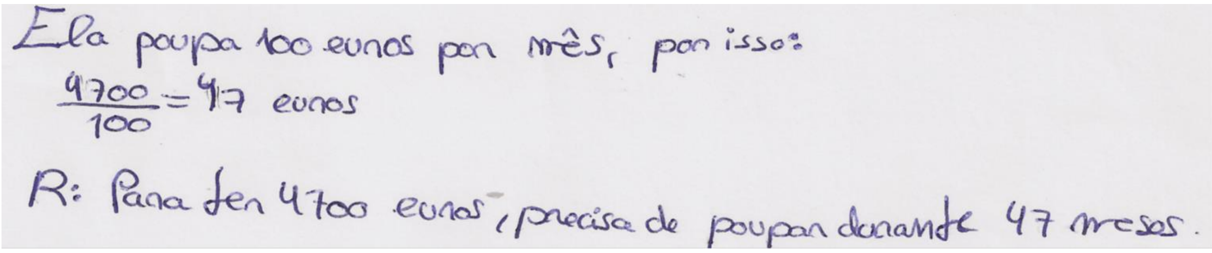
Outro erro frequente dentro das respostas erradas, mas que se ajusta ao nível B do quadro 20, foram as presentes nos exemplos 8 e 9. Foram vários os alunos que trabalharam esta alínea como se de uma proporcionalidade direta se tratasse. Podemos constatar isso através do exemplo 8. No caso do exemplo 9, o erro prendeu-se com a falta de desconto do valor inicial, isto é, o aluno calculou como se o problema iniciasse quando ainda não havia qualquer valor monetário poupado.

Exemplo 8


12 meses = 2300€
24 meses = 4600€
25 meses = 4700€

R. Terá de poupar durante 2 anos e 1 mês.

Exemplo 9

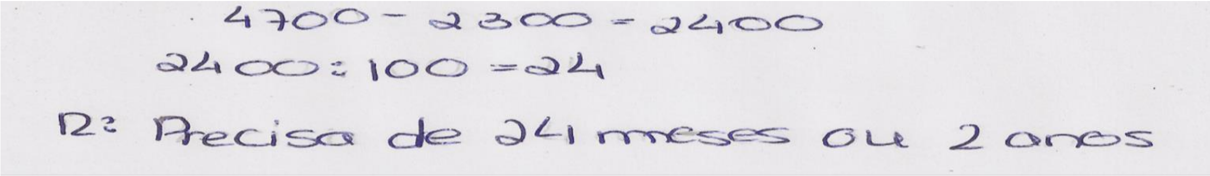

Ela poupa 100 euros por mês, por isso:

$\frac{4700}{100} = 47$ euros

R: Para ter 4700 euros, precisa de poupar durante 47 meses.

Outro tipo de resolução, na qual está patente uma estratégia bem pensada, mas cuja conclusão está errada, é a descrita nos exemplos 10 e 11. No primeiro, o aluno iniciou o cálculo, recorrendo à alínea anterior (partiu de dezembro de 2007), porém depois esqueceu que teria de ter em conta esse mesmo pormenor, para a resposta final. O mesmo sucedeu no exemplo 11,em que o cálculo foi iniciado a partir do esquema fornecido e do último mês (abril).

Exemplo 10

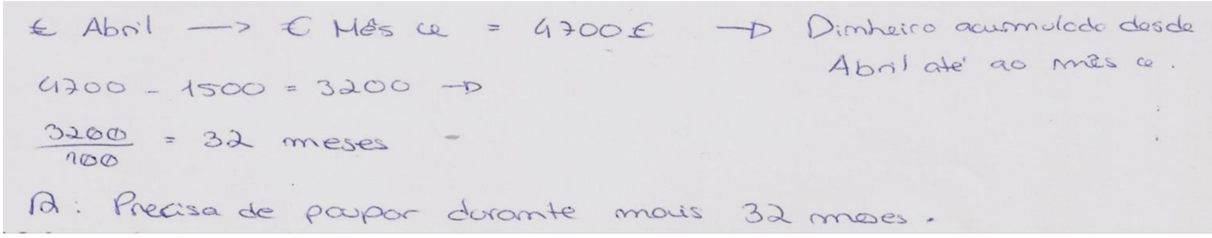


4700 - 2300 = 2400

2400 : 100 = 24

R: Precisa de 24 meses ou 2 anos

Exemplo 11



€ Abril —> € Mês ce = 4700€ —> Dinheiro acumulado desde Abril até ao mês ce.

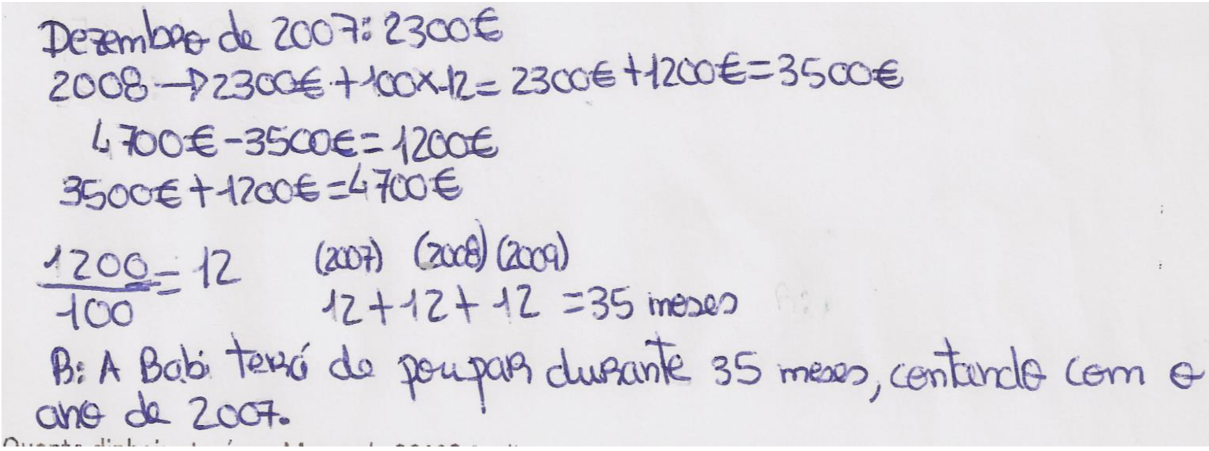
4700 - 1500 = 3200 —>

$\frac{3200}{100}$ = 32 meses

R: Precisa de poupar durante mais 32 meses.

Os exemplos 12 e 13 são elucidativos do que, frequentemente, acontece em Matemática: os alunos cometem erros nos cálculos intermédios. No entanto, o resultado final está correto. Apesar da apresentação da estratégia estabelecida, fica a dúvida se o mesmo aconteceu por esquecimento ou distração.

Exemplo 12



Dezembro de 2007: 2300€

2008 → 2300€ + 100×12 = 2300€ + 1200€ = 3500€

4700€ - 3500€ = 1200€

3500€ + 1200€ = 4700€

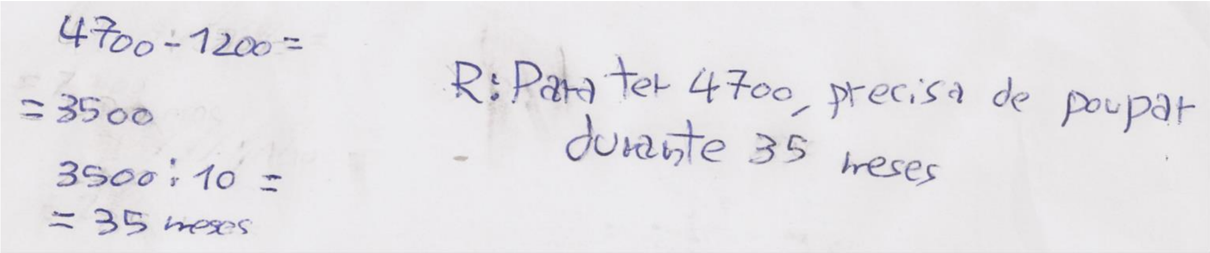
$\frac{1200}{100}$ = 12 (2007) (2008) (2009)

12 + 12 + 12 = 35 meses

R: A Bebé terá de poupar durante 35 meses, contando com o ano de 2007.

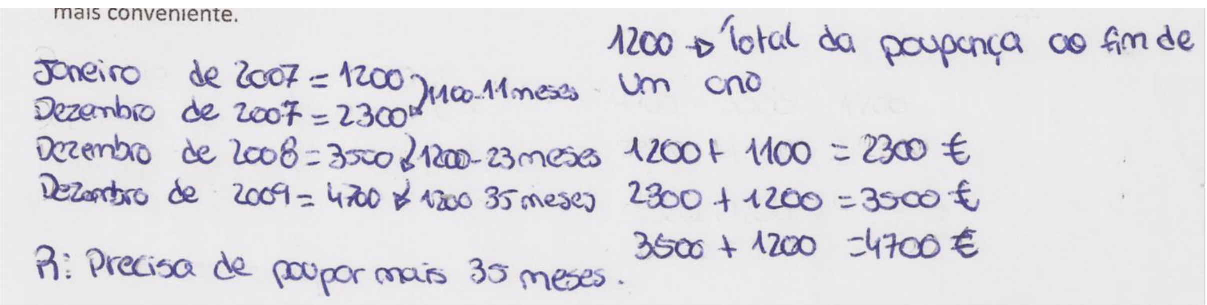
Neste caso, o erro cometido prende-se com a contagem dos meses, durante o primeiro ano, que deveria ter sido onze e não doze, como indicado. No entanto, a contagem final está correta, isto é, o aluno acertou no valor de trinta e cinco meses. No exemplo 13, a divisão por dez nunca resultaria no valor de trinta e cinco meses. Pensamos que se tratou de distração ao escrever.

Exemplo 13

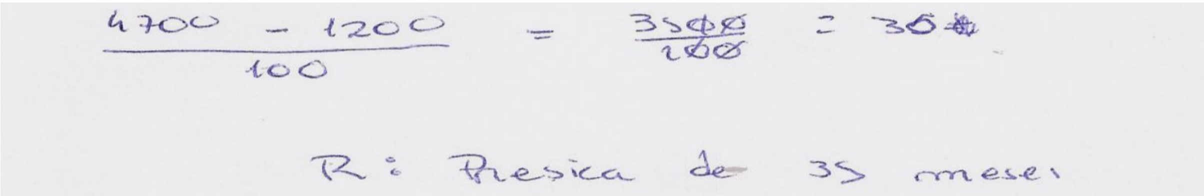


Quanto aos exemplos 14, 15 e 16, os registos estão corretos. No caso dos exemplos 14 e 15, são comuns aos alunos dos dois programas: a utilização de esquema ou uso de uma expressão numérica. Relativamente ao exemplo 16, e uma vez mais, foi um processo de resolução exclusivo dos alunos do programa de 2007 (Ponte et al., 2007): o recurso às equações.

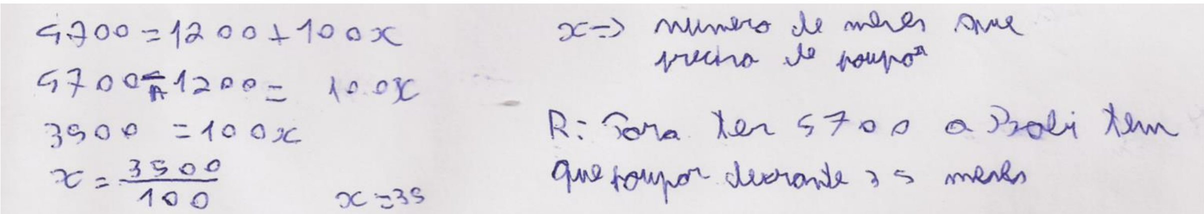
Exemplo 14



Exemplo 15



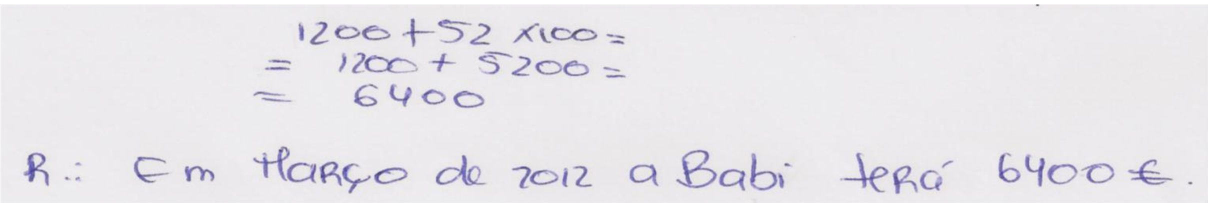
Exemplo 16



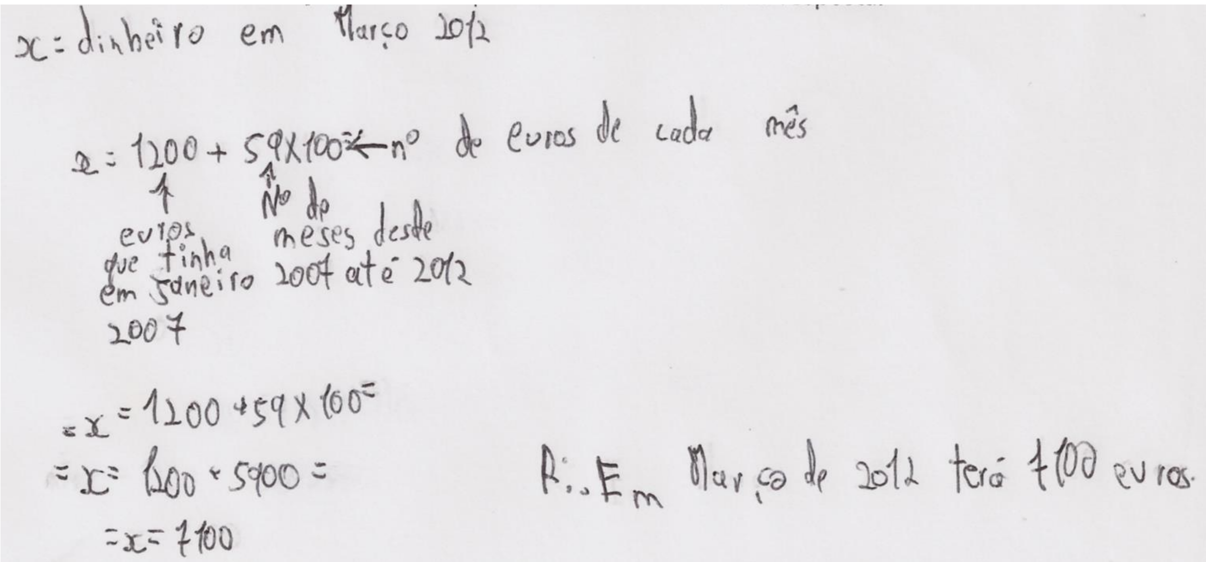
Em relação à última alínea desta tarefa, o erro mais presente, nas várias produções escritas dos alunos, abrangidos pelos dois programas, diz respeito à contagem errada do tempo, ou seja, contaram os meses por defeito ou excesso.

Pensamos que esse erro se deve a utilizarem os dados das alíneas anteriores, em vez de recorrerem aos dados iniciais do problema. Assim, no exemplo 17, achamos que o aluno terá cometido o erro de iniciar a contagem mensal partindo da primeira alínea na qual a questão temporal se reportava a dezembro de 2007. Trata-se de uma opinião, uma vez que o aluno em causa não explicita, de nenhuma forma, o aparecimento dos cinquenta e dois meses. No exemplo 18, entendemos que o cálculo errado do número de meses acontece por o aluno ter iniciado a contagem a partir de abril de 2007 e por isso, obteve cinquenta e nove meses. No exemplo 19, pensamos que a contagem errada ocorreu pelo erro cometido na multiplicação.

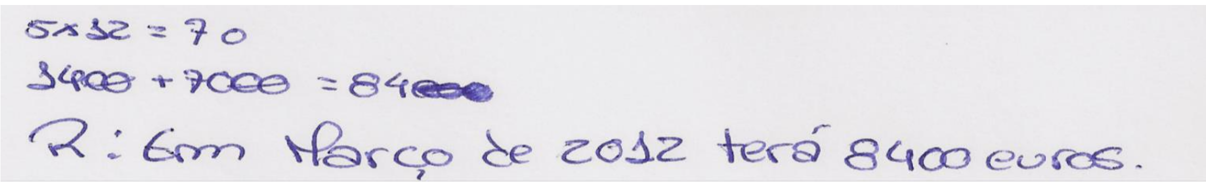
Exemplo 17



Exemplo 18

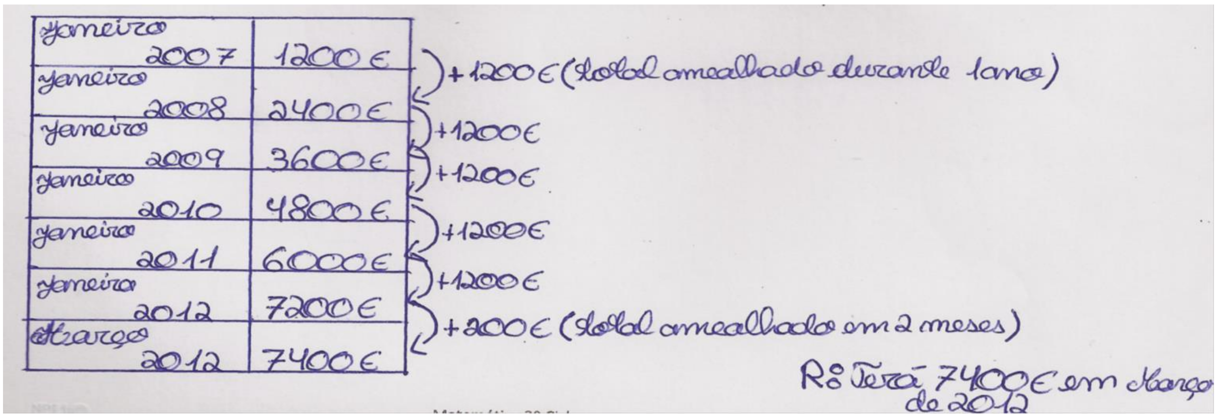


Exemplo 19

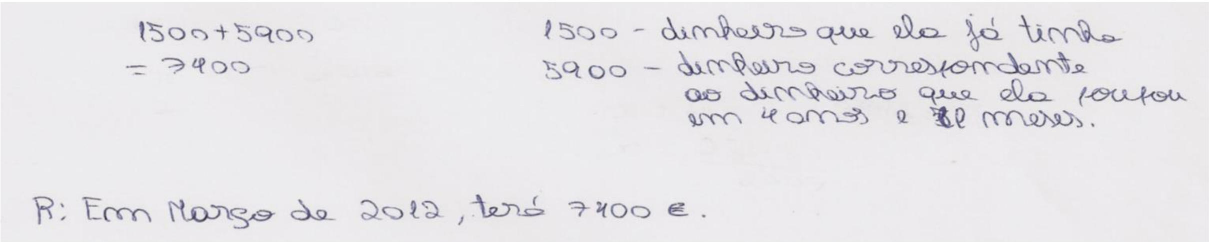


No referente aos registos corretos, ou seja, que se enquadram no nível A, nos níveis de desempenho, os exemplos 20 e 21 são correntes entre os alunos de qualquer um dos programas. Recorrem a um esquema de contagem ou a uma expressão numérica. Também nos parece que existe alguma preocupação em transmitir o que significam alguns dos valores intermédios e/ou finais.

Exemplo 20

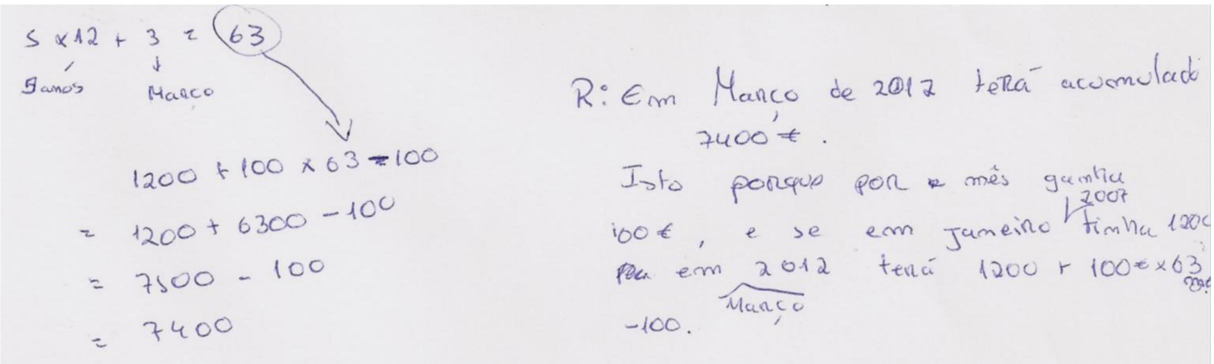


Exemplo 21

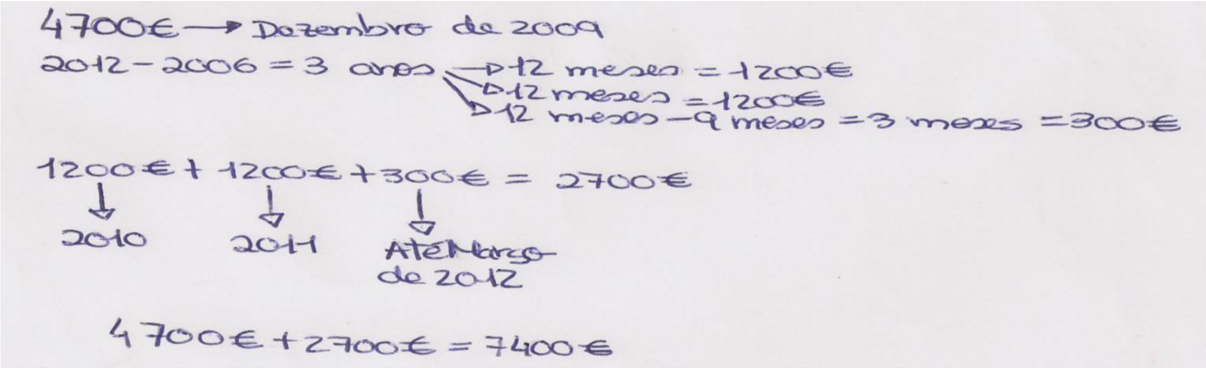


Por outro lado, os exemplos 22, 23 e 24 são apenas dos alunos do PMEB (Ponte et al., 2007). No caso do exemplo 22, o aluno recorre a uma estratégia na qual faz um cálculo por excesso. Já no exemplo 23, o discente estabelece a relação entre o número de anos, meses e o valor poupado, ou seja, cria uma relação entre as variáveis do problema. No último exemplo, houve uma preocupação de fazer passar a mensagem da estratégia de resolução, através da resposta final.

Exemplo 22



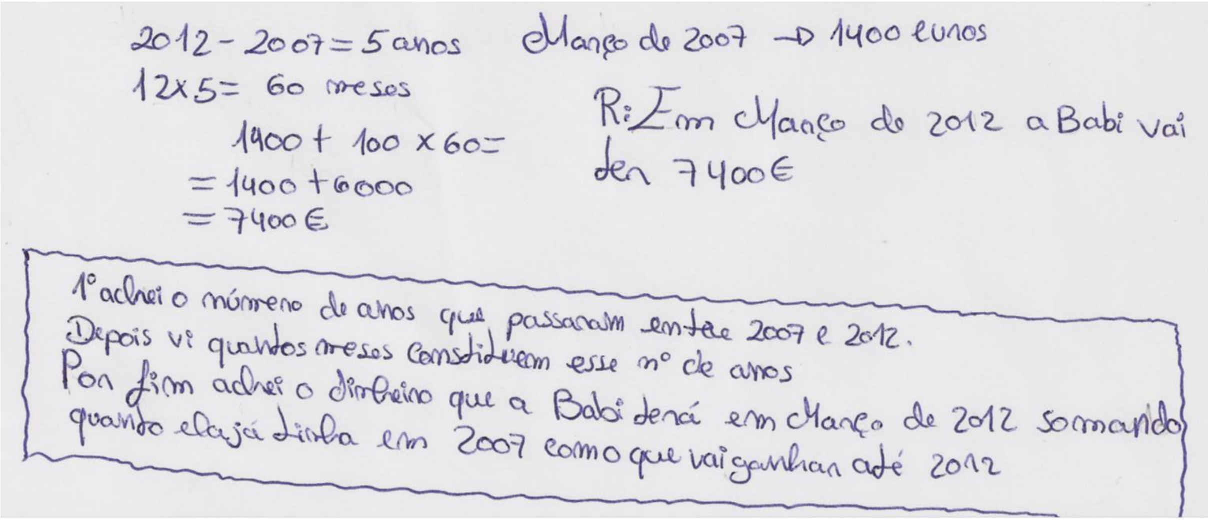
Exemplo 23


4700€ → Dezembro de 2009
2012 − 2006 = 3 anos → 12 meses = 1200€
→ 12 meses = 1200€
→ 12 meses − 9 meses = 3 meses = 300€

1200€ + 1200€ + 300€ = 2700€
2010 2011 Até Março de 2012

4700€ + 2700€ = 7400€

Exemplo 24


2012 − 2007 = 5 anos Março de 2007 → 1400 euros
12x5 = 60 meses
1400 + 100 x 60 =
= 1400 + 6000
= 7400 €

R: Em Março de 2012 a Babi vai ter 7400€

1º achei o número de anos que passaram entre 2007 e 2012.
Depois vi quantos meses constituem esse nº de anos
Por fim achei o dinheiro que a Babi terá em Março de 2012 somando
quando ela já tinha em 2007 com o que vai ganhar até 2012

Em síntese, tendo em conta todas as produções e a análise realizada às três alíneas desta tarefa, podemos afirmar que os alunos, enquadrados no PMEB (Ponte et al., 2007), são mais capazes e autónomos na comunicação matemática escrita. Entendemos que, tal como esperado, conseguem interpretar e representar situações, resolver problemas, bem como comunicar e raciocinar algebricamente, perante novas situações. Relativamente a estes alunos, foi possível perceber que (Ponte, Matos & Branco, 2009, p.4)

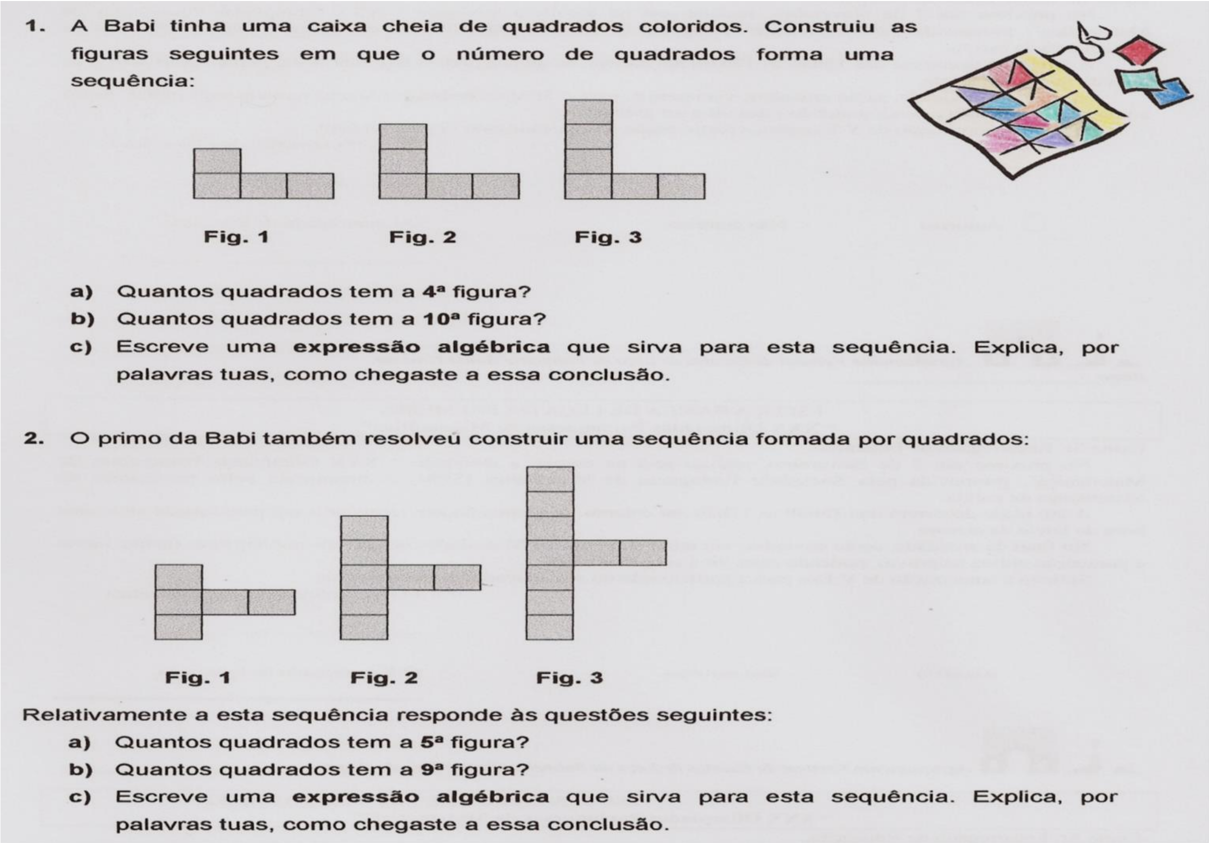
> " as estratégias usadas na resolução de questões envolvendo sequências podem ser "locais", indicando como passar de um termo para o termo seguinte (processo recursivo), ou "globais", estabelecendo uma relação de natureza geral que descreve toda a regularidade (expressão essa que pode ser representada por palavras ou por uma expressão algébrica)."

5. **Tarefa**: Os quadrados

A segunda tarefa – Os quadrados – foi adaptada do Teste Intermédio de 9º ano de fevereiro de 2010. Este teste tem por referência o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), nomeadamente no que respeita ao 3º ciclo, incidindo nos tópicos e nos objetivos específicos, a eles associados, que são passíveis de avaliação. Os testes intermédios ocorreram, pela primeira vez, no ano letivo de 2005/2006, e são instrumentos de avaliação disponibilizados pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE, 2005). O objetivo principal é permitir aos docentes aferirem o desempenho dos seus alunos, a nível nacional, e contribuir para que, por parte dos alunos, haja uma relação mais próxima com a avaliação externa.

A tarefa era constituída por duas questões, com três alíneas cada. No que concerne às alíneas a) e b), de cada uma das questões, procurou-se que os alunos fizessem uma descrição de figuras adjacentes, para que houvesse uma maior proximidade com a sequência. Isto é, interessava “aos alunos ter um primeiro contacto com a sequência apresentada” e “levar os alunos a compreender o modo como as novas figuras são constituídas” (Ponte et al., 2009, pp. 15-22). Na última alínea de cada questão, pretendeu-se que os alunos generalizassem. Assim, a aplicação da tarefa foi pensada tendo em conta que “envolvem pensar nas relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e através de diferentes representações, incluindo o uso de símbolos” (Vale, 2009, p. 37). Nesta tarefa, era esperado que os alunos formulassem estratégias próprias para a identificação da regularidade – o fator constante – através de palavras, esquemas, cálculos e expressões algébricas e que as mesmas fossem ponto de partida para a formulação e o desenvolvimento de novos conceitos, bem como de novas representações.

Aos alunos, a tarefa foi apresentada da forma seguinte:



1. A Babi tinha uma caixa cheia de quadrados coloridos. Construiu as figuras seguintes em que o número de quadrados forma uma sequência:

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

a) Quantos quadrados tem a **4ª** figura?
b) Quantos quadrados tem a **10ª** figura?
c) Escreve uma **expressão algébrica** que sirva para esta sequência. Explica, por palavras tuas, como chegaste a essa conclusão.

2. O primo da Babi também resolveu construir uma sequência formada por quadrados:

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

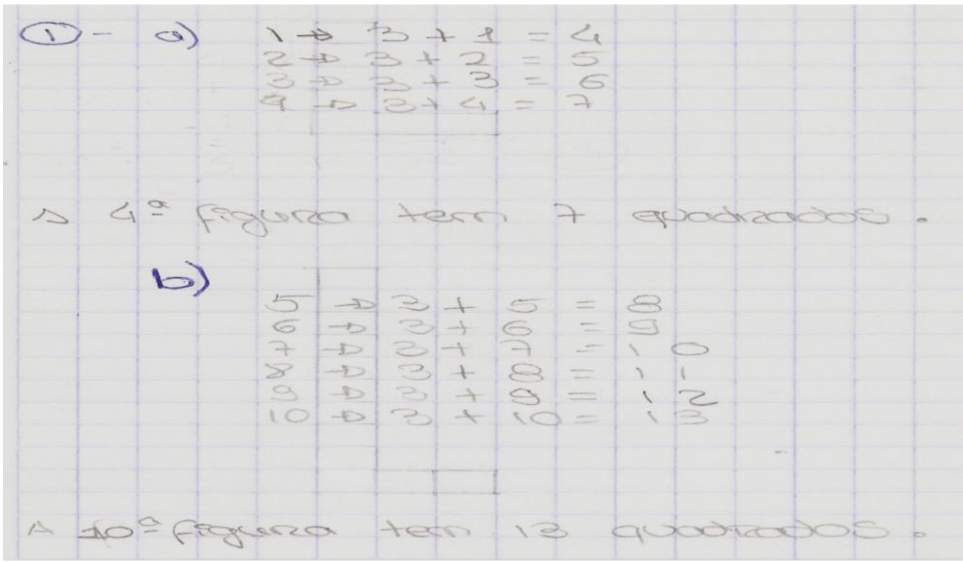
Relativamente a esta sequência responde às questões seguintes:
a) Quantos quadrados tem a **5ª** figura?
b) Quantos quadrados tem a **9ª** figura?
c) Escreve uma **expressão algébrica** que sirva para esta sequência. Explica, por palavras tuas, como chegaste a essa conclusão.

Figura 25 - Tarefa: Os quadrados

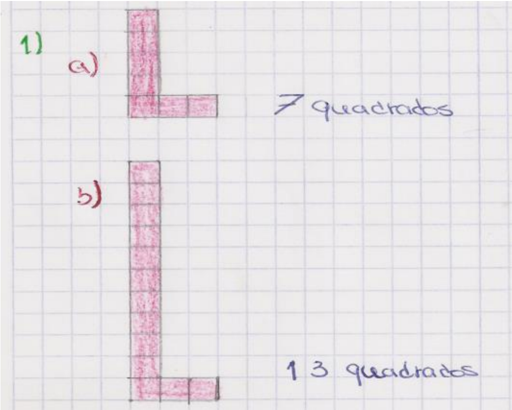
Fonte: Adaptado de Teste intermédio de 9º ano (GAVE, 2010).

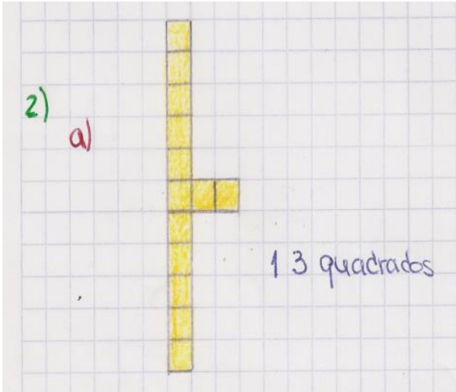
Assim, relativamente às duas primeiras alíneas de cada questão, todos os alunos responderam corretamente (independentemente a que programa estavam vinculados), elaborando pequenos cálculos (exemplo 1), esquemas (exemplo 2) ou dando uma resposta simples (exemplo 3).

Exemplo 1

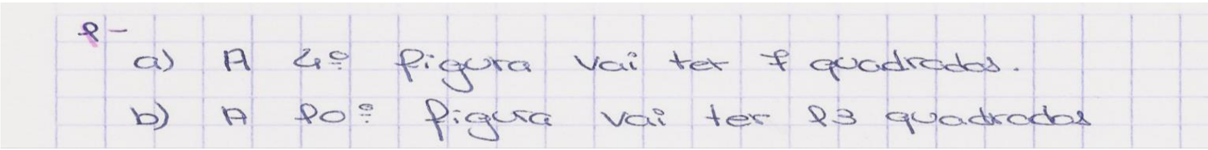


Exemplo 2





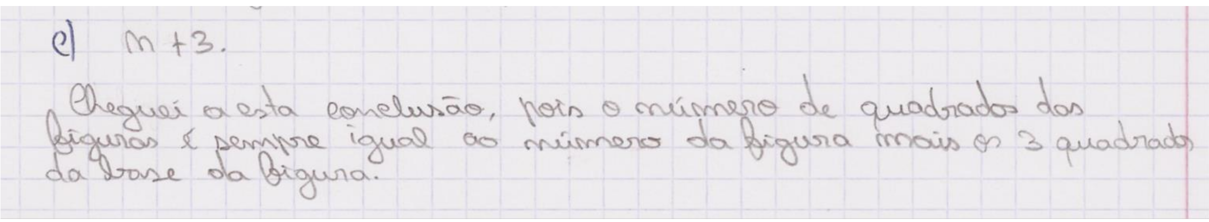
Exemplo 3



Em relação à última alínea de cada questão, obtivemos muitas respostas em branco, principalmente dos alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991) de Matemática. Entre as respostas que se enquadram no nível D do quadro dos descritores (quadro 20), isto é, que apenas apresentam um resultado errado, não nos é possível compreender a mesma, já que não existe nenhuma explicação ou cálculo a suportá-la. Os restantes registos escritos enquadram-se no nível A, ou seja, apresentam uma estratégia de resolução correta, ou elaboram uma composição clara e bem estruturada, concluindo com o pretendido. É de salientar que, relativamente a esta questão, e dentro dos registos corretos, não são visíveis diferenças entre os alunos do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) e do Programa de 1991 (DGEBS, 1991).

Nesta perspetiva, vamos apresentar alguns exemplos, referentes à primeira questão - exemplos 4, 5 e 6 – e, em relação à segunda questão, os exemplos 7, 8 e 9. Em cada um deles, podemos visualizar diferentes estratégias de resolução: por palavras, por cálculos e/ou por esquemas. Constatamos, ainda, que alguns alunos não simplificam as expressões encontradas, pois apresentam $n2+3$ ou ainda $(n\times 2)+3$.

Exemplo 4



Exemplo 5

c) R: 3+n, porque todas as figuras têm uma base constituída por 3 quadrados. Na vertical as figuras são constituídas por 1 quadrado constituinte da base mais o nº de quadrados correspondentes ao nº da fig.

Ex. Fig 1

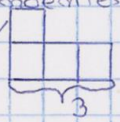


Fig 2

Exemplo 6

c)

R: A expressão analítica é 3 + n

ex: 1ª figura = 4 quadrados → 3 + n = 3+1 = 4 quadrados
2ª figura = 5 quadrados → 3 + n = 3+2 = 5 quadrados
3ª figura = 6 quadrados → 3 + n = 3+3=6 quadrados
4ª figura = 7 quadrados → 3 + n = 3+4=7 quadrados
(n = nº da figura)

Exemplo 7

c) A expressão analítica é n2+3, porque nos 3 exemplos dados, podemos verificar que para calcularmos o número de quadrados correspondentes a cada um, temos que multiplicar o número da figura por 2 e somar 3 a esse resultado.

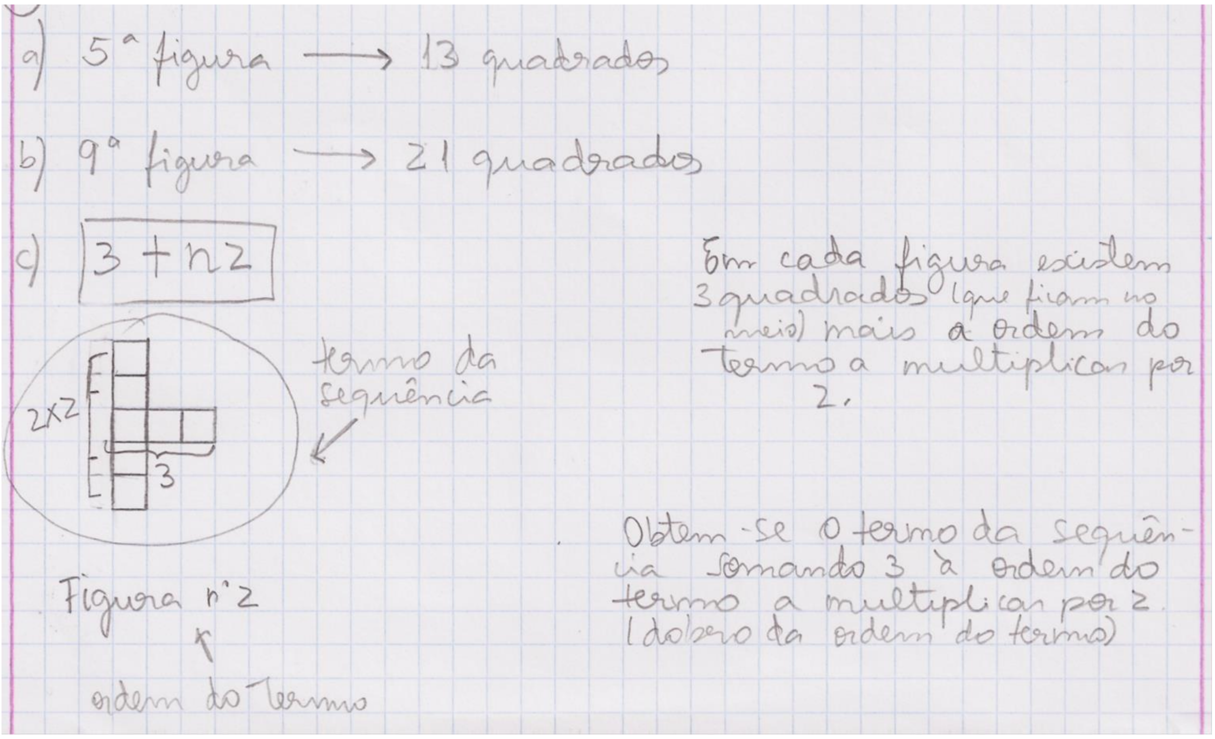
Exemplo 8

c) fig (n) = 2n+3, porque o número de quadrados de cada figura corresponde ao nº da figura multiplicada por dois mais três quadrados; por exemplo:

fig. 6 = 6 × 2 + 3 = 15 → nº de quadrados que correspondem à fig. 6.

nº da figura × multiplicado por 2 + 3 quadrados

Exemplo 9


a) 5ª figura → 13 quadrados

b) 9ª figura → 21 quadrados

c) $\boxed{3 + n2}$

Em cada figura existem 3 quadrados (que ficam no meio) mais a ordem do termo a multiplicar por 2.

termo da sequência

2x2

3

Figura nº2

ordem do termo

Obtem-se o termo da sequência somando 3 à ordem do termo a multiplicar por 2 (dobro da ordem do termo)

Desta forma, e através de todos os registos escritos dos alunos que integram o estudo, dos quais apresentamos os exemplos mais frequentes, relativamente às várias alíneas das duas questões, e recorrendo à experiência de discentes dos dois programas de matemática, concluímos que, relativamente a esta tarefa, não foram visíveis diferenças significativas entre as produções. Somos também da opinião dos autores da brochura da DGIDC, subordinada ao tópico Sequências e Funções (Ponte et al., 2009, p.5), quando afirmam que tarefas deste tipo levam a que os alunos se sintam impelidos a "formular estratégias próprias, ao mesmo tempo que mobilizam conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas". Pensamos que, tratando-se de uma tarefa dentro de uma cadeia de tarefas, os alunos já estivessem mais predispostos e apresentassem um melhor pensamento algébrico. Não podemos esquecer a importância que este tipo de raciocínio representa, tal como Vale e Pimentel (2011, p.15) afirmam

> " o pensamento algébrico diz respeito à simbolização (representar e analisar situações matemáticas, usando símbolos algébricos), ao estudo de estruturas (compreender relações e funções) e à modelação. Implica conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar o problema matematicamente, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado."

No entanto, não deixamos de notar que as respostas em branco, relativamente à alínea c), pertencem a alunos abrangidos pelo Programa de 1991 (DGEBS, 1991) de matemática, o que, na nossa opinião, traduz uma menor capacidade de exploração e investigação, que são fatores essenciais para a autonomia matemática.

6. **Tarefa**: Quadrados e círculos

A terceira tarefa era constituída por três alíneas e procurava explorar um pouco mais as regularidades, levando a que os alunos observassem mais do que uma sequência. No entanto, para as questões, apenas necessitariam da referente aos círculos. Os alunos foram postos perante a existência de dados excessivos, tendo necessidade de focalizar a sua atenção e concentração, no que era pedido, apesar de visualizarem mais do que uma lei de formação.

Assim, a tarefa fornecida aos alunos foi:

A sequência das figuras é formada por quadrados e círculos.

a) Para formar a figura **5** o número de círculos necessários é:

(A) 15 **(B)** 16 **(C)** 17 **(D)** 18

b) Para formar a figura **n** o número de círculos necessários é:

(A) 2 + 3n **(B)** 5n **(C)** 4n + 1 **(D)** 6n - 1

Justifica a opção escolhida.

c) Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

Pode existir uma figura com:

(A) 76 círculos **(B)** 181 círculos **(C)** 152 círculos **(D)** 240 círculos

Explica como obtiveste a tua resposta.

Figura 25 - Tarefa: Quadrados e círculos
Fonte: Adaptado de Neves et al. (2010).

Quanto à primeira alínea, todos os alunos, sem exceção, acertaram na resposta correta (17). Uma vez mais, este tipo de questões (identificação de uma figura próxima) surgiu com o intuito de os familiarizar com a sequência.

Relativamente à alínea b), a esmagadora maioria dos alunos optou corretamente pela hipótese (A) $2+3n$. As respostas incorretas direcionavam-se para a hipótese (B), como podemos constatar no exemplo 1.

Exemplo 1

Porque são 5 circulos a multiplicar por 1, isto é, há 5 circulos em cada quadrado

Trata-se de um registo único de um aluno do Programa de 1991 (DGEBS, 1991). É o exemplar exclusivo do nível D, do quadro dos descritores (quadro 20). Através da leitura da explicação do aluno, conseguimos perceber que, apesar da alínea anterior procurar uma proximidade com a sequência, ele não entendeu as figuras e ainda menos a lei de formação.

Os exemplos 2, 3 e 4 são os registos mais frequentes entre os alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991), mas também surgem entre os do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007). Pela própria explicação, concluímos que utilizaram o método de tentativa e erro. No exemplo 2, é visível, para as três primeiras figuras constantes do enunciado, cálculos sem qualquer explicação.

Exemplo 2

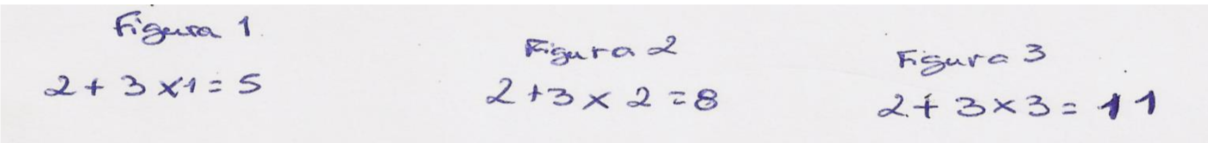


Figura 1 $2+3\times1=5$ Figura 2 $2+3\times2=8$ Figura 3 $2+3\times3=11$

Nos exemplos 3 e 4, os alunos esclarecem que tentaram as várias hipóteses dadas, mas também têm a noção de que a tentativa deve ir para além da figura três.

Exemplo 3

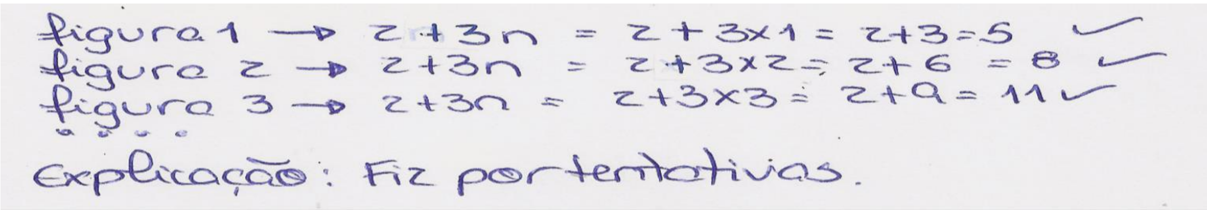


figura 1 → $2+3n = 2+3\times1 = 2+3=5$
figura 2 → $2+3n = 2+3\times2 = 2+6 = 8$
figura 3 → $2+3n = 2+3\times3 = 2+9 = 11$

Explicação: Fiz por tentativas.

Exemplo 4

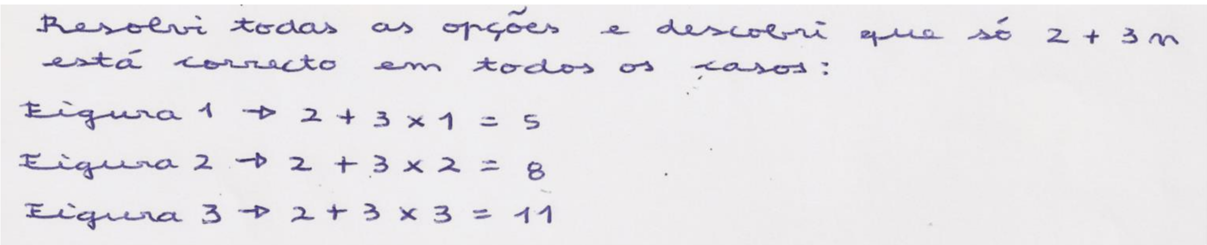

Resolvi todas as opções e descobri que só $2+3n$ está correcto em todos os casos:

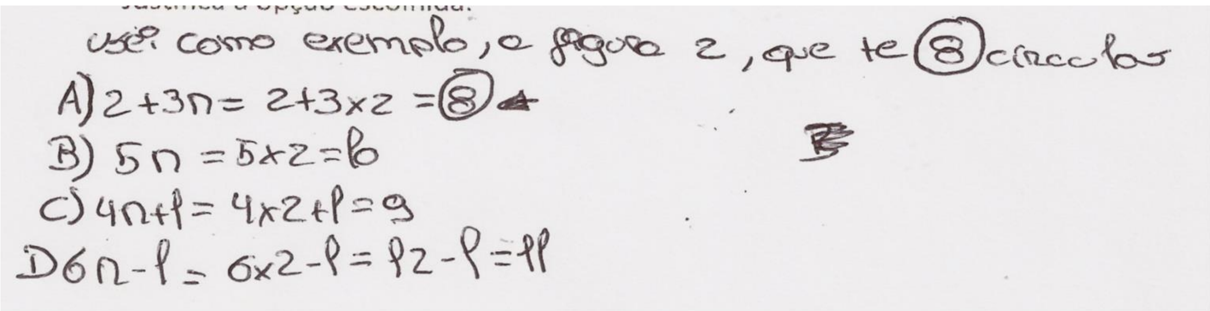
Figura 1 → $2+3\times1=5$

Figura 2 → $2+3\times2=8$

Figura 3 → $2+3\times3=11$

Ao contrário dos exemplos anteriores, o exemplo 5 consistia numa produção muito mais frequente entre os alunos do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007). O interessante, neste caso, é o aluno perceber que compensa tentar, logo na segunda figura. Provavelmente, terá efetuado o cálculo mental, para averiguar a primeira figura, em todas as hipóteses e terá verificado que todas tinham o mesmo resultado. Recorrendo à segunda figura, descobriu logo qual era a hipótese correta.

Exemplo 5



usei como exemplo, a figura 2, que tem 8 círculos

A) $2+3n = 2+3\times2 = 8$

B) $5n = 5\times2 = 10$

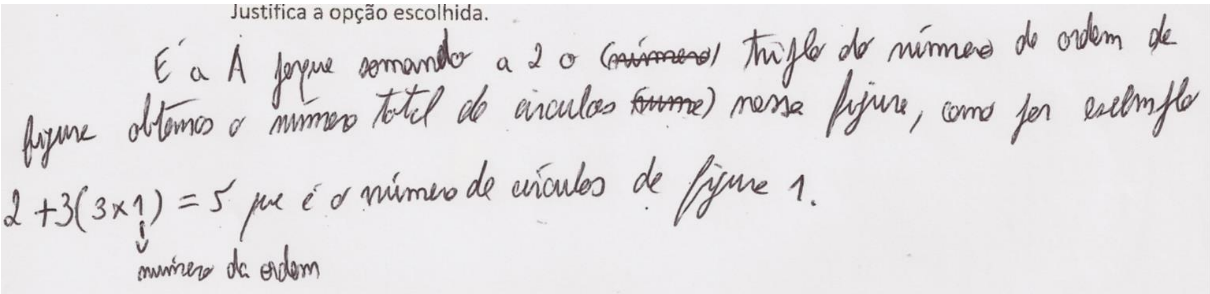
C) $4n+1 = 4\times2+1 = 9$

D $6n-1 = 6\times2-1 = 12-1 = 11$

Nos próximos exemplos, e que são exclusivos dos alunos do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), uma vez mais observamos que prevalece uma maior preocupação em comunicar matematicamente, por palavras e/ou esquemas explicativos.

No exemplo 6, o aluno, para além de explicar a lei de formação, tem o cuidado de exemplificar com uma figura.

Exemplo 6



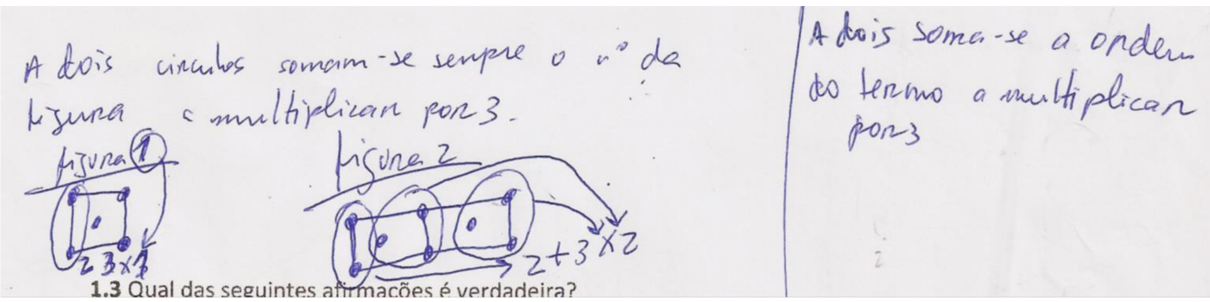
Justifica a opção escolhida.

É a A porque somando a 2 o ~~(número~~ triplo do número de ordem da figura obtemos o número total de círculos ~~forma)~~ nessa figura, como por exemplo $2+3(3\times1) = 5$ que é o número de círculos da figura 1.

número da ordem

Nos registos seguintes (exemplo 7, 8 e 9), podemos visualizar o entendimento dos alunos, relativamente à lei de formação da sequência dos círculos. Apesar do exemplo 7 ser o mais desajeitado graficamente, concluímos que os alunos generalizaram corretamente, ao descreverem a estratégia de resolução, para o número de círculos de cada figura. Todos os alunos efetuaram uma exploração, com o intuito de identificar a regularidade, representando a informação dada e traduzindo as ideias matemáticas, usando, por vezes, simbologia e vocabulários próprios.

Exemplo 7

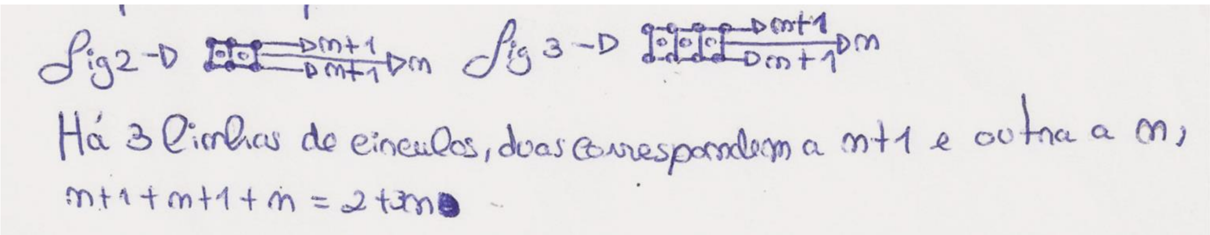


A dois círculos somam-se sempre o nº da figura e multiplicar por 3.

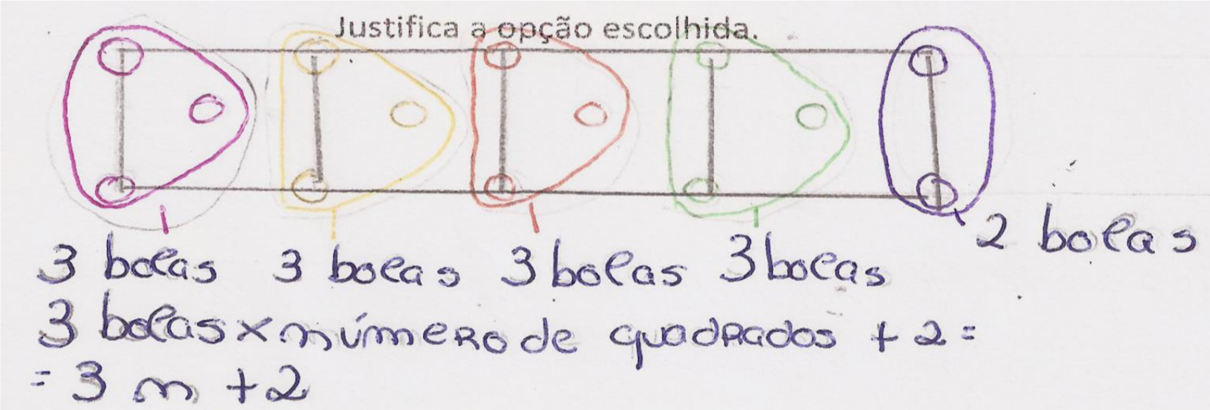
A dois soma-se a ordem do termo a multiplicar por 3

1.3 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

Exemplo 8



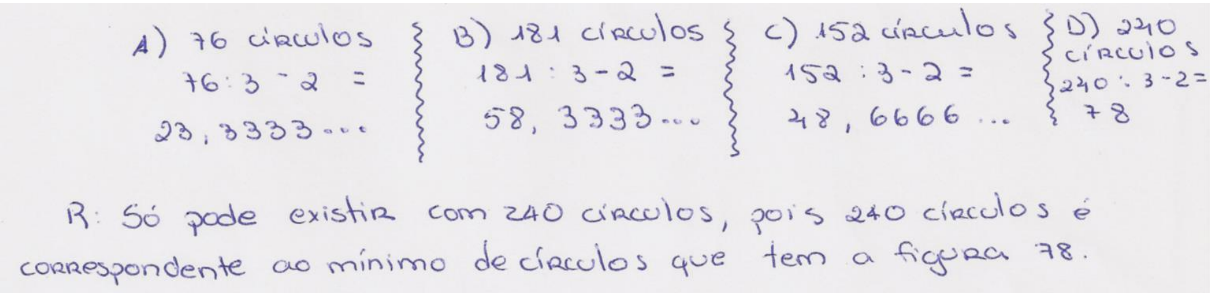
Exemplo 9



No que diz respeito à última alínea desta tarefa, constatamos que se tratou da que mais registos em branco apresentou e com maior incidência entre os alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991). Nem todos os alunos que indicaram incorretamente a alínea anterior (opção da hipótese (B) $5n$) responderam a esta alínea, mas os que o fizeram, apontaram como solução a hipótese (D) $240\ círculos$, alegando que se tratava do «único divisor de 5», o que estaria certo se a opção escolhida na alínea b) também estivesse.

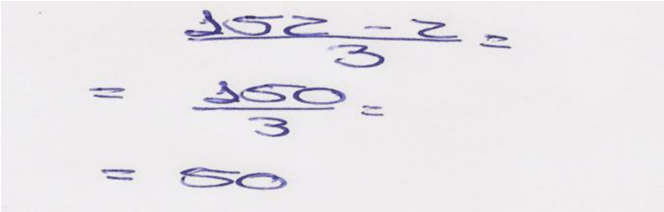
No caso do exemplo 10, trata-se de uma estratégia de resolução, que prevalece com mais incidência nos alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991), e que se enquadra no nível B do quadro dos descritores de desempenho (quadro 20). Observamos que o aluno não foi capaz de operar inversamente, pois não respeitou a prioridade das operações, em relação ao termo geral, obtendo, por isso, um resultado errado.

Exemplo 10



No que concerne aos registos que se enquadram no nível A, do quadro dos descritores do desempenho, o exemplo 11 é o que mais ocorre, entre os alunos abrangidos pelo Programa de 1991 (DGEBS, 1991). Como podemos constatar, tratam-se de cálculos corretos, mas sem qualquer pretensão ou explicação a acompanhar o raciocínio inerente ou justificação para o valor encontrado.

Exemplo 11

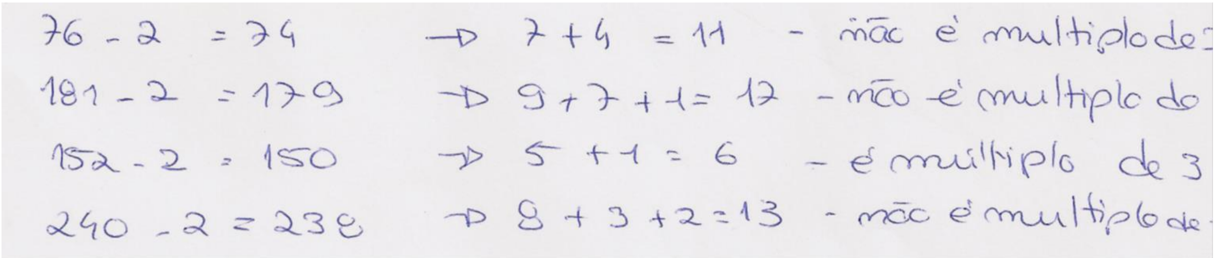


$$\frac{152-2}{3} = \frac{150}{3} = 50$$

Nos exemplos seguintes e que são muito raros entre os alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991), mas frequentes entre os do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), é visível a preocupação em explicitar a estratégia de averiguação se um número é ou não termo da sequência.

Quanto ao exemplo 12, e que é exclusivo dos alunos do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), é curioso verificar como o aluno depois de retirar duas unidades, averigua se o que sobra é ou não múltiplo de três, reconhecendo a sequência $3n$.

Exemplo 12



76 - 2 = 74 → 7 + 4 = 11 - não é multiplo de

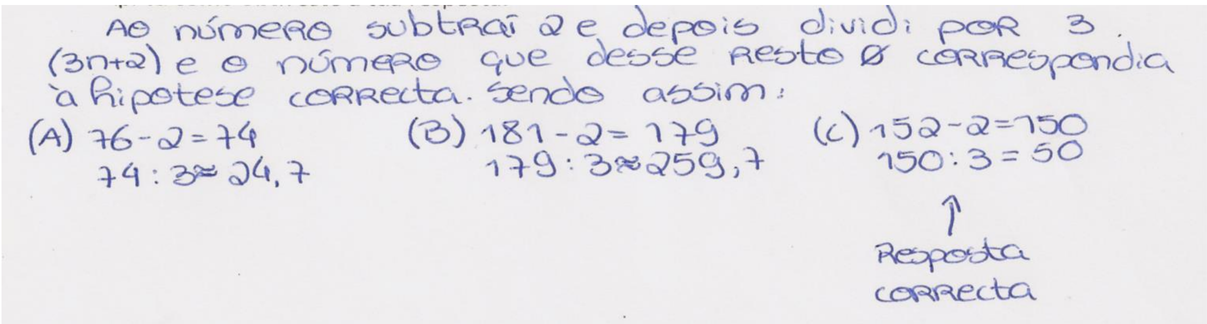
181 - 2 = 179 → 9 + 7 + 1 = 17 - não é multiplo de

152 - 2 = 150 → 5 + 1 = 6 - é multiplo de 3

240 - 2 = 238 → 8 + 3 + 2 = 13 - não é multiplo de

No caso dos exemplos 13 e 14, é claro que os alunos compreendem que se trata de uma sequência de números naturais, ao referirem-se ao resto zero ou à não possibilidade de um número decimal.

Exemplo 13



Ao número subtraí 2 e depois dividi por 3. (3n+2) e o número que desse resto Ø correspondia à hipotese correcta. Sendo assim:

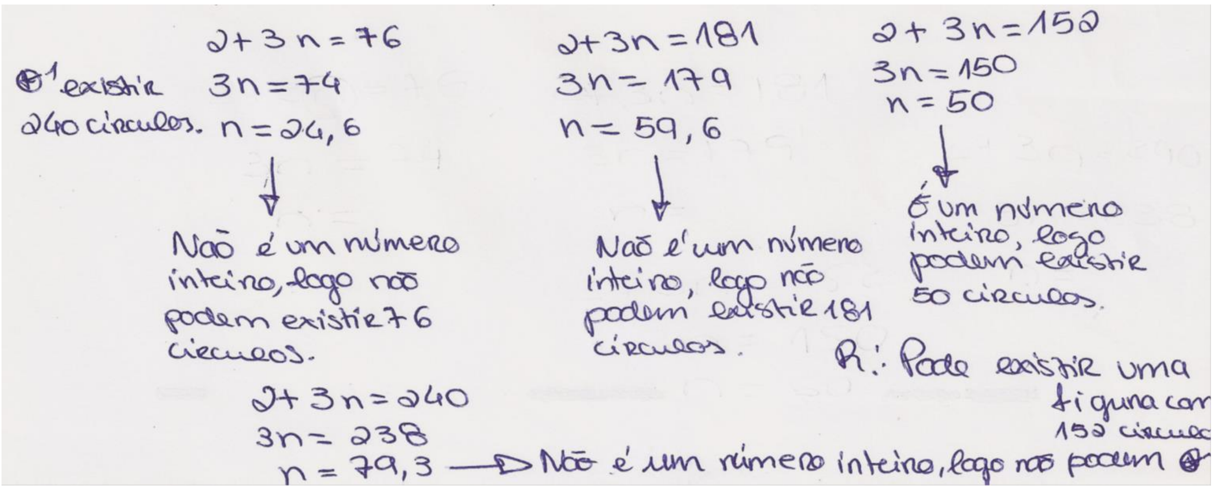
(A) 76-2=74
74:3≈24,7

(B) 181-2=179
179:3≈259,7

(C) 152-2=150
150:3=50

Resposta correcta

Exemplo 14


existir 240 círculos.

2+3n=76
3n=74
n=24,6
Não é um número inteiro, logo não podem existir 76 círculos.

2+3n=181
3n=179
n=59,6
Não é um número inteiro, logo não podem existir 181 círculos.

2+3n=152
3n=150
n=50
É um número inteiro, logo podem existir 50 círculos.

R: Pode existir uma figura com 152 círculos

2+3n=240
3n=238
n=79,3 Não é um número inteiro, logo não podem

Em suma, pareceu-nos que os alunos, de uma forma geral, se foram sentindo mais predispostos para a utilização de variadas estratégias de resolução, no decorrer das várias alíneas. No entanto, sentimos que os alunos do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) são mais autónomos, na procura dos diferentes caminhos e arriscam mais, pois são os que apresentam menos respostas em branco. Apesar da alínea a) procurar a proximidade com a sequência, para que os alunos se sintam mais capazes para as seguintes, nem todos o fizeram de igual forma. Assim, quando solicitamos que se faça a "verificação de que um número é ou não termo de uma sequência e a sua justificação", para que constituam "também um suporte para o processo de generalização" (Ponte et al., 2009, p. 17), os alunos do PMEB (Ponte et al., 2007) apresentam estratégias mais diversificadas, muitas vezes explicando o cálculo ou o esquema apresentado e justificando ideias.

Um outro fator, a ter em conta, foi a aplicação da cadeia de tarefas. Pareceu-nos que contribuiu para o desenvolvimento de estratégias de cálculo, bem como permitiu que os alunos, independentemente do programa a que se encontravam vinculados, sentissem o tópico como um todo. Conclui-se que uma cadeia de tarefas interrelacionadas proporciona um percurso de aprendizagem mais eficaz (Lopes, 2002).

7. **Tarefa**: Passeio a pé

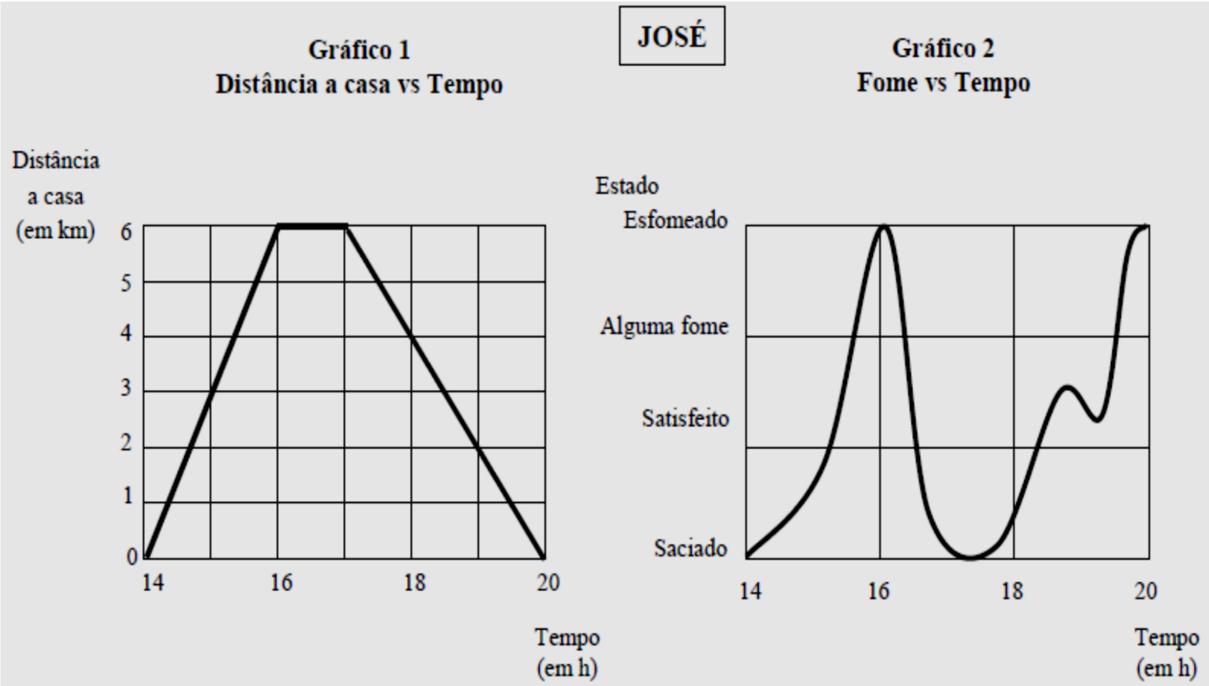
A tarefa pertencia à brochura disponibilizada pela DGIDC – Sequências e Funções e tinha como objetivo principal a leitura de gráficos, nomeadamente, da informação por eles fornecida. Era pedido aos alunos que contassem uma história sobre um passeio realizado a pé por duas pessoas – o José e a Mariana – e sobre os quais existiam dois gráficos: um referente à distância percorrida e o tempo e outro acerca da relação entre o estado da fome e o tempo, nos mesmos instantes. Assim, pretendia-se que os alunos “interpretassem cada um dos gráficos apresentados, estabelecessem relações entre eles e elaborassem uma história que esses gráficos pudessem representar” (Ponte et al., 2009, p. 114).

Relativamente às histórias recolhidas, optamos por analisá-las em separado, isto é, primeiro as relativas aos gráficos do José e depois as da Mariana. O trabalho realizado pelos alunos decorreu em grupo de quatro elementos ou em pares.

A tarefa principiava com o seguinte texto

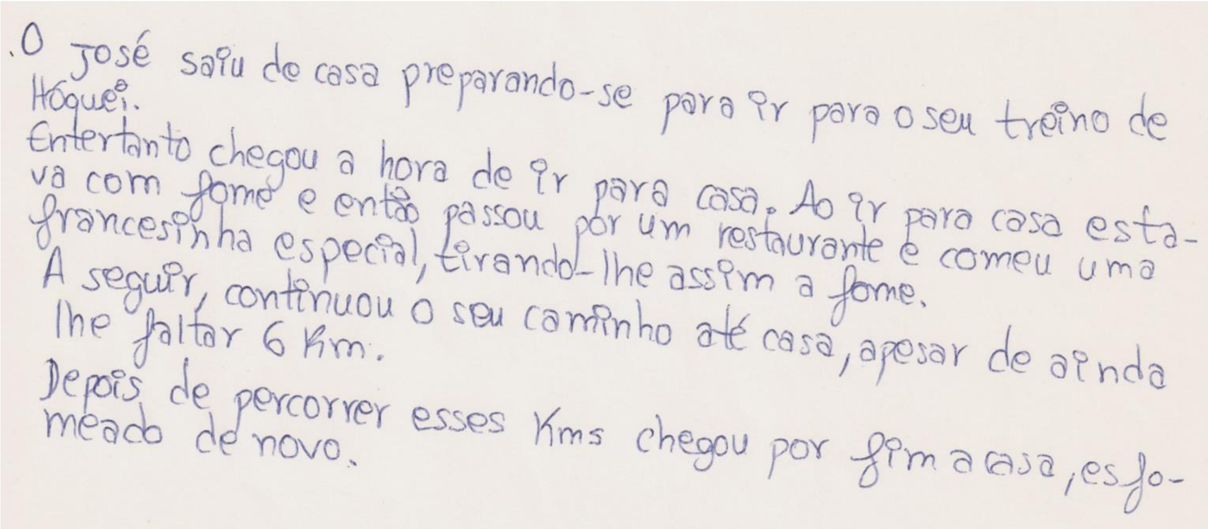
> Observa os quatro gráficos que se seguem e, com base na informação que eles contêm, escreve uma história sobre os passeios a pé realizados por José e Mariana.

e respeitantes ao José, os gráficos eram os seguintes



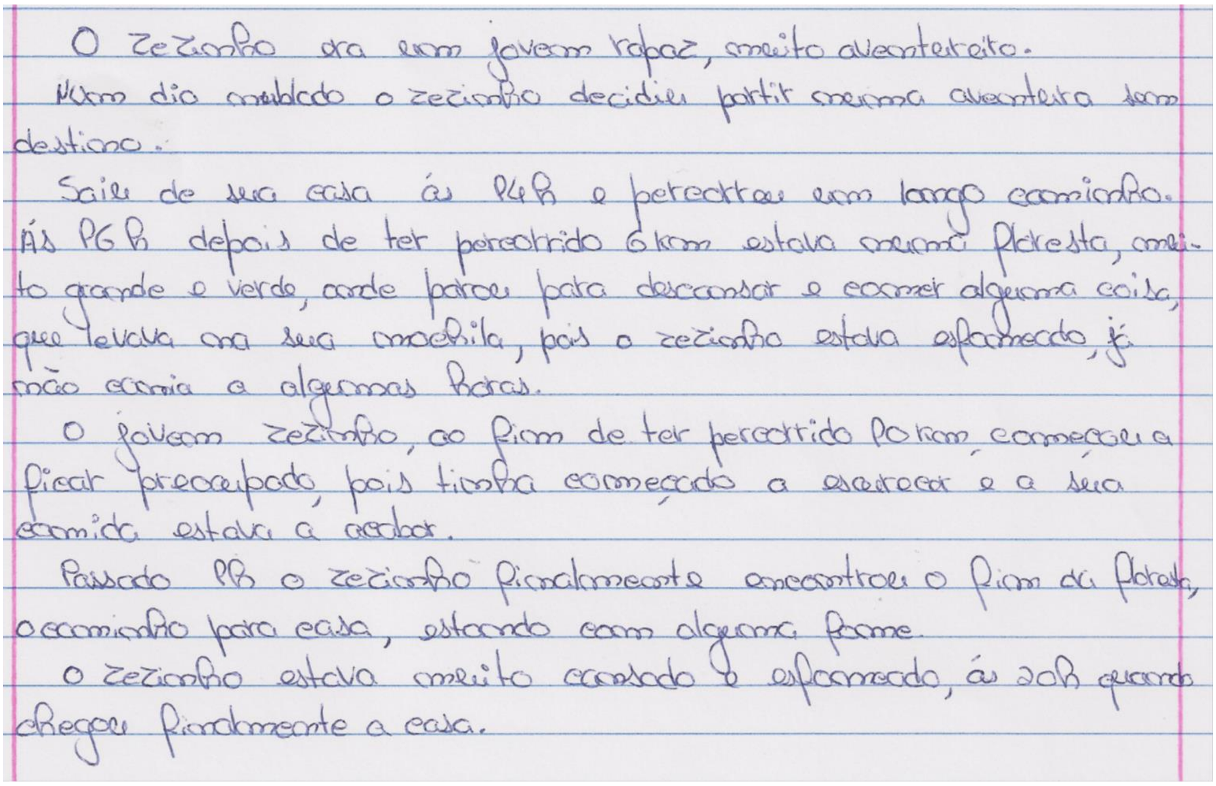
Os exemplos 1 e 2 são bastante comuns, principalmente entre os alunos do Programa de 1991 (DGEBS, 1991). Quando lhes é pedido que contem uma história, preocupam-se mais com detalhes, que tornem a história colorida, do que em comunicarem, por escrito, as ideias matemáticas subjacentes aos gráficos. Nestes exemplos, é visível que pouca informação é traduzida dos gráficos. A indicação de valores é escassa e, por vezes, estão errados, bem como não são referidas as grandezas e as suas relações.

Exemplo 1



O José saiu de casa preparando-se para ir para o seu treino de Hóquei.
Entretanto chegou a hora de ir para casa. Ao ir para casa esta-va com fome e então passou por um restaurante e comeu uma francesinha especial, tirando-lhe assim a fome.
A seguir, continuou o seu caminho até casa, apesar de ainda lhe faltar 6 km.
Depois de percorrer esses Kms chegou por fim a casa, esfo-meado de novo.

Exemplo 2



O Zezinho era um jovem rapaz, muito aventureiro.
Num dia nublado o zezinho decidiu partir numa aventura sem destino.
Saiu de sua casa ás 14h e percorreu um longo caminho.
Ás 16h depois de ter percorrido 6 km estava numa floresta, mui-to grande e verde, onde parou para descansar e comer alguma coisa, que levava na sua mochila, pois o zezinho estava esfomeado, já não comia a algumas horas.
O jovem zezinho, ao fim de ter percorrido 10 km, começou a ficar preocupado, pois tinha começado a escurecer e a sua comida estava a acabar.
Passado 18h o zezinho finalmente encontrou o fim da floresta, o caminho para casa, estando com alguma fome.
O zezinho estava muito cansado e esfomeado, ás 20h quando chegou finalmente a casa.

No exemplo 3, já é possível ler algumas coordenadas de pontos específicos. No entanto, o aluno não soube indicar corretamente a sua leitura. Não se apercebe que às 16 horas, o José tinha percorrido seis quilómetros e não três, ou às 19 horas estava a dois quilómetros de casa e não três. No fim, indica, erradamente, que a duração total do passeio foi de sete horas. Este é um exemplo clássico de como os alunos interpretam erradamente gráficos e, novamente, foi mais notório entre os alunos não abrangidos pelo Programa de 2007 (Ponte et al., 2007).

Exemplo 3

O José saiu de casa às 14:00 h, para ir dar um passeio. Começou a ficar com fome e decidiu ir ao Super-mercado, para chegar ao Super-mercado tinha de percorrer 3 Km. Quando chegou ao Super-mercado eram 16:00 h e ele estava esfomeado. Demorou 1 hora a comprar a comida e a comer. Às 17:00 h já estava saciado e continuou o seu passeio. Às 19:00 h, o José já estava a sentir necessidade de comer, mas não parou em lado nenhum, esperou até chegar a casa, só faltavam 3 Km. Quando chegou a casa eram 20:00 h e ele estava esfomeado. O José neste dia percorreu 12 Km em 7 horas.

A propósito da criação de histórias, mais ou menos complexas, mas não plausíveis, temos o exemplo 4. Nele, o aluno indica como tempo de duração do lanche e do jogo de futebol, uma hora, nem se apercebendo da falta de coerência com a realidade. Também não existe qualquer referência a intervalos crescentes, decrescentes ou constantes do gráfico.

Exemplo 4

- O José saiu de casa com os amigos para irem ver o jogo de futebol Benfica – Braga que começava 16 horas. De casa até ao estádio percorreram 6 km, quando lá chegaram eram ás 16 horas certas, estavam esfomeados, então foram lanchar ao bar muito rápido para verem o inicio do jogo. Às 17 h o jogo terminou, o José e os amigos voltaram para casa satisfeitos ás 18 h só tinham percorrido 2 km estando a ficar com alguma fome. Para chegarem a casa ainda faltava percorrer 4 km, às 20 h chegando finalmente a casa, muito cansados e esfomeados foram logo jantar

Quanto ao exemplo 5, a sua apresentação difere das anteriores, pois o aluno optou por elaborar uma tabela, que reunisse os dados dos dois gráficos. Mas, apesar da leitura de alguns dos pontos estar correta, como não «conta» a história por palavras suas, ficamos sem saber, por exemplo, se o José parou para comer os crepes ou se os comeu em andamento, o que torna a história menos verídica.

Exemplo 5

No sábado passado o José recebeu em sua casa os seus primos vindos de França. Como eles não conheciam Sintra (a cidade onde o José vivia), almoçaram e às 14h seguiu-se uma visita guiada à cidade.

Acabando de almoçar às 13:45h, começaram a visita às 14h.

O horário das paragens está no seguinte gráfico:

Horas	Km casa	Locais	Fome
14h	0	Casa	saciado
15h	3	Palácio da Pena	satisfeito
16h	6	Jardim da Pena	esfomeado
17h	6	Jardim da Pena	saciado
18h	4	Castelo dos Mouros	saciado
18:30h	3	Crepes	satisfeito
19h	2	Câmara Municipal	satisfeito
20h	0	Casa	esfomeado

Relativamente ao exemplo 6, é de salientar a referência ao ocorrido no intervalo entre as 18 horas e as 20 horas (há uma diminuição do estado da fome devido à ingestão de doces). Os alunos explicam a diminuição de valores, associando os gráficos e as suas características, influenciando assim a sua história. No entanto, existem muitos fatores passiveis de serem referidos que, uma vez mais, não o são.

Exemplo 6

Visita do Papa José Bento XIX

Durante a visita papal a Portugal, foi preparado um percurso a cumprir na procissão das velas, onde o papa José Bento ia saudar os Portugueses.

No dia 13 de Maio, em Fátima, acompanhado pelos seus bispos, o papa, saiu da Santa Igreja de Fátima onde tinha almoçado e percorreu em duas horas seis quilómetros, saudando e abençoando o povo Portugues.

Terminando esse percurso, o Papa comeu um lanche, e logo se restabeleceu, passando assim uma hora.

Continuou esse percurso de volta à Santa Igreja. A duas horas da Santa igreja o papa voltou a comer doces oferecidos pelos seus acompanhantes e ficou de novo satisfeito.

Passando uma hora a caminhar chegou à sua residência, onde jantou e se preparou para partir com destino ao Porto.

No exemplo 7, o aluno compreende a diferença entre a velocidade, apesar de nunca mencionar a palavra propriamente dita, nas duas primeiras horas e nas três últimas horas, pois refere que, para a mesma distância percorrida, um dos intervalos de tempo é superior.

Exemplo 7

De minha casa ao Parque da Cidade são cerca de 2 horas a pé. A minha escola organizou uma excursão para os alunos terem oportunidade de o visitar. Está tudo pronto: lancheira, sapatilhas, mochila, fato-de-treino, casaco, etc. Estou muito entusiasmado!

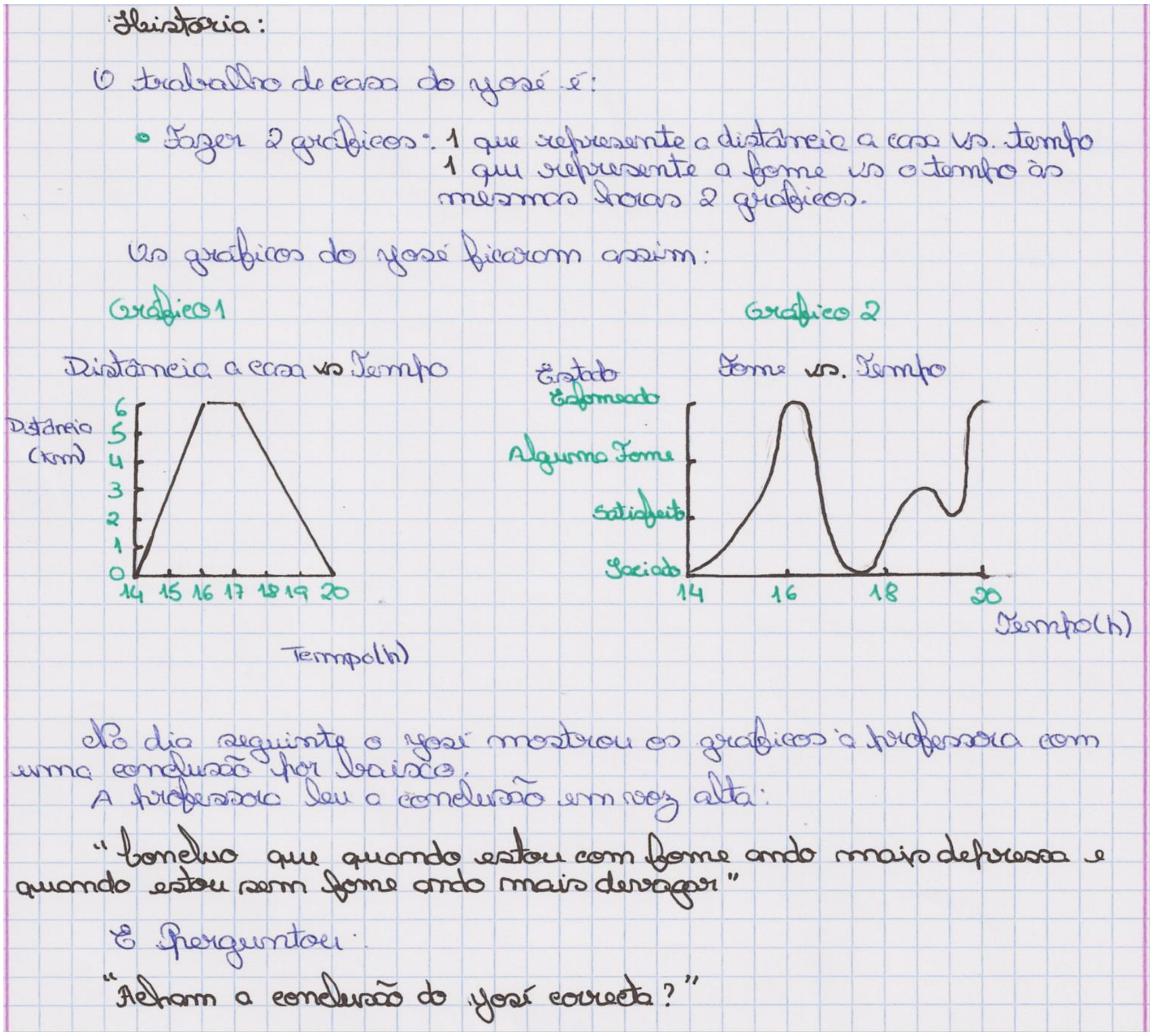
Eram 14:00 horas quando partimos, já tinha almoçado em casa, a comida estava óptima.

Durante a viagem, vimos inúmeras coisas bonitos, mas o melhor foi quando, por volta das 16:00 horas chegámos ao parque. Lá, estivemos cerca de 1hora, onde brincámos muito e onde parámos para lanchar, e já estava esfomeado!

Iniciámos a viagem de regresso por volta das 17:00 horas. À medida que o tempo ia passando, a fome ia aumentando. Demorou mais tempo pois estávamos muito cansados e todos íamos mais devagar. Às 19:50 chegámos à escola e de seguida, fui para casa. Cheguei lá esfomeado.

De seguida, apresentamos o exemplo 8, pertencente a um aluno do Programa de 1991 (DGEBS, 1991) de Matemática. Este caso, que não é único dentro do género, distingue-se não só pela sua originalidade, como também por não fazer qualquer referência matemática. O aluno limitou-se a copiar os gráficos, não existindo qualquer notação, simbologia ou ideia matemática.

Exemplo 8



História:

O trabalho de casa do José é:

- Fazer 2 gráficos: 1 que represente a distância a casa vs. tempo
  1 que represente a fome vs o tempo às mesmas horas 2 gráficos.

Os gráficos do José ficaram assim:

No dia seguinte o José mostrou os gráficos à professora com uma conclusão por baixo.
A professora leu a conclusão em voz alta:

"Concluo que quando estou com fome ando mais depressa e quando estou sem fome ando mais devagar"

E perguntou:

"Acham a conclusão do José correta?"

Entre outros, o exemplo 9 é o mais representativo dos registos entre os alunos do PMEB (Ponte et al., 2007). Apesar de estarem indicadas algumas coordenadas de pontos específicos e relações entre os dois gráficos, não é referida a variação existente em alguns intervalos de tempo ou ainda a duração total do passeio.

Exemplo 9

A caminhada de José

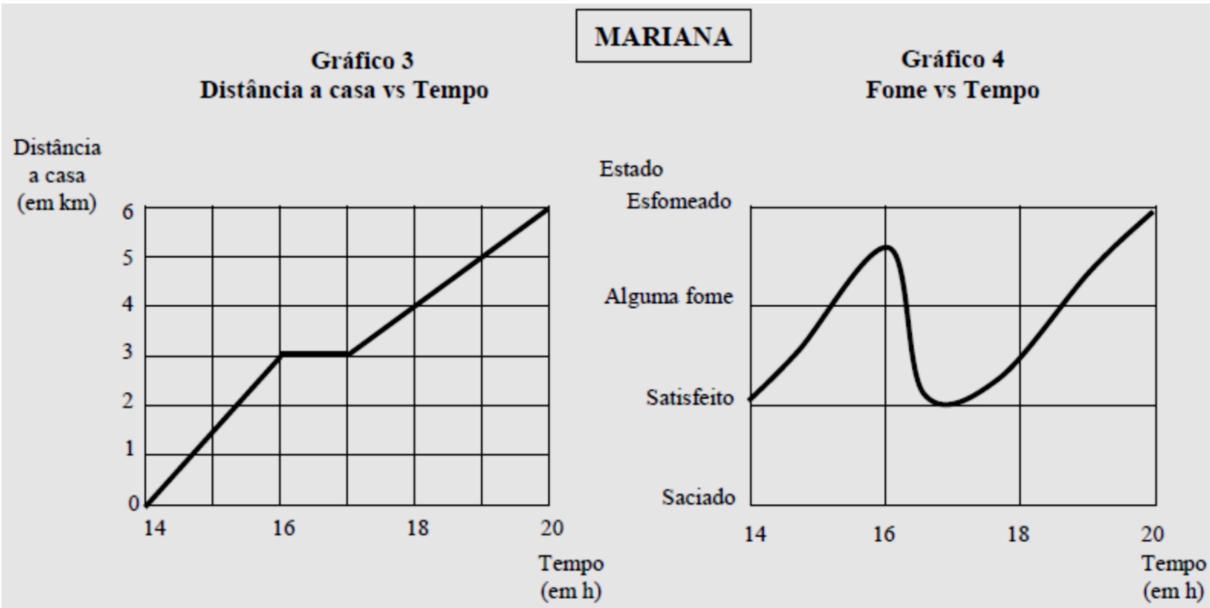
Todas as tardes de Inverno, o José tinha o hábito de ir passear pela marginal da sua cidade. Esse paseio começa às 14 horas e termina às 20 horas.

Naquele domingo, o José estava saciado, pois tinha acabado de almoçar.

Começou a sua caminhada às 14 horas. Já eram 15 horas e o José já tinha andado três quilómetros desde que saiu de casa. Passado uma hora encontrava-se a 6 Km de casa, e como já tinha andado bastante parou para descansar e para lanchar, pois estava esfomeado. Às 17 horas recomeçou a sua caminhada, mas como estava a ficar escuro decidiu voltar para casa. Às 18 horas já estava a 4 Km de casa.

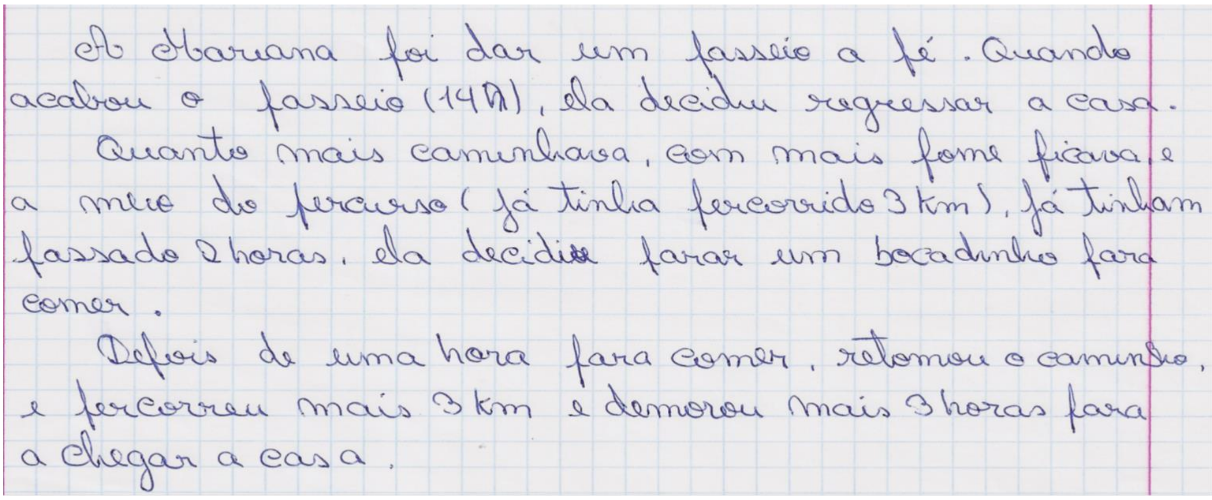
O José andou devagar, por isso, ainda estava satisfeito e encontrava-se muito perto de casa. Às 20 horas finalmente chegou a casa e foi logo comer, pois estava esfomeado.

Quanto à história relativa à Mariana, os alunos tinham de se basear nos gráficos seguintes:



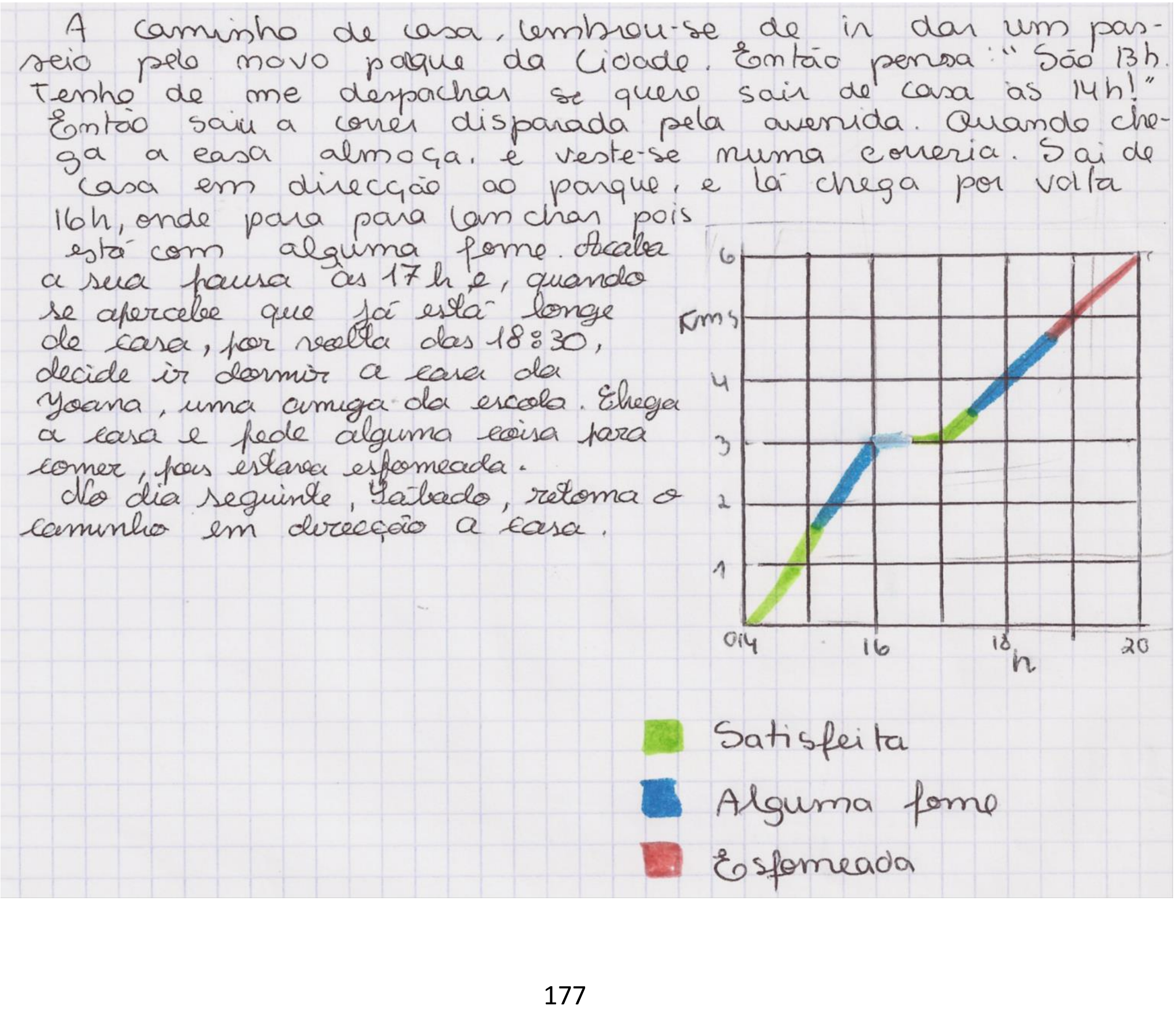
No exemplo 10, constatamos incompatibilidade com a informação do gráfico. O aluno não compreende que o ponto de partida é a casa da Mariana, ou que o ponto de chegada não coincide com o inicial. Este registo reúne vários dos erros cometidos habitualmente nas histórias.

Exemplo 10


A Mariana foi dar um passeio a pé. Quando acabou o passeio (14h), ela decidiu regressar a casa.
Quanto mais caminhava, com mais fome ficava, e a meio do percurso (já tinha percorrido 3 km), já tinham passado 2 horas, ela decidiu parar um bocadinho para comer.
Depois de uma hora para comer, retomou o caminho, e percorreu mais 3 km e demorou mais 3 horas para a chegar a casa.

Em relação ao exemplo 11, existem algumas referências a situações temporais não existentes nos gráficos, mas que, na nossa opinião, surgem com o intuito de tornar a história mais credível. É interessante o gráfico elaborado, pois é uma composição dos dois gráficos num só.

Exemplo 11


A caminho de casa, lembrou-se de ir dar um passeio pelo novo parque da cidade. Então pensa: "São 13h. Tenho de me despachar se quero sair de casa às 14h!" Então saiu a correr disparada pela avenida. Quando chega a casa almoça, e veste-se numa correria. Sai de casa em direcção ao parque, e lá chega por volta 16h, onde para para lanchar pois está com alguma fome. Acaba a sua pausa às 17h e, quando se apercebe que já está longe de casa, por volta das 18:30, decide ir dormir a casa da Yoana, uma amiga da escola. Chega a casa e pede alguma coisa para comer, pois estava esfomeada.
No dia seguinte, Sábado, retoma o caminho em direcção a casa.

No próximo exemplo (12), o aluno reconhece a diferença entre a relação tempo e distância percorrida entre a primeira parte do passeio e a segunda (após a paragem).

Exemplo 12

A Mariana foi dar um passeio a pé. Saiu de casa às 14 h. Passado 2 h ela tinha andado 3 kilómetros, e já estava com alguma fome, quase esfomeada. Parou uma hora para comer alguma coisa e também para descansar um bocadinho. Mas quando saiu da confeitaria não viu o boraco, pois já tinha esgotado os bolos da confeitaria, portanto pôs o pé dentro do boraco, caiu e torceu o pé. Portanto agora andava ainda mais devagar, mas mesmo assim quis prosseguir o seu passeio. Começou novamente a andar às 17 h, e já estava satisfeita pois tinha acabado de lanchar. Passou por Braga, Porto e Coimbra e depois disso já tinha andado mais 2 kilómetros. Faltava agora 1 kilómetro para chegar ao seu destino. Já estava da marca e já esfomeada, chegou a casa finalmente às 20 h. E já merecia pois foi um passeio longo. E assim foi o passeio da Mariana.

No que diz respeito ao exemplo 13, um registo de um aluno do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007), para além da história pitoresca, é percetível o reconhecimento da velocidade, na segunda parte do passeio, quando o aluno afirma que ia a um quilómetro por hora (1 km/h).

Exemplo 13

O Passeio (Mortal) da Mariana

Depois de almoçar a Mariana saiu de casa, para ir dar um passeio. Das duas uma, ou a Mariana é uma baleia ou não tem uma perna, porque nas primeiras 2 horas de passeio percorreu apenas 3km.

Ficou com fome, por isso decidiu parar para comer por volta das 16 horas. Não se conseguia entre Mc'Donalds e o Burger King, por isso foi aos dois, daí ter demorado 1 hora para lanchar.

Como estava muito cheia andou muito devagar, a 1km/h durante 3 horas. Depois de ter feito uma corrida com um caracol, que perdeu, chegou finalmente ao seu destino, por volta das 20 horas: A maior PIZZA HUT da cidade. Comeu todo o stock da loja e depois teve um enfarte miocárdio e bateu a bota devido a tudo o que tinha comido.

No caso do exemplo 14, estamos perante algumas incoerências, como nas menções ao intervalo entre as 16 e 17 horas, já que a velocidade foi constante. Mesmo assim, os alunos têm noção que a Mariana não volta à posição inicial.

Exemplo 14

A Mariana fez uma aposta com os amigos. Ela apostou que con-
seguia caminhar desde sua casa até ao centro comercial. A dis-
tância até lá era de 6 km.

Às 2 horas da tarde ela almoçou uns ovos mexidos e ficou
satisfeita. De seguida começou a sua caminhada.

Este percurso era bastante estafante, mas, ela fez os pri-
meiros 3 km com alguma rapidez. Às 4 horas da tarde parou
pois estava com alguma fome, mas, ela tinha um problema. Tinha-
-se esquecido de levar comida e apenas tinha 3 €.
Caminhou mais um pouco e encontrou um "Macdonald's"
e comeu um "Happy Meal". Ficou satisfeita.
Às 5 horas da tarde retomou a sua caminhada e com um
ritmo vagaroso foi caminhando até chegar finalmente ao
centro comercial.

Em resumo, não houve nenhum registo que cruzasse a história do José com a da Mariana, isto é, que analisasse os quatros gráficos em simultâneo. No estabelecimento de relações gráficas (distância a casa vs tempo e fome vs tempo) verificamos que os alunos são capazes de o fazer. No entanto, para além da dificuldade em comunicarem matematicamente, por escrito, nem sempre conseguem perceber todas as informações que os gráficos possuem. Outra questão interessante, que constatamos, foi o facto de, muitas vezes, os alunos terem mais preocupação em inventar pormenores na criação da história, do que em transmitir a situação gráfica. Assim, e no que diz respeito aos aspetos específicos, que esperávamos que os alunos salientassem, tais como, tempos e locais de partida e chegada, distâncias percorridas, períodos em que a distância a casa é constante e velocidades, verificamos que apresentam grandes lacunas, embora sejam mais visíveis, de forma notória, entre aqueles que ainda não estão abrangidos pelo Programa de 2007 (Ponte et al., 2007).

8. **Tarefa**: Análise de gráficos

A tarefa que se reportava ao tópico "Funções e Equações" era composta por seis alíneas e foi pensada para a produção escrita. No entanto, não nos foi possível a recolha das respetivas composições, em suporte papel, devido a questões temporais e ao condicionalismo do cumprimento do programa. Não obstante, um professor disponibilizou-se para trabalhar a tarefa, numa turma de vinte e sete alunos, projetando-a e discutindo, em grande grupo e selecionando, para cada alínea, um grupo de quatro ou cinco alunos. O professor caraterizou a turma como de «bons miúdos», mas cujo aproveitamento ficava aquém do esperado, principalmente pela falta de estudo regular. A tarefa principiava da forma seguinte

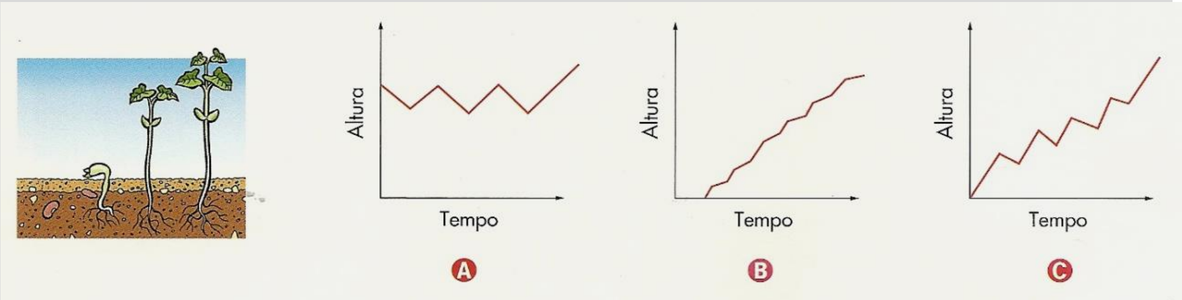
Observa os gráficos e decide qual o que se adapta melhor a cada história. Elabora uma **composição** onde refiras **as opções erradas** e, para cada uma delas, apresenta pelo menos uma razão pela qual essa opção é rejeitada.

Figura 26 - Tarefa: Análise de gráficos

Para cada alínea, era apresentada uma história ou experiência e três opções de gráficos. A novidade desta tarefa residia no facto de os alunos terem de argumentar as opções erradas e não justificar a correta, o que começa a surgir cada vez mais em testes intermédios e/ou exames. Todavia, ainda não é um hábito frequente nas avaliações sumativas.

O professor iniciou a projeção da primeira alínea.

a) A Babi plantou um feijão, germinou e cresceu. A sua altura foi medida diariamente.



De seguida, deu início à primeira discussão.

Excerto 1

Prof: "Agora que já vimos em que consiste a experiência, alguém quer dizer alguma coisa?

Aluno A: "Eu já sei qual é o gráfico certo. É o …"

Aluno B (interrompendo): “ O professor já disse que não é para dizer qual é o certo!”

Aluna A: “ Pois foi. É o hábito de dizer o que está certo. Então posso dizer o gráfico A está errado.”

Através da leitura deste excerto, podemos constatar que, para os alunos não é uma prática corrente apresentarem razões para a explicação de opções erradas. Habitualmente, escolhem a correta, justificando-a.

Excerto 2

Prof: “ Achas? Porquê?”

Aluno A: “ Porque a planta não cresce e minga da mesma forma.”

Aluno B: “ Também podemos dizer outra coisa. Quando plantamos um feijão, ele fica por baixo da terra, logo ainda não tem altura, como diz no gráfico A.”

Aluno C: “ Então já sei uma coisa que não pode ser no gráfico C. Como o aluno B disse, ainda demora a germinar e depois a crescer, ou seja, a vermos a planta cá fora. No gráfico C, tínhamos de ter plantado uma planta e não um feijão.”

Aluno D: “Agora é que eu percebi porque é que o gráfico B não começa no princípio.”

Muitas vezes, ao estabelecerem a estratégia de resolução, os alunos são confrontados com argumentos matemáticos, o que lhes permite entender mais propósitos, previstos ou não, nos problemas.

Excerto 3

Prof: “No princípio?”

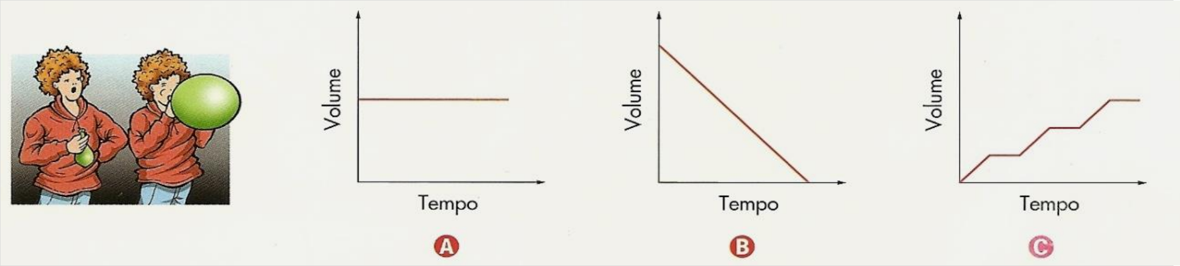
Aluno D: “ Sim, já sei que tenho de dizer direito, na origem.”

Prof: ” Então todos concordam com os argumentos apresentados?Será que podemos dizer mais alguma coisa que ajude a rejeitar ainda mais algum dos gráficos?”

Aluno E: “Podemos dizer que o gráfico C não pode ser porque a planta não - vou tentar utilizar linguagem direitinha – tem intervalos de crescimento e de diminuição sucessivamente.”

De uma forma geral, os alunos souberam quando aplicar uma linguagem matemática correta. Entretanto, o professor já estava a projetar a alínea b).

b) A Babi está a encher um balão.



Excerto 1

Prof: “ Quem quer começar a dizer alguma coisa sobre esta alínea?”

Aluno A: “ Eu acho que os gráficos errados são o B e o C.”

Aluno B: “O C? Mas o C é o que está certo, não é professor?”

Prof: “ Calma. Vamos fazer o seguinte: primeiro vamos falar sobre o gráfico B. Todos concordam que este gráfico tem de ser rejeitado?”

Neste excerto, podemos verificar como foi necessária a intervenção do docente, na organização da discussão.

Excerto 2

Aluno C: “Claro. Então ela vai bufando, o ar aumenta dentro do balão e o volume diminui? Não pode ser.”

Aluno A: “ Pois, todos sabemos porque não pode ser o B mas eu acho que o C também não pode ser. Para mim o que está certo é o gráfico A.”

Prof: “ Porque é que tu dizes que o gráfico C não está certo?”

Aluno A: “ Não sei, mas como eu acho que o que está certo é o A…”

Pela leitura do excerto anterior, percebemos que os alunos compreenderam uma situação do dia-a-dia, através do entendimento da relação entre a entrada de ar e o volume do balão.

Excerto 3

Aluno D: “ Olha que o gráfico A não pode ser, pois não professor?”

Prof: “ Já vos disse muitas vezes que escusam de tentar confirmar comigo quando estamos a discutir. Têm de saber defender os vossos argumentos.”

Aluno D: “ Ok, o gráfico A não pode ser por causa da reta do volume.”

Prof: “ Explica-te melhor.”

Aluno D: “ Aquela reta do volume…vê-se logo.”

Aluno E: “ Eu acho que ele quer dizer que, quando ela enche o balão, o ar não entra da mesma maneira, então o volume não pode ser sempre igual quando ela está a encher.”

De uma forma geral, os alunos continuam a requisitar a confirmação do docente, perante as suas afirmações. Neste excerto, também é entendível que os discentes compreendem que o gráfico não pode ser uma reta.

Excerto 4

Prof: “ Então, o gráfico A está correto ou não, aluno A?”

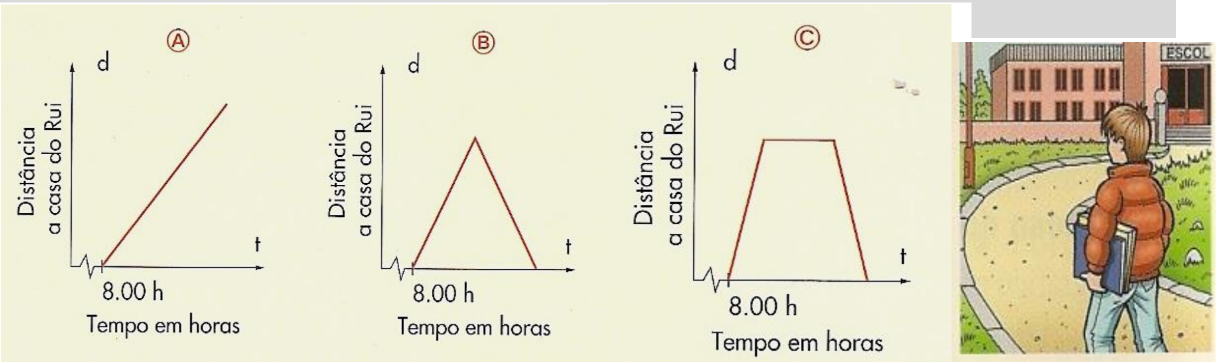
Aluno A: “ Agora já percebi que não está. Mas o professor então podia explicar porque é que o C está correto.”

Prof: “ Quem ajuda?”

Aluno E: “ Ela tem de fazer pausas para respirar, por isso é que tem bocados constantes e como ela vai enchendo, o volume vai aumentando.”

No excerto anterior, constatamos a dificuldade que os alunos têm em entender graficamente a função constante. Por esta altura, o professor iniciou a projeção da terceira alínea

c) O Rui saiu de casa às 8h 00 min e dirigiu-se a pé para a escola que fica a 2 Km. Ficou na escola até às 12h 30 min e depois regressou a casa para almoçar.



Prof: “ Vou fazer uma pergunta composta por duas partes. Para a primeira, responde um aluno e depois outro tem de responder em função da resposta do colega. Um gráfico errado e porquê? ”

Aluno A: “ O gráfico A.”

Aluno B: “ Porque ele volta a casa para almoçar e, de acordo com o gráfico, ele não volta a casa.”

Prof: “ Qual é a outra hipótese errada?”

Aluno C: “ O gráfico B.”

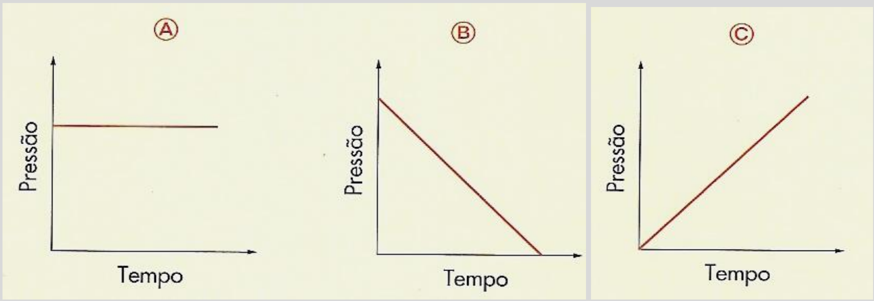
Aluno D: “ O gráfico B?”

Prof: “ Não concordas?”

Aluno D: “ Bem olhando melhor, até concordo. Porque ele vai para a escola, fica lá e depois é que volta para casa. No B, ele vai à escola e volta logo.”

Através da leitura do excerto anterior, podemos verificar uma situação de questionamento orientado pelo professor, para uma discussão e orientação eficaz, tendo por base os objetivos a atingir definidos para a tarefa. A seguir, o professor projeta a alínea d).

d) O pneu do carro do pai do Gonçalo furou-se e está a perder ar.



Prof: " Vou ser eu a dar a primeira rejeição. Um gráfico errado é o B."

Aluno A: " Lá vem o professor com as suas ratoeiras. Esse é o que está certo. Um dos errados é o A."

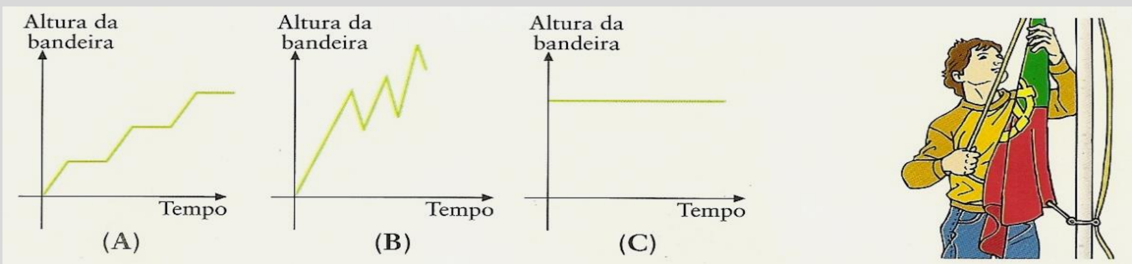
Aluno B: " Pois é. Quando se tem um furo, a pressão do pneu baixa."

Aluno C: " Podemos dar a mesma razão em dois gráficos diferentes? É que o C também não pode ser pela mesma coisa. O gráfico não pode ser crescente se o pneu está a perder pressão."

Prof: " Ou vocês estão a ficar mais perspicazes ou as alíneas estão a ser muito fáceis…Vejamos a seguinte."

Através da constatação do erro, o professor leva os alunos a concluírem as opções corretas, recorrendo a argumentos matemáticos nas justificações. No quadro, aparece a alínea e) projetada.

e) O Gonçalo está a hastear uma bandeira.



Excerto 1

Prof: " Relativamente a esta alínea, para justificar a rejeição dos gráficos, têm de utilizar palavras como crescente, decrescente, constante…"

Aluno A: “ Pois…linguagem matemática. Eu acho a nossa mais fácil! Rejeito o C. Mas para justificar é mais complicado na linguagem da matemática.”

Aluno B: “ Basta dizer que o C não pode ser porque é um reta constante o que vai contra a história pois se o Gonçalo está a hastear, a bandeira ainda não está em cima, como diz o gráfico C. Explicando melhor, se fosse o C, a bandeira já estava hasteada e a altura era uma reta constante. O aluno A tem razão, é mais difícil justificar a nossa opinião se tivermos de ser rigorosos na linguagem como o professor quer.”

Prof: “Mas já vos expliquei que quanto mais corretos forem a falar matematicamente, maior é a probabilidade de terem sucesso na disciplina e nos exames. Ainda só justificaram uma incorreta, falta outra.”

Podemos constatar, através da análise deste excerto, que o professor recorreu a um discurso orientado para uma linguagem matemática, apesar de os alunos evidenciarem a sua insatisfação, por terem de o fazer.

Excerto 2

Aluno C: “ Eu rejeitava o gráfico B.”

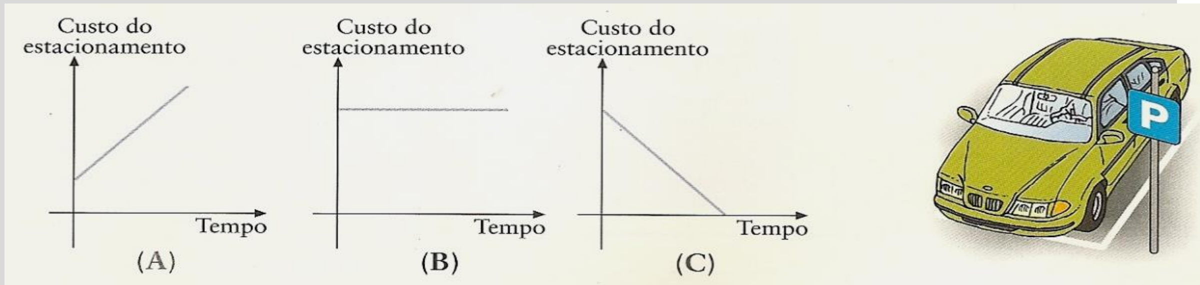
Prof: “ E quais eram as tuas razões?”

Aluno C: “ Se fosse esse o correto, ele estava a perder tempo porque subia e descia, subia e descia, …”

Aluno D: “ Olha a linguagem…não pode ser o B porque se ele está a hastear, ele iça – reta crescente, faz uma pausa – reta constante, iça – reta crescente, faz pausa – reta constante e por aí fora até a bandeira estar toda em cima. Nessa altura, a altura fica sempre constante.”

O docente teve necessidade de voltar a insistir na utilização da linguagem matemática, a qual acaba por ser aplicada corretamente. O professor projeta a última alínea no quadro, a alínea f)

f) A mãe da Babi estacionou o carro num parque de estacionamento.



Excerto 1

Prof: " Para esta última alínea, vamos fazer uma coisa: alguém vai fazer o papel de professor. Já sabem que não podem dizer se está certo ou errado e têm de fazer perguntas, pedir para justificar melhor, …"

Aluno A: " Ui…vai ser bonito. Fica o aluno B como professor que ele sabe falar direito."

Aluno B: " Quem quer dizer qual é o primeiro gráfico que rejeita?"

Através da leitura deste excerto, podemos constatar uma estratégia de interação na sala de aula, quando o professor recorre a uma troca de papéis, levando o aluno a sentir-se como centro do processo de ensino-aprendizagem.

Excerto 2

Aluno C: " Eu sei que o gráfico C não pode ser."

Aluno B: " Porquê?"

Aluno C: " Porque quando um carro está num parque de estacionamento, está sempre a pagar, não vai pagando menos."

Aluno B: "Em linguagem matemática?"

Aluno C: " Ele é pior que o professor! Bem, se um carro está num parque, a reta do custo tem de ser crescente e não decrescente. Está melhor assim?"

Aluno B (virado para o professor): " Está, não está?"

Prof: " Continuem."

Aluno B: " Ainda falta outro gráfico."

Aluno D: " Então não pode ser o B porque quando um carro está num parque, o custo está sempre a aumentar."

Aluno B: " De outra maneira…"

Aluno D: " O estacionamento, o custo dele, é uma reta crescente e não constante."

Após analisarem, interpretarem e argumentarem, os alunos estiveram mais à vontade na utilização da linguagem matemática, como podemos ver através da análise do excerto anterior.

Excerto 3

Prof: " Muito bem, agora que já analisamos todos os gráficos e rejeitamos as hipóteses erradas e as justificamos, alguém tem dúvidas ou quer fazer um comentário?"

Aluno A: " Eu achei mais difícil ter de justificar o que estava errado. É mais fácil dizer o que está certo. E também foi mais complicado quando o professor disse que tínhamos de utilizar linguagem matemática."

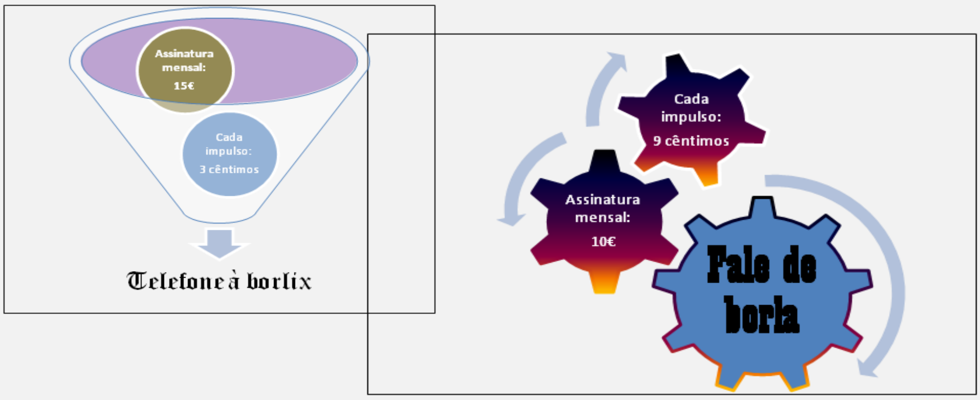
Em conclusão, a tarefa, que tinha sido planificada com o objetivo de recolher registos escritos, e que acabou por ser trabalhada numa turma, através da sua projeção, permitiu que os alunos interpretassem a variação de uma função, representada por um gráfico. A utilização de vocabulário próprio e ideias matemáticas foi visível, ao longo da tarefa, sendo os próprios alunos a exigirem-na. Pensamos que o facto de ter sido apresentada e discutida foi uma mais-valia para a sistematização. Apesar de não ter sido transcrito, o professor teve o cuidado de, no final, fazer uma síntese, salientando os aspetos principais de cada gráfico das várias alíneas, enquanto as ia projetando de novo. Também chamou a atenção para os intervalos onde a função era crescente, decrescente ou constante, ou seja, para a variação existente. No final, valorizou o trabalho dos alunos, por terem sido capazes de mostrarem as características principais dos gráficos. Por isso, somos da opinião de Ponte et al. (2009, p. 6), quando afirmam que " o momento de discussão coletiva é fundamental. É refletindo, confrontando as suas ideias com as dos outros, argumentando e analisando argumentos, que os alunos aprofundam e consolidam a sua aprendizagem".

3.2 Relatório matemático

Um outro instrumento, aplicado em contexto de sala de aula, foi o relatório matemático. Constatamos que se tratou de um dos instrumentos que maior desconfiança suscitou a alunos e professores. No entanto, foram aqueles, que ainda se encontravam no Programa de 1991 (DGEBS, 1991), quem mais entraves colocou à sua aplicação/elaboração. Pensamos que tal se deveu não só ao tempo despendido para a sua composição, mas também pela novidade e possibilidade de recorrência a máquinas calculadoras gráficas (estas não são de utilização comum, nas aulas do 3º ciclo do Ensino Básico, embora já muitos alunos as possuam, dada a perspetiva de continuação de estudos, no Ensino Secundário). Por tal, apenas foi possível recolher produções escritas em duas turmas, abrangidas pelo PMEB (Ponte et al., 2007), e pertencentes a dois professores diferentes. Assim, apesar da impossibilidade de comparação de relatórios entre alunos dos dois programas, iremos fazer o respetivo registo e análise, não só pela importância que o relatório matemático cada vez mais vai tendo, mas também pela riqueza que uma experiência destas tem em contexto de sala de aula.

Tal como já afirmamos, apenas duas turmas realizaram o relatório matemático, mas apenas numa foi possível estar presente no momento da aplicação, o qual teve a duração de duas aulas de noventa minutos, apesar de planificado para um bloco. De acordo com o professor, tratava-se de uma turma heterogénea, interessada e empenhada, sem problemas comportamentais, com alunos que vinham juntos, desde o 5º ano de escolaridade. O docente já tinha dado a indicação para trazerem as máquinas gráficas. Portanto, existiam pelo menos duas por grupo. O docente iniciou a aula dividindo os alunos em grupos de quatro, num total de sete. Distribuiu, em suporte de papel, a proposta, que foi adaptada do livro “Funções no 3º ciclo com tecnologia” (Mendes et al., 2002, p.35).

A Babi tinha na caixa do correio 2 panfletos de empresas telefónicas:



Ajuda a Babi a decidir por qual das operadoras optar. Utiliza tabelas e/ou gráficos para a ajudar. Existem diferenças entre os tarifários das duas empresas?

Em seguida, projetou uma estrutura hipotética, que o relatório final poderia ter, e que era semelhante à existente no capítulo 2 deste documento. Ainda informou os alunos que todos teriam de registar, no caderno diário, o trabalho produzido e que entregariam um só produto final por grupo. Os alunos iniciaram a leitura e, quase em simultâneo, registaram os dados fornecidos pelo problema. Vários grupos solicitaram a ajuda do professor. No entanto, o docente remeteu-os sempre para uma leitura mais atenta e discutida, entre todos os elementos do grupo. Quando chegou o momento de utilizarem a calculadora gráfica, o professor explicou como operar com as funções, projetando duas expressões que não correspondiam ao problema. Ensinou-os a trabalharem com o editor de funções $\boxed{\text{Y=}}$, fazendo a respetiva representação gráfica através da tecla $\boxed{\text{TRACE}}$, depois de terem dimensionado o gráfico no $\boxed{\text{WINDOW}}$ e utilizando as capacidades da calculadora gráfica para encontrarem a interseção entre as retas recorrendo a $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{5:}}$. Os alunos solicitaram a repetição de alguns passos e, para tal, o professor apelou aos alunos que já tinham entendido, que explicassem o procedimento aos colegas.

Nos relatórios elaborados pelos alunos, verificamos que todos eles o iniciaram indicando os objetivos, bem como os materiais utilizados para a sua elaboração.

Quanto às etapas do processo, os vários grupos optaram por as iniciar definindo analiticamente as expressões algébricas representativas de cada uma das redes telefónicas, como podemos observar no exemplo seguinte.

Borlix → Assinatura mensal 15€
Cada impulso 0,03€ } Função: $y = 0{,}03x + 15$
$\downarrow$ nº impulsos

Falo de borla → Assinatura mensual 10€
Cada impulso 0,09€ } Função: $y = 0{,}09x + 10$
$\downarrow$ nº impulsos

No entanto, apesar da explicação do professor através da máquina gráfica, alguns grupos elaboraram tabelas, procedimento habitualmente utilizado para a representação gráfica de funções.

1. Criar uma expressão para a primeira empresa (Telefone à Borlix)

$0{,}03i + 15 = t$

i = número de impulso
t = total a pagar no fim do mês

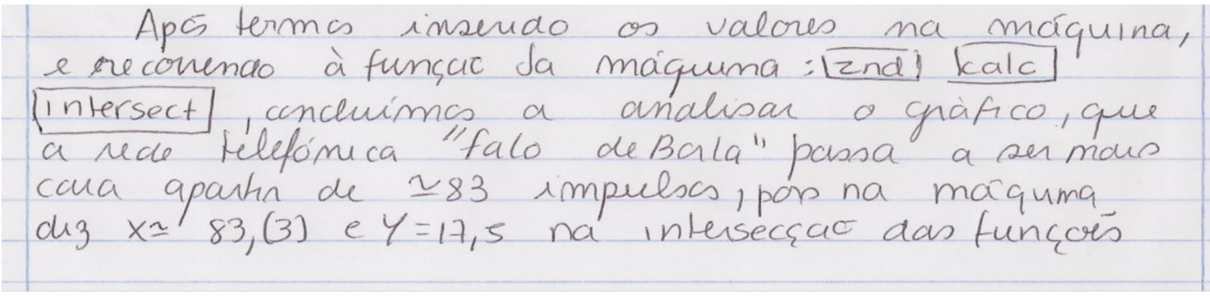
2. Passar a expressão para uma tabela

x	$y = 0{,}03x + 15$
100	$y = 0{,}03 \times 100 + 15$ $= 18$
200	$y = 0{,}03 \times 200 + 15$ $= 21$
300	$y = 0{,}03 \times 300 + 15$ $= 24$

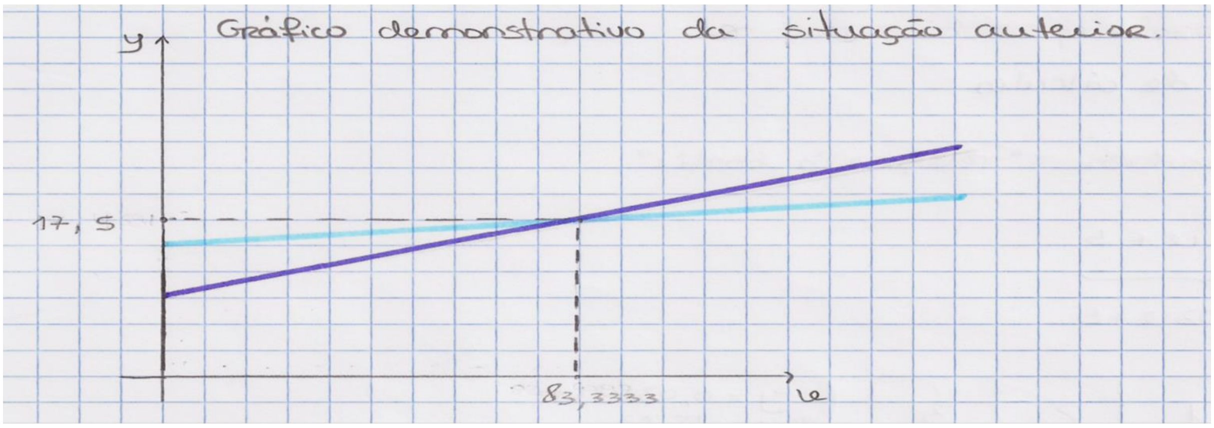
Seguidamente, explicaram os procedimentos realizados com a máquina. No exemplo que mostramos a seguir, é interessante a indicação da experimentação que fizeram, para dimensionar a janela da máquina.

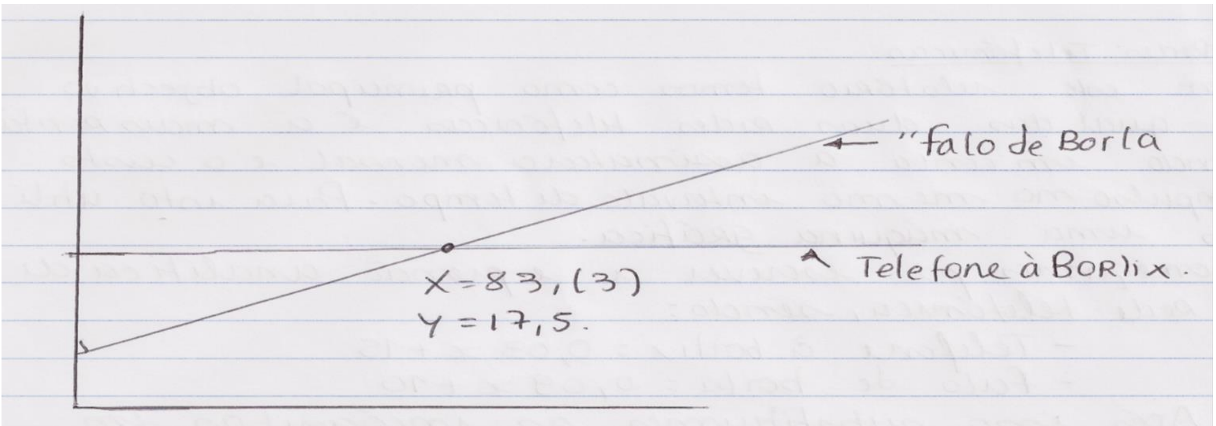
Depois, inserimos os valores de $x_{min} = 0$ / $x_{max} = 100$; $y_{min} = 0$ / $y_{max} = 100$. No entanto, como verificámos que as rectas estavam demasiado próximas e não se percebiam os valores, modificamo-los para $x_{min} = 0$ / $x_{max} = 150$; $y_{min} = 0$ / $y_{max} = 30$.

Através dos relatórios visualizados, concluímos que todos os grupos conseguiram perceber como desenhar graficamente, assim como obter a interseção das retas representativas das duas funções. Podemos concluir que os alunos entenderam a explicação dada anteriormente pelo professor (não podemos esquecer que se trata de procedimentos desconhecidos para os alunos do 3º ciclo do Ensino Básico).

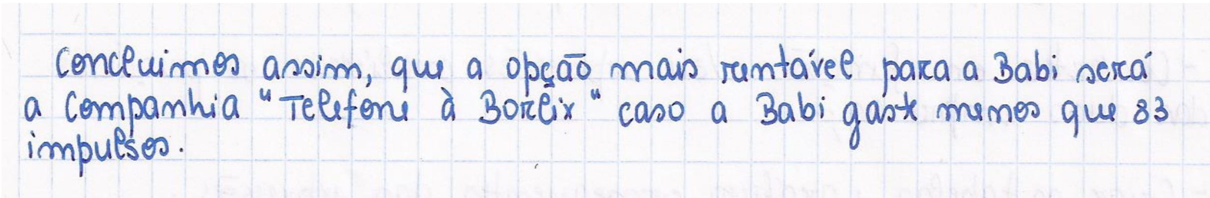

Apos termos inserido os valores na máquina, e recorrendo à funçao da máquina: $\boxed{2nd}$ $\boxed{calc}$ $\boxed{intersect}$, concluimos a analisar o gràfico, que a rede telefónica "falo de Borla" passa a ser mais cara apartir de ≃83 impulsos, pois na máquina diz x≃ 83,(3) e Y=17,5 na intersecção das funções

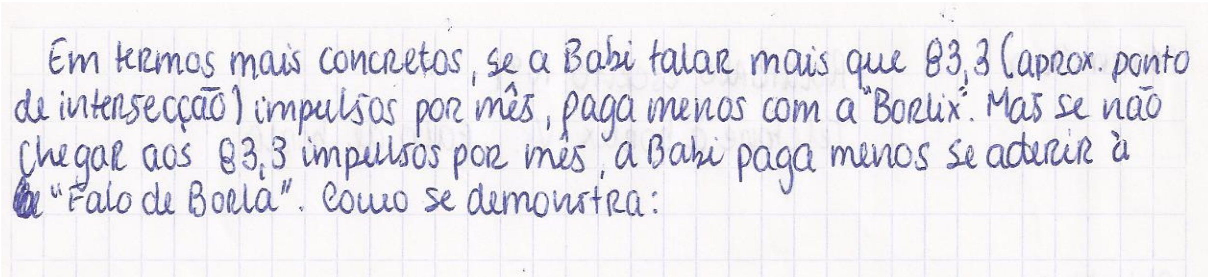
Finalmente, os alunos reproduziram o gráfico obtido na máquina e tiraram conclusões sobre o mesmo. Esta última etapa foi a que apresentou maiores diferenças entre os relatórios. Temos exemplos de gráficos com poucas informações (por exemplo, sem indicação sobre a qual das expressões correspondem as retas) e outros um pouco mais completos. Contudo, na nossa opinião, apesar dos gráficos apresentados estarem muito aquém de completos, no que diz respeito à informação que deveriam conter, os alunos tiveram uma boa prestação, tendo em conta o ano de escolaridade em que se encontravam e a falta de experiência com esta tecnologia.





Quanto às conclusões, embora existam relatórios que não as possuem, a maioria dos grupos apresentou-as e alguns até indicaram a melhor opção, em vários momentos.


Concluimos assim, que a opção mais rentável para a Babi será a Companhia "Telefone à Borlix" caso a Babi gaste menos que 83 impulsos.


Em termos mais concretos, se a Babi falar mais que 83,3 (aprox. ponto de intersecção) impulsos por mês, paga menos com a "Borlix". Mas se não chegar aos 83,3 impulsos por mês, a Babi paga menos se aderir à "Falo de Borla". Como se demonstra:

Em conclusão, não fomos capazes de comparar este tipo de instrumento de trabalho pelas condicionantes já descritas. Apenas nos foi possível descrever a situação observada e constatar não só a ocorrência de comunicação oral e escrita, bem como a autonomia dos alunos, perante a situação. Por outro lado, cremos, como Abrantes et al. (1997, pp. 94-95), que este tipo de atividades

> " proporciona momentos ricos de aprendizagem, permitindo desenvolver um conjunto de competências importantes em Matemática. (…) Um ponto especialmente relevante destas atividades tem a ver com a autonomia e o sentido de responsabilidade perante uma tarefa. Para se escrever um relatório, é preciso trabalhar sobre o problema, elaborar um esboço, pedir sugestões e cuidar da forma final."

3.3 Diário de bordo

Igualmente aplicado, em contexto de aula, foi o diário de bordo. Tinha como objetivo principal, por parte dos alunos, o registo de reflexões, comentários, entre outros, no final de cada aula, onde fossem aplicadas tarefas. Assim, criamos uma tabela simples, de fácil preenchimento e passível de ser aumentada, consoante as necessidades.

Registo individual sobre a execução das tarefas

Nome: ______________________ Nº __ Ano / Turma ______

Tarefa	Data	Comentário	Dificuldade

No entanto, não foi fácil convencer os docentes a distribuí-lo. Apesar de explicada a intenção subjacente ao diário, sentimos que alguns docentes o viram com desconfiança, principalmente quando nos questionavam, por exemplo, se iria ficar registado algo sobre a sua atuação na sala de aula. Após conseguirmos que fosse entregue à maioria das turmas onde as tarefas foram aplicadas, deparamo-nos com dificuldades na sua recolha. Muitos alunos perderam, outros deixaram de completar (porque se esqueceram ou, como alegavam, o professor não lembrou) e outros ficaram de entregar mais tarde. Entre os recolhidos, somos levados a pensar que, talvez pela idade dos alunos, muitas vezes as suas reflexões não são muito profundas, mas caraterizam e bem o que foram sentindo, no decorrer da aplicação das tarefas. É ainda de salientar que muitos alunos continuam a chamar «exercícios» às questões propostas nas tarefas. Assim, seguem alguns exemplos que, no nosso entender, são representativos de todos os diários recolhidos. A sua apresentação não segue qualquer ordem específica, pois apenas procuramos interpretar o seu conteúdo.

Exemplo 1

Exercício muito engraçado e bom para desenvolver a nossa autonomia e precisão no desenho. Achei um exercício também muito bom para desenvolver a nossa capacidade de *	Tive dificuldade em perceber o que fazer (mediatriz) o resto, o exercício em si, era fácil.

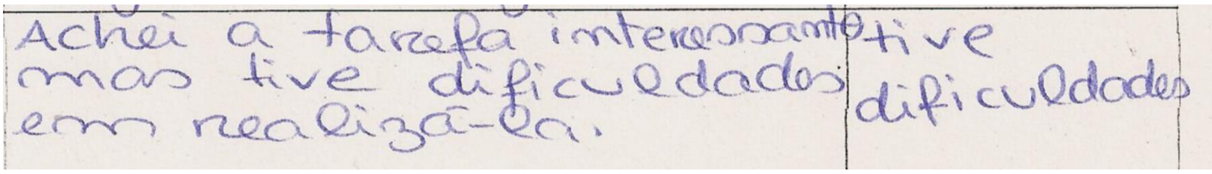
O asterisco estava no fundo do diário e correspondia à palavra «compreensão». Neste exemplo, o aluno percebe que a capacidade de envolvimento de uma questão o ajuda a desenvolver capacidades de autonomia. Também constatamos que a questão apelou para o gosto pela Matemática.

Exemplo 2

Não gostei muito do exercício	Dificil

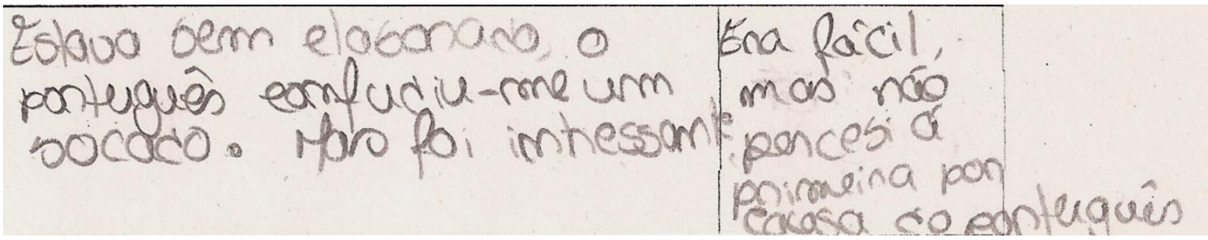
Neste caso (exemplo 2), não percebemos se a opinião se deve à dificuldade encontrada ou ao conteúdo tratado. Trata-se de um exemplo claro, em que a deficiente reflexão e falta de expressão escrita (típica da faixa etária dos alunos de 3º ciclo do Ensino Básico) condicionam a aprendizagem. Já no exemplo 3, o aluno revela o seu agrado, mas expressa que teve dificuldades sem, contudo, as especificar.

Exemplo 3



Achei a tarefa interessante mas tive dificuldades em realizá-la.	tive dificuldades

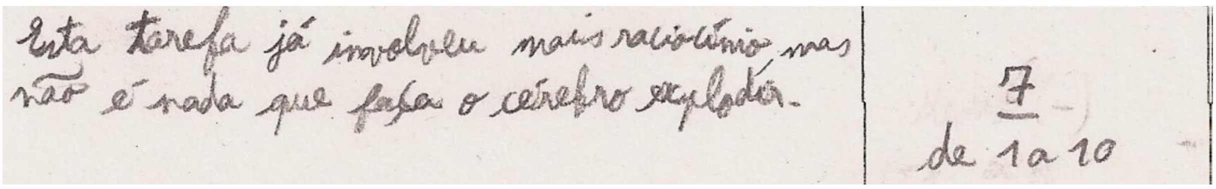
Exemplo 4



Estava bem elaborado, o português confudiu-me um bocado. Mas foi interessant	Era fácil, mas não percebi à primeira por causa do português

No exemplo 4, quando o aluno afirma que «estava bem elaborado», questionamo-nos se faz referência à linguagem científica, à clareza do exercício ou a outro motivo. No entanto, o discente aponta uma das questões, que mais entraves coloca à aprendizagem matemática: a compreensão do enunciado.

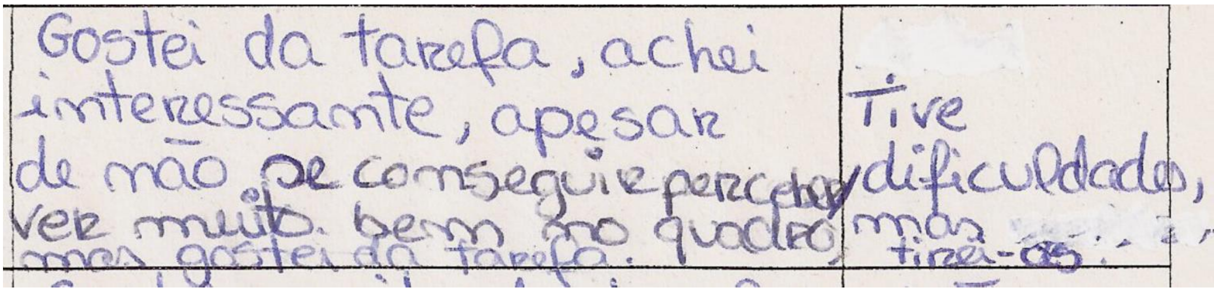
Exemplo 5



Esta tarefa já involveu mais raciocínio mas não é nada que faça o cérebro explodir.	7 de 1 a 10

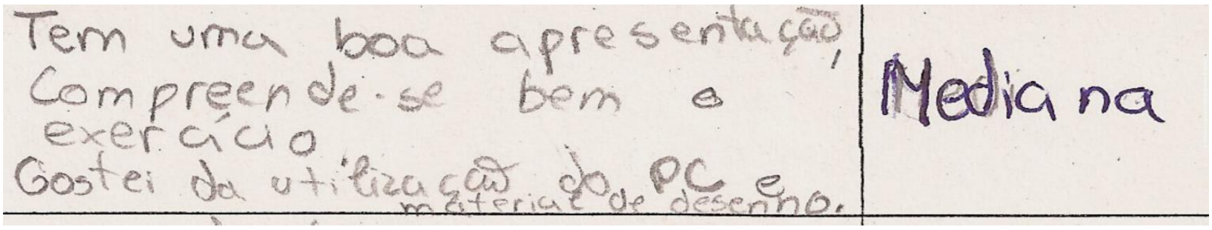
Aqui (exemplo 5), atestamos da necessidade constante que os alunos têm de quantificar o trabalho produzido. Vários alunos, de diferentes turmas, professores e escolas, atribuíram uma escala ao grau de dificuldade; uma parte significativa de um a dez, mas também existem casos de escalas entre um e vinte. Também é «sui generis» a forma como o aluno se refere a um maior grau de dificuldade, existente na tarefa.

Exemplo 6


Gostei da tarefa, achei interessante, apesar de não se conseguir perceber muito bem no quadro mas gostei da tarefa.	Tive dificuldades, mas tirei-as.

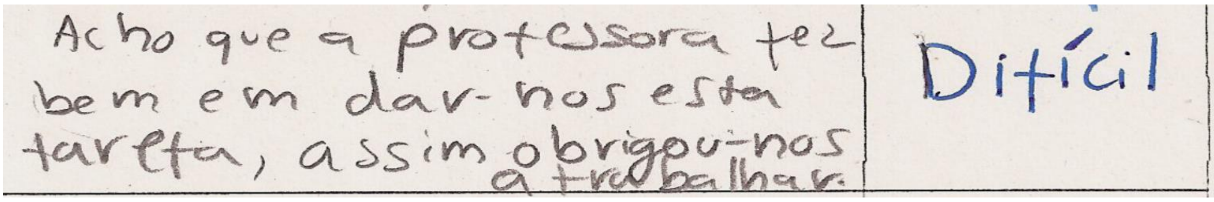
Neste exemplo (exemplo 6), o aluno expressa um problema constante em várias escolas e que condiciona fortemente a aprendizagem: a falta de condições nas salas de aula. Assim, indagamos sobre a situação e explicaram-nos que se tratava de salas onde a luz do sol incidia diretamente no quadro (sem persianas ou estores) e era impossível tentar projetar na parede, tal era o estado de degradação em que se encontravam as salas.

Exemplo 7


Tem uma boa apresentação, Compreende-se bem o exercício Gostei da utilização do PC e material de desenho.	Mediana

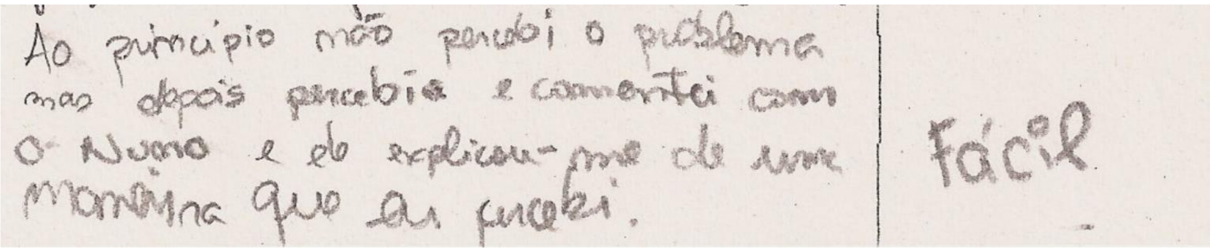
Quanto ao uso de computador ou outras tecnologias, na sala de aula, concordamos que proporcionam momentos matemáticos diferentes e que apelam ao interesse pelo currículo em si, bem como para o gosto pela disciplina. Neste exemplo (exemplo 7), o aluno opina favoravelmente sobre a aplicação de uma tarefa, onde tal aconteceu.

Exemplo 8


Acho que a professora fez bem em dar-nos esta tarefa, assim obrigou-nos a trabalhar.	Difícil

É interessante perceber que os alunos compreendem que a Matemática é uma disciplina que exige trabalho e, devido à faixa etária dos alunos do 3º ciclo do Ensino Básico, eles sentem que, muitas vezes, têm necessidade de ser obrigados a aplicarem-se, de forma a combater a preguiça, a falta de estudo e o insucesso escolar.

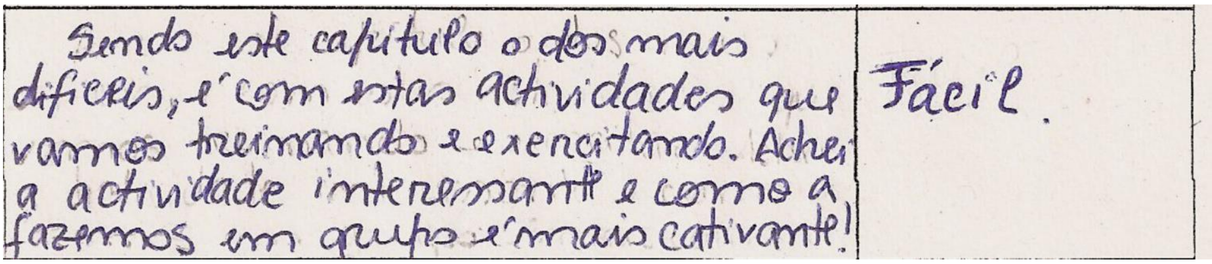
Exemplo 9



Ao princípio não percebi o problema mas depois percebi e comentei com o Nuno e ele explicou-me de uma maneira que eu percebi.	Fácil

O exemplo 9 explicita uma questão importante para a aprendizagem matemática: o trabalho cooperativo, em pares ou em grupo. Neste caso, o aluno atribuiu ao grau de dificuldade a menção de «fácil», mesmo não tendo compreendido a questão. No entanto, a ajuda do colega foi de tal forma esclarecedora e auxiliadora, que o discente não viu o problema como algo inalcançável.

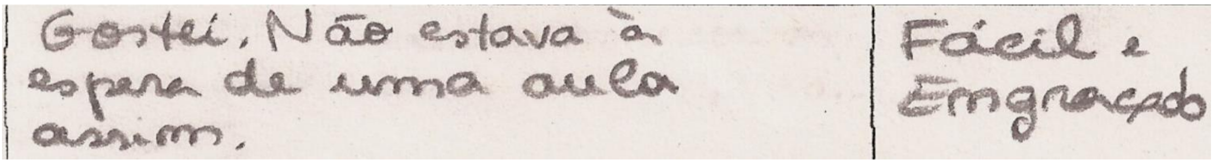
Exemplo 10



Sendo este capítulo o dos mais difíceis, é com estas actividades que vamos treinando e exercitando. Achei a actividade interessante e como a fazemos em grupo é mais cativante!	Fácil.

O exemplo 10 é mais uma opinião positiva, relativamente ao trabalho em grupo. O aluno é perentório ao afirmar que, independentemente da dificuldade, o gosto pela disciplina é incrementado. A perceção do aluno vem ao encontro do PMEB (Ponte et al., 2007), que é favorável a este tipo de tarefas, quando afirma que "o trabalho em grupo pode ser muito produtivo na resolução de um problema ou na realização de uma investigação matemática" (Idem, 2007, p. 10).

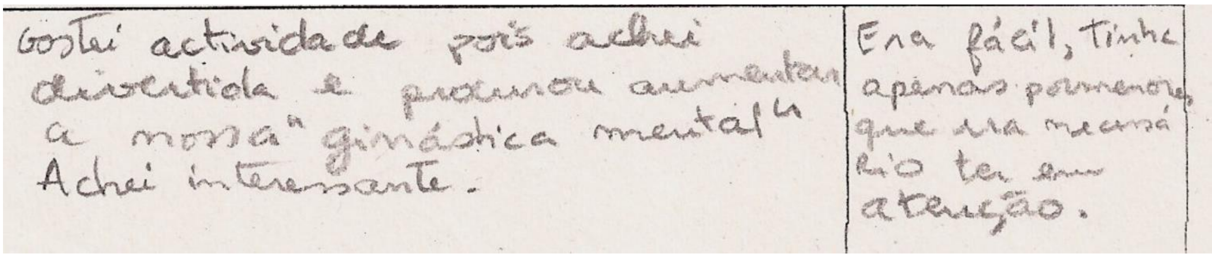
Exemplo 11



Gostei, Não estava à espera de uma aula assim.	Fácil e Engraçado

O relato exposto, no exemplo 11, pertence a um aluno do Programa de 1991 (DGEBS, 1991). Tal como outros alunos, na mesma situação, o discente manifesta o seu espanto e agrado por uma aula onde é utilizada uma metodologia, que não a usual.

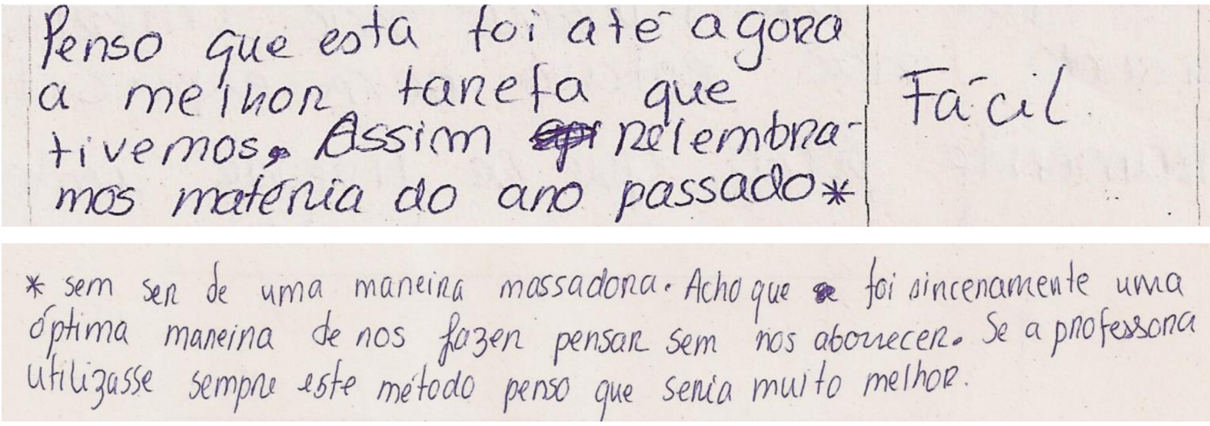
Exemplo 12



Gostei actividade pois achei divertida e procurou aumentar a nossa "ginástica mental". Achei interessante.	Era fácil, tinha apenas pormenores que era necessário ter em atenção.

O cálculo mental assume um papel primordial no PMEB (Ponte et al., 2007). Nas orientações metodológicas é aconselhado "proporcionar aos alunos situações diversas que lhes permitam desenvolver o cálculo mental" (Idem, 2007, p.14). No exemplo 12, o aluno interiorizou o objetivo da tarefa.

Exemplo 13

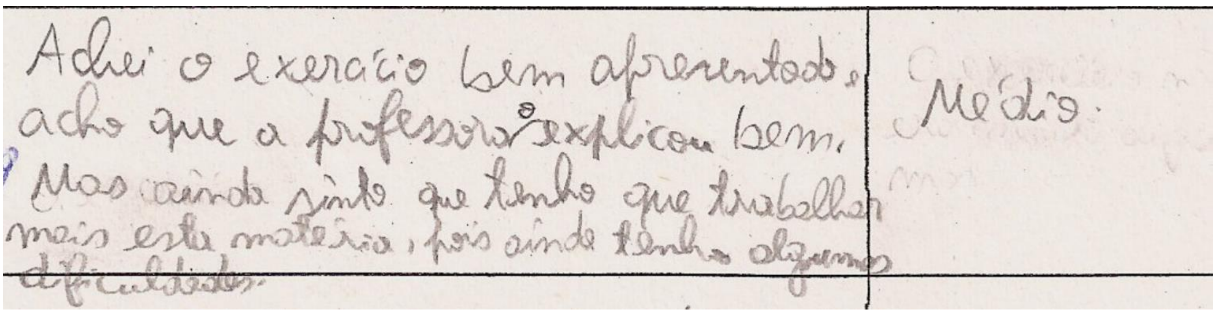


Penso que esta foi até agora a melhor tarefa que tivemos. Assim ~~ap~~ relembramos matéria do ano passado*	Fácil

* sem ser de uma maneira massadora. Acho que foi sinceramente uma óptima maneira de nos fazer pensar sem nos aborrecer. Se a professora utilizasse sempre este método penso que seria muito melhor.

Neste exemplo (13), o aluno apela a aulas diferentes, mais motivadoras, menos expositivas, entendendo-as como uma forma de cativar os alunos.

Exemplo 14



Achei o exercício bem apresentado, acho que a professora explicou bem. Mas ainda sinto que tenho que trabalhar mais esta matéria, pois ainda tenho algumas dificuldades.	Médio.

Através do exemplo 14, percebemos como uma tarefa permite ao aluno ter consciência das suas dúvidas, da ausência de conhecimentos e da necessidade de consolidação de conteúdos.

Exemplo 15

Tarefa é interessante e apela à cultura geral.

O caso que é observável no exemplo 15 é indicativo de como as tarefas podem e devem ser transversais aos conhecimentos e capacidades da matemática, das outras ciências e do quotidiano. Os alunos manifestam o seu reconhecimento, bem como o seu interesse.

Exemplo 16

Era um problema fácil, apesar de nesta aula não estar muito concentrado no problema.	Fácil

Pelo exemplo 16, pensamos que a tomada de consciência sobre a capacidade de atenção/concentração na sala de aula, por parte dos alunos, é uma mais-valia para a aprendizagem. O aluno compreende como tal pode afetar o seu processo de ensino-aprendizagem.

Exemplo 17

Sinceramente, penso que este problema era fácil e a única dificuldade que encontrei foi na interpretação do *	Fácil

* problema, ~~pos~~ pois só compreendi o que tinha para fazer após fazer mais algumas leituras.
Sobre o problema em si achei-o bastante fácil.

No exemplo 17, o aluno apresenta uma questão que a maioria dos alunos utiliza, como justificação para a dificuldade na interpretação de problemas: o «português». No entanto, também compreendeu que, se efetuasse mais leituras (na nossa perceção, leituras mais atentas), o entendimento seria melhor.

Exemplo 18

Tarefa original e capta o interesse dos alunos.

No décimo oitavo exemplo, curiosamente pertencente a um aluno do Programa de 1991 (DGEBS, 1991), constatamos a importância de as tarefas serem passiveis de apelar ao interesse e à motivação dos alunos.

Resumindo, é nossa opinião que as tarefas atingem vários dos objetivos gerais do ensino da Matemática: conhecimentos, procedimentos, compreensão, comunicação, raciocínio, capacidade de resolução, autonomia ou ainda o gosto pela disciplina. Correia (2002, p.13) afirma

> “ o modo de pensar, próprio da matemática, desenvolve-se à medida que o conhecimento se amplia e a compreensão de conceitos e de procedimentos e o gosto pelas actividades intelectuais da matemática se aprofundam. Os conhecimentos matemáticos, compreendidos e adquiridos, aplicáveis, envoltos de um conjunto de capacidades e atitudes compõem um «complexo integrado», útil, que é a competência matemática.”

Os alunos são claros nas suas opiniões, quando afirmam que se sentem mais predispostos para o estudo e o aprofundamento de conhecimentos, mais críticos face à sua atenção, mais conscientes das suas limitações e da forma de as contornarem, mais autónomos nas suas tomadas de decisão e no seu apreço pela Matemática.

3.4 Teste em duas fases

O teste em duas fases foi outro instrumento cuja aplicação encontrou entraves, principalmente entre os docentes que participaram. A maioria dos professores argumentou que se tratava de um processo moroso e incompatível com a escola burocrática de hoje. Conjuntamente, também defendiam que, apesar de toda a ajuda e esclarecimento prestados, não se sentiam seguros para o aplicar na sala de aula nem para o classificarem. Os alunos que os efetuaram, no início, também se mostraram um pouco desconfiados, relativamente a esta forma de avaliação. Foram vários os alunos que entenderam a segunda fase como o momento de correção do teste e não como uma etapa, para uma nova aprendizagem.

Assim, procuramos que o teste fosse composto por vários tipos de perguntas, desde as respostas fechadas ou curtas às de desenvolvimento ou abertas. Para a sua implementação, ficou estipulado que a primeira fase decorreria na sala de aula. O professor, recolheria as respostas dos alunos, comentando as várias resoluções. Das sugestões dadas pelo professor e que teriam como objetivo fornecer informação para a segunda fase, encontramos exemplos, tais como: «podes explicar melhor o teu raciocínio quando dizes…?», «tens a certeza relativamente à resposta que encontraste? Experimenta para outros valores», «como explicas que…?», «e se em vez de…fosse…?», «como explicas que…?», «achas que se alterares os valores, continuas a verificar a mesma coisa?», «como chegaste a este resultado? Explica por palavras tuas». Apesar de esta fase não ter sido alvo de uma classificação, o professor registou uma apreciação do desempenho e da qualidade de cada resposta. A maioria dos alunos não se mostrou satisfeita com a ausência de uma classificação quantitativa, ou seja, esperava uma avaliação do tipo «certo» ou «errado» e não indicações do professor.

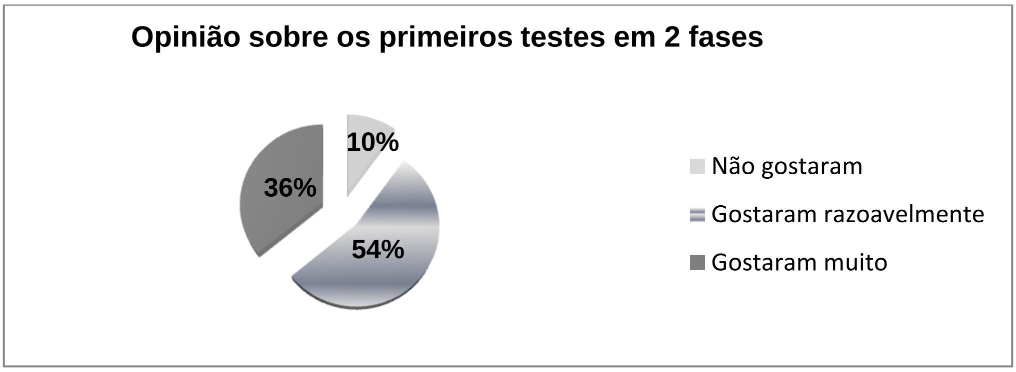
Na segunda fase, para a qual tiveram uma semana, para a realizarem fora do espaço de sala de aula, para que não houvesse mais «perda» de tempo, as perguntas eram pontuadas com a seguinte escala

0 – não respondeu
1 – tentou, mas recorreu a uma estratégia errada
2 – iniciou uma estratégia, mas não a desenvolveu corretamente
3 – responde corretamente com alguma complexidade
4 – responde corretamente com uma complexidade elevada.

A classificação final era atribuída em função das duas fases e da evolução apresentada pelo aluno. Em cada teste, foi feita uma menção qualitativa sobre os resultados quantitativos obtidos.

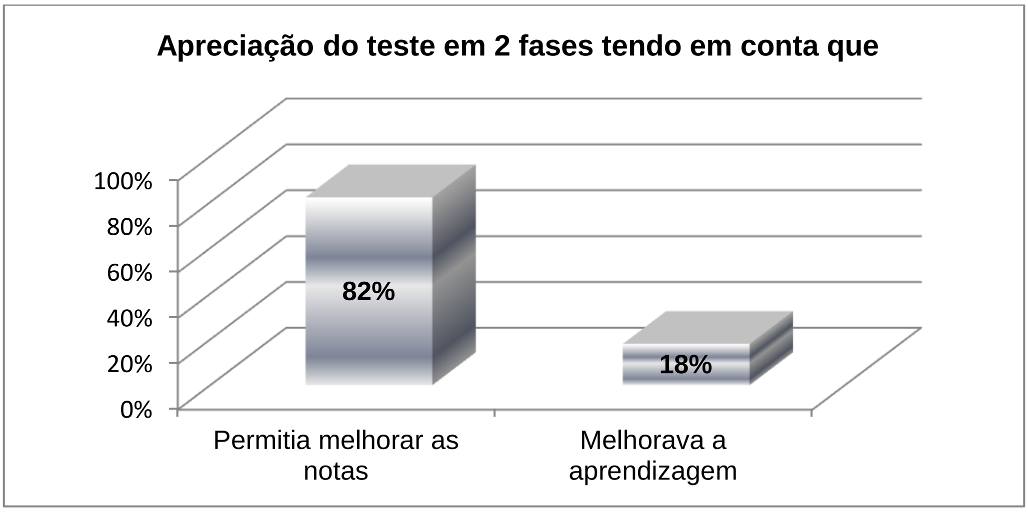
Em três turmas, num total de 74 alunos, conseguimos aplicar dois testes, em duas fases por período. Procuramos a opinião dos alunos, através de um breve questionário efetuado aos que estiveram envolvidos na implementação. Em relação às opiniões recolhidas após os dois primeiros testes, em duas fases (final do primeiro período), obtivemos as seguintes respostas:

Gráfico 2 - Primeira recolha de opiniões sobre os testes em duas fases



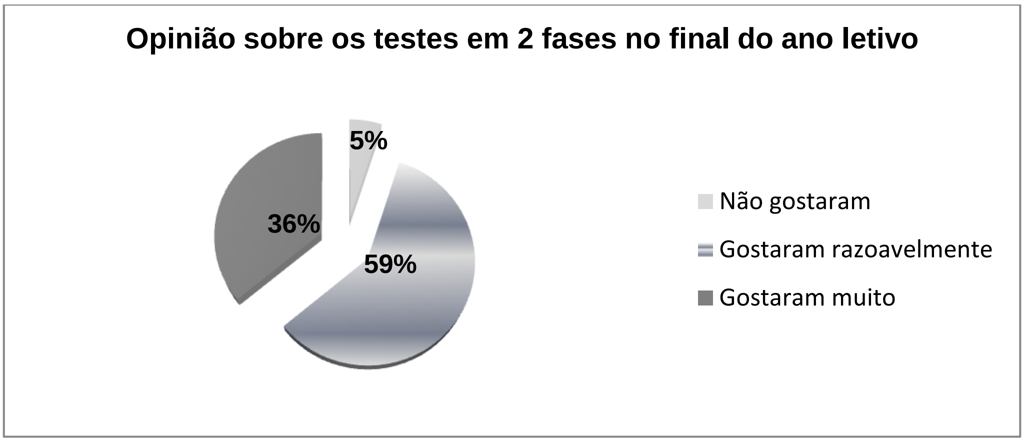
No grupo dos alunos que gostou razoavelmente ou muito, da experiência de realização dos testes, em duas fases, no primeiro período (foram realizados dois), as justificações dividiram-se, como constam do gráfico 3.

Gráfico 3 - Apreciação do teste em duas fases



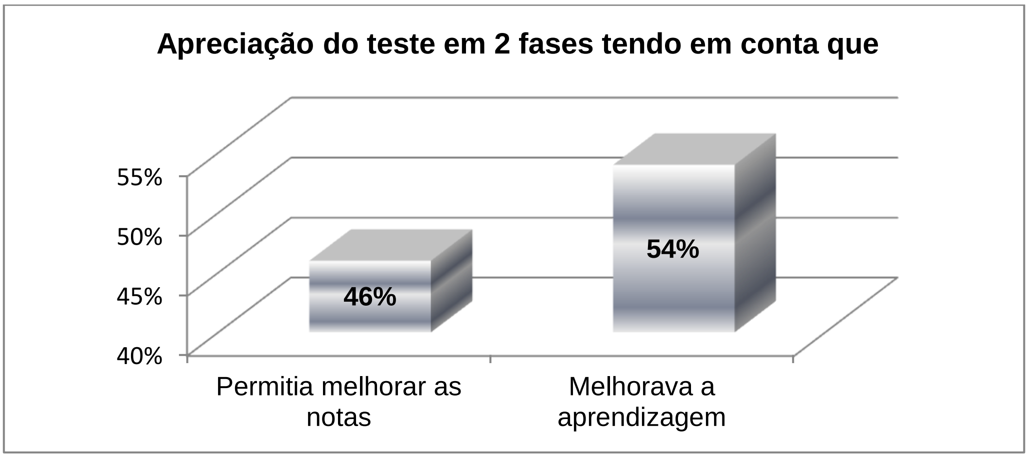
Do mesmo modo, voltamos a aplicar os mesmos inquéritos, no final do ano letivo. As respostas que colhemos constam do gráfico 4.

Gráfico 4 - Opinião sobre os testes em duas fases no final do ano letivo



No final do ano letivo, e no que se refere aos alunos que gostaram razoavelmente ou muito da experiência da realização dos testes em duas fases, apresentam-se os resultados no gráfico 5.

Gráfico 5 - Relacionamento do seu acordo sobre os testes em duas fases



Em síntese, pensamos que, de uma forma geral, os alunos tiveram alguma dificuldade em adaptar-se a uma diferente forma de avaliação, pois estão ainda agarrados à quantificação dos seus conhecimentos. Outra questão pertinente prendeu-se com o facto de ser em duas fases. Em conversa com um dos professores aplicadores, o mesmo confidenciou-nos que muitos alunos não acreditavam que o teste «ia e voltava, duas vezes». Em conversas informais, com alguns alunos, foram ouvidos comentários favoráveis, como «foi mais fácil perceber onde errei», «como eu demoro a perceber as coisas, tive oportunidade de rever o assunto», «pude levantar um bocadinho a minha nota», entre outros. E desfavoráveis: «não tem assunto eu não saber a nota» ou ainda «eu já não gosto de levar trabalho de casa, ainda tenho de fazer o mesmo teste duas vezes?».

Pela leitura dos dados recolhidos, nos questionários aplicados, concluímos que, de uma forma global, ocorreu uma evolução não só na adaptação aos testes, mas também ao entendimento da avaliação formal como um momento de aprendizagem.

Por isso, consideramos que a experiência foi muito enriquecedora para alunos e professores. No entanto, entendemos a opinião de um dos professores, quando refere que não a repetiria muitas vezes, pois exigia muito tempo na elaboração e nas duas classificações, tempo esse superior ao de um teste sumativo usual.

Numa reunião decorrida na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (Março, 2010) a propósito do PMEB (Ponte et al., 2007), e que contou com a presença não só de vários coordenadores do programa em causa, de diversas escolas, mas também de docentes do ensino superior, ligados à sua implementação, numa estreita ligação entre escolas e DGIDC, Vladimiro Machado proferiu o seguinte "as situações de avaliação devem ser geradoras de oportunidades para os alunos aprenderem, melhorarem o seu trabalho, e fornecerem informação ao professor sobre a evolução e preferência dos alunos, ajudando-o a melhor preparar e executar o seu trabalho”.

3.5 Análise do relatório final PM II/PMEB

Tal como já referimos, iremos fazer algumas considerações sobre o PMEB (Ponte et al., 2007), a partir da opinião dos professores (os profissionais que se encontravam no terreno), recorrendo a atas e/ou relatórios resultantes das muitas reuniões e encontros decorridos. Para tal, apoiar-nos-emos no relatório final de ano relativo ao PM II/PMEB de 2009-2010 (Santos, 2010_b). Este é uma compilação dos vários relatórios intercalares e finais de escolas ou agrupamento de escolas, os quais surgiram em função de atas de reuniões semanais, quinzenais e mensais, dos variados grupos de trabalho existentes.

Através da leitura do referido relatório, concluímos que o grande enfoque do PMEB (Ponte et al., 2007) é as tarefas matemáticas. Com efeito, foram apontadas como sendo uma das estratégias inovadoras que suscitou mais impacto junto de professores, (mesmo não sendo uma metodologia desconhecida ou nunca utilizada, mas por passar a ter uma maior utilização, devido à implementação) e de alunos (grande recetividade). Foi o instrumento que mais se evidenciou, tendo sido apontado como facilitador da aprendizagem. Segundo Santos (2010_b, p.552)

> “ no que se refere ao trabalho com os alunos em Matemática, os AE/E dão grande destaque, na maioria das regiões, às tarefas de aprendizagem propostas, em particular referindo-se às tarefas de exploração/investigação, à resolução de problemas e ao desenvolvimento das capacidades transversais preconizadas no NPMEB. Tal resultado aponta para uma prática lectiva que parece ir ao encontro do preconizado no currículo prescrito.”

Dentro dos vários tipos de tarefas, foram indicadas as que passavam pela resolução de exercícios e/ou problemas, por atividades de exploração e/ou investigação ou ainda pela articulação de conhecimentos. Quanto às mais utilizadas, o relatório refere que, nas várias regiões a que se reporta – Norte, Centro, Lisboa e Vale do Tejo, Alentejo e Algarve – elas seguiam a ordem seguinte:

1. Exploração/investigação
2. Problemas
3. Consolidação/exercícios
4. Capacidades transversais

5. Atividades lúdicas
6. Conexões
7. Cálculo mental

No que diz respeito aos objetivos gerais e específicos do Programa foram apontados vários, que passavam pelo gosto pela disciplina, pelo desenvolvimento das capacidades de raciocínio e comunicação, pela reflexão, pelo cálculo mental, pela construção do conhecimento e pela resolução de problemas. Para além destes, foi também salientada a conexão entre tópicos.

Um outro fator a ter em conta, foi a sua aplicação na sala de aula, nomeadamente, em termos organizacionais. Os alunos foram postos a trabalhar em várias modalidades que iam desde o trabalho individual, em pares ou grupo, até ao trabalho em turma.

Conforme o tipo de tarefa (outras vezes cadeia de tarefas), o objetivo ou o conteúdo a trabalhar, os recursos para a sua aplicação passavam por materiais manipuláveis (polydron, tangram, geoplano, entre outros), de desenho, de tecnologia (computadores, internet, Geogebra, Applets, Excel, etc.) quadro normal e/ou interativo ou até a máquina calculadora gráfica.

Quanto ao caráter específico das tarefas, relativamente ao estabelecimento de conexões dentro da Matemática, provou-se que tal também é possível com outras disciplinas, pois permitiu a interdisciplinaridade com Geografia ou com Ciências Físico-Químicas.

No que diz respeito à proveniência das tarefas/cadeia de tarefas, o relatório indicou que ora vinham das brochuras da DGIDC e do Banco de Itens, sendo por vezes adaptadas. As mesmas eram ainda resultantes de reuniões de trabalho nas escolas, agrupamentos de escola e partilha entre escolas.

Nas principais conclusões, quanto às diversas tarefas aplicadas em contexto de sala de aula, os professores indicaram, como grande entrave, o tempo demorado na resolução, em resultado da falta de autonomia dos alunos, de atenção na execução e da dificuldade na sintetização da informação apreendida ou aplicação noutros contextos. O fator tempo, gasto no emprego das tarefas, durante os momentos letivos, é ainda referenciado como muito superior ao previsto e ao disponível. Outro aspeto a ter em consideração foi o cuidado de, sempre que possível, os alunos trabalharem tarefas que tivessem ligação com o quotidiano ou fossem mais assertivas, de acordo com as vivências dos alunos e a faixa etária, como é dito nas indicações do PMEB (Ponte et al., 2007). Considerando as tarefas provenientes das brochuras disponibilizadas pela DGIDC, o relatório apontou, como falha, a pouca profundidade de alguns conteúdos, a reduzida diversidade, em alguns tópicos, e a discrepância entre os pré-requisitos necessários (de acordo com as indicações) e os que os alunos possuem na realidade. Muitas das brochuras foram disponibilizadas tardiamente e, para alguns tópicos, a nível do 1º ciclo do Ensino Básico, elas não existem. Nas recomendações do relatório (Santos, 2010_b, p. 2), para além das alusivas às tarefas, temos o pedido de

> " maior atenção por parte da tutela no cumprimento das orientações expressas em ofício respeitantes à libertação da 3ª feira à tarde de actividades lectivas e de reuniões fora do âmbito do PM II/NPMEB. (…) Atender à necessidade de oferta de escola formativa no que respeita ao NPMEB, em particular para os professores do 3º ciclo, reconhecida até ao momento como escassa."

Desta forma, alertamos para a importância de uma articulação e organização de todo o processo de ensino-aprendizagem, para que o ensinar e o aprender seja o mais eficaz possível.

4. Análise categorial das entrevistas aos professores

A entrevista, na perspetiva de Yin (2009, p.106), constitui "uma das mais importantes fontes informativas do Estudo de Caso". De facto, ao permitir a recolha de significados, perceções e crenças, aprofunda significados, clarifica ideias e particulariza situações da realidade social (Flick, 2005).

A entrevista pode ser utilizada (Cohen, Manion & Morrison, 2007, p.351):

> "Como principal meio de recolha de informação relacionada com os objetivos da investigação;
> Para testar ou sugerir novas hipóteses;
> Conjuntamente com outros métodos de investigação (para investigar resultados inesperados; para validar outros métodos; para aprofundar as motivações dos respondentes e as razões para terem respondido dessa forma".

A realização de uma entrevista implica: definição da pergunta de partida e dos objetivos a atingir com a entrevista; o conhecimento aprofundado do contexto de pesquisa; a planificação do guião da entrevista; o conhecimento das caraterísticas do sujeito e da sua seleção como fonte de material empírico para a investigação; a análise cuidada do material recolhido ao longo da entrevista.

Analisar entrevistas é tarefa complicada e exige cuidados com a construção de categorias, a concretização, o registo escrito (Apêndice II), e, principalmente, com a análise do discurso e do respetivo conteúdo semântico. Sem esquecer que "a subjetividade, elemento constitutivo da alteridade presente na relação entre sujeitos, não pode ser expulsa, nem evitada, mas deve ser admitida e explicitada e, assim, controlada pelos recursos teóricos e metodológicos do pesquisador, vale dizer, da experiência que ele, lentamente, vai adquirindo no trabalho de campo" (Romanelli, 1998, p. 128).

No enquadramento tipológico das entrevistas, selecionamos a entrevista estruturada, previamente preparada, com um guião (Apêndice I), de forma a, mais objetivamente, podermos comparar as respostas às mesmas questões (Stake, 2009).

Tendo em conta os pressupostos enunciados, inquirimos a totalidade dos nove professores que participaram no projeto, tal como referido anteriormente no capítulo da metodologia de estudo.

As questões dos inquéritos por entrevista foram apresentadas aos professores e estes responderam obedecendo a um guião (Apêndice I) constituído por um conjunto de questões previamente escolhidas, dando a conhecer as suas opiniões. Inicia-se a análise semântica do discurso escrito (Bardin, 1977; Costa, 2004) das entrevistas dos nove docentes. A caracterização dos professores entrevistados é a constante do quadro.

Quadro 21 – Caracterização dos entrevistados

Sujeito	Idade	Sexo	Habilitações literárias	Situação profissional
Professor 1	41 anos	Feminino	Licenciatura em Matemática	Quadro escola
Professor 2	44 anos	Masculino	Licenciatura em Matemática	Quadro escola
Professor 3	35 anos	Feminino	Licenciatura em Matemática	Quadro zona
Professor 4	42 anos	Feminino	Licenciatura em Matemática	Quadro escola
Professor 5	40 anos	Masculino	Licenciatura em Matemática	Quadro escola
Professor 6	45 anos	Feminino	Licenciatura em Matemática	Quadro escola
Professor 7	45 anos	Feminino	Licenciatura em Matemática	Quadro escola
Professor 8	37 anos	Feminino	Licenciatura em Matemática	Quadro zona
Professor 9	45 anos	Feminino	Licenciatura em Matemática	Quadro escola

Após leitura por recorte, definiram-se algumas categorias, tanto a *priori* com a *posteriori* (Stake, 2009). Aplicaram-se as categorias **Concretização do Projeto PMEB**, e **Constrangimentos ao Projeto PMEB na Escola**, com respetivas subcategorias. O quadro permite-nos uma visão global dos resultados por categorias, após o cálculo do total de ocorrências.

Quadro 22 – Perceções dos professores entrevistados

Categorias	Subcategorias	Ocorrências									
		P1	**P 2**	**P 3**	**P 4**	**P 5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**Total de ocorrências**
1. Concretização do Projeto PMEB na Escola	Implementação do Projeto na escola	3	7	6	9	2	1	1	7	1	**37**
	Estratégias motivadoras do Projeto	9	8	5	1	8	5	4	4	4	**48**
	Aplicação das tarefas matemáticas	3	5	1	1	3	3	2	2	4	**24**
	Total de ocorrências	**15**	**20**	**12**	**11**	**13**	**9**	**7**	**13**	**9**	
2. Constrangimentos ao Projeto PMEB na Escola	Extensão do Programa	1	0	2	4	1	5	2	1	1	**17**
	Pouco tempo disponível	3	3	2	1	2	4	2	1	1	**19**
	Seleção de tarefas	3	4	1	0	4	5	1	2	1	**21**
	Falta de formação específica	1	1	2	2	0	0	0	5	1	**12**
	Total de ocorrências	**8**	**8**	**7**	**7**	**7**	**14**	**5**	**9**	**4**	

Na primeira categoria, "**Concretização do Projeto PMEB na Escola"**, verificamos que os professores 2, 4 e 8 são os que dão maior destaque à subcategoria "Implementação do Projeto na Escola". Relativamente às subcategorias "Estratégias motivadoras do Projeto" e "Aplicação das tarefas matemáticas" são as mais referidas, constatando-se uma grande discrepância entre o número de ocorrências do Professor 1, 2 e 5, no que concerne às referências sobre as estratégias. É ainda de ressalvar que a "Implementação do Projeto na Escola" e a "Aplicação das tarefas matemáticas" são as subcategorias mais apontadas entre os entrevistados.

Quanto à segunda categoria, "**Constrangimentos ao desenvolvimento do Projeto PMEM na Escola**", os Professores 3 e 4 e 9 salientam a "Extensão do Programa" e a "Falta de formação específica" como principais entraves, comparativamente aos Professores 1, 2 e 6, que realçam o "Pouco tempo disponível" e a "Seleção de tarefas", como fatores impeditivos. No entanto, as subcategorias não apresentam grandes disparidades entre si, no que concerne ao número total de ocorrências.

Assim, na opinião dos professores, a existência de entraves à aplicação de tarefas, relatório matemático, diário de bordo e teste em duas fases ou outras estratégias diversificadas prende-se com a falta de uma formação contínua, específica e sistemática.

Os docentes, intervenientes no Projeto, manifestaram dificuldades em decidir se as tarefas a aplicar seriam as mais apropriadas, para as suas turmas, uma vez que ainda se encontravam a lecionar segundo o Programa de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991), mas já estavam em fase de implementação do Programa de 2007 (Ponte et al., 2007). A reforçar esta perceção, os professores salientaram que os alunos que compunham as turmas de 7º ano eram desconhecidos, no início do ano, na sua maioria.

Como afirmam os docentes inquiridos:

> **Professor 2** – "Nem sempre o tempo é o suficiente para o trabalho a desenvolver com os alunos, sobretudo nas tarefas matemáticas. Na verdade….sim, na verdade… às vezes o tempo não chega… é uma corrida para acabar as tarefas e assim, bem, não é possível aprofundar e fazer um ensino-aprendizagem como deve ser."
>
> **Professor 3** – "Às vezes fico muito confusa, nem sei como decidir, se é melhor fazer esta tarefa ou aquela. Precisamos de mais formação…não teórica…mas prática… mas é que precisamos mesmo, especificamente sobre estratégias, instrumentos e modelos de ensino. E o pior é que nem conheço realmente os alunos e as turmas são muito heterogéneas. Ainda se fossem menos!"

Ainda relativamente ao fator tempo, os docentes realçam a lentidão dos alunos na resolução de tarefas exploratórias, que requerem mais tempo para a sua execução. Tal dificulta o cumprimento da planificação estipulada em área disciplinar/departamento. Simultaneamente, a existência de uma clara falta de autonomia dos alunos, para definirem estratégias e comunicarem ideias na realização das tarefas, foi uma das adversidades apontadas com maior ênfase. No entanto, é uma questão mais fortemente apontada entre os docentes que ainda não se encontravam a lecionar o Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007). Ainda em relação à prestação dos alunos, é notória a dificuldade em gerirem os conhecimentos, utilizá-los nas situações apresentadas e sintetizarem os conceitos adquiridos.

Segundo o ponto de vista dos professores inquiridos:

> **Professor 1** – "Não muito bem, perdíamos muito tempo na seleção das tarefas quando estávamos a fazer a planificação das aulas, e depois os alunos perdiam muito tempo a resolvê-las... E, às vezes, quando as conseguiam resolver, por vezes, gastavam mais tempo do que o previsto."
>
> **Professor 4** – "O tamanho do programa, é muito extenso e nós temos sempre aquele peso dos exames e dos testes intermédios e depois temos de dar toda a matéria, não pode ficar nada por dar. E as turmas são muito

> grandes, assim não é possível aplicar mais estratégias diferenciadas ou atividades. Sobretudo, dificulta o trabalho colaborativo dos alunos, que exige uma orientação progressiva, sem pressas.”

Através dos excertos anteriores, é percetível como os professores continuam com duas grandes preocupações: a gestão do tempo e o cumprimento do programa devido à sua extensão com consequente implicação na avaliação externa através dos testes intermédios e/ou exames nacionais.

Relativamente ao trabalho cooperativo, estratégia preferencial entre o Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007), os docentes comentaram que não é um hábito em contexto de sala de aula.

> **Professor 9** – “O trabalho colaborativo deveria ser um hábito adquirido pelos alunos e ainda pelos professores. Infelizmente, os alunos não trabalham o suficiente em grupo na aula. Ainda no outro dia, quando descobri, estava um aluno a fazer sozinho a tarefa, enquanto os outros dois estavam a ouvir música. O que significa que o professor tem que estar mesmo muito atento, até porque as turmas são grandes. “

De acordo com os professores, os alunos apontam a ausência de pré requisitos, no que se refere ao Programa de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991).De facto, os alunos apercebem-se das dificuldades devido à ausência de aprendizagens de conteúdos que não haviam sido lecionados em anos anteriores. No entanto igualmente, os discentes que se encontram com o Programa de Matemática de 2007 (Ponte et al., 2007), manifestam lacunas nas aprendizagens anteriores. Na opinião dos entrevistados, prende-se com o facto de existir um desfasamento na fase intermédia entre os dois programas. Por fim, a utilização do manual causou algum desconforto entre os vários intervenientes do processo de ensino-aprendizagem, já que o mesmo era relativo ao Programa de 1991 (DGEBS, 1991).

Na perceção dos docentes:

> **Professor 5** – “Na ficha de autoavaliação, cerca de 50% dos alunos referiram que as aprendizagens não realizadas anteriormente interferem com a assimilação de conhecimentos novos. Acho que este é um dos grandes problemas a Matemática!”

> **Professor 7** – “O desfasamento dos manuais obriga a mais planificação do professor. Muitos alunos queixam-se que não podem estudar pelo manual”

> **Professor 6** – “ Eu acho que o mais importante é as tarefas Matemáticas… Elas são essenciais…. E para isso é preciso que os professores trabalhem juntos e planifiquem estratégias motivadoras e diferenciadas. Essa é a grande inovação do plano da Matemática”

Em suma, os professores relacionam a implementação do PMEB (Ponte et al., 2007) com estratégias motivadoras e a aplicação das tarefas matemáticas. Contudo, também focam como grande impedimento à concretização do PMEB (Ponte et al., 2007), o dispêndio de tempo na seleção e na aplicação das tarefas.

5. Discussão dos resultados

Em suma, e relativamente aos variados instrumentos utilizados junto dos alunos, direcionamos os mesmos de acordo com as indicações do Currículo Nacional do Ensino Básico para a Matemática (DEB, 2001), do PMEB (Ponte et al., 2007) e dos percursos temáticos (Ponte et al., 2008), procurando o desenvolvimento de capacidades matemáticas e da autonomia dos alunos, sempre numa perspetiva supervisiva. Demos especial atenção às tarefas e procuramos que fossem aplicadas dentro do encadeamento normal da planificação estipulada a longo, médio e curto prazo, em área disciplinar/departamento, nas várias escolas. Relativamente a algumas tarefas, e como já foi dito, estas não foram aplicadas de acordo com o inicialmente estipulado, tendo havido necessidade de reformulação/adaptação. No que diz respeito ao diário de bordo, teste em duas fases e relatório matemático (ou como alguns alunos lhe chamaram, composição matemática), apesar de não terem sido instrumentos que tenham reunido consenso na sua aplicação, foram recebidos com entusiasmo pelos alunos. Para os mesmos, procuramos minimizar todo e qualquer contratempo, resultante da sua aplicação, nomeadamente, a ocupação do tempo letivo. A metodologia para a aplicação dos diferentes instrumentos foi alvo de prévia discussão. No entanto, não houve qualquer intervenção da nossa parte no momento da sua concretização. O contexto de sala de aula revelou-se surpreendente, pois foi possível observar diferentes experiências, quer pela atuação dos docentes, quer pela postura dos discentes.

Em síntese, é possível traduzir pela figura 27, a evolução dos alunos, ao longo do projeto, resumindo o processo decorrido ao longo de dois anos letivos.

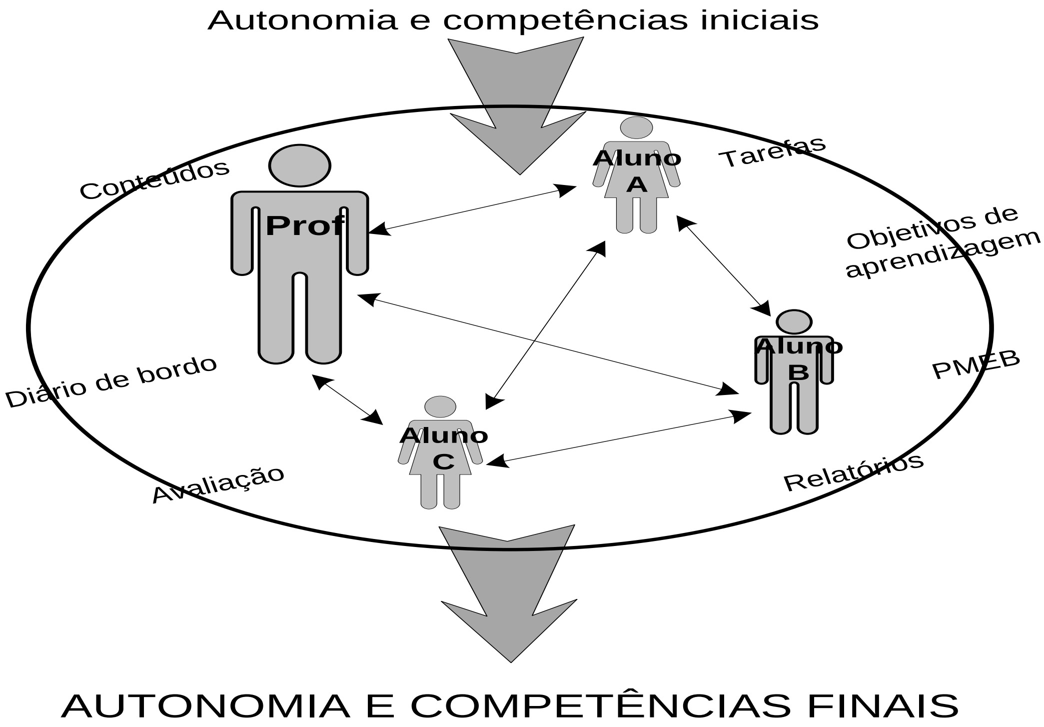


Figura 27 - Evolução da autonomia e da competência ao longo do projeto

Numa visão geral, as tarefas matemáticas potenciam a autonomia dos alunos, traduzindo-se em competências finais mais aprofundadas e num maior domínio dos conteúdos matemáticos. Para tal, é urgente continuar a ensinar os alunos a ouvir, a ouvirem-se, a explicarem e a defenderem ideias, como foi concretizado neste projeto.

Conclusões

As conclusões são o culminar de uma investigação, que surgiu na sequência de um trabalho suportado por um quadro teórico fundamentado.

O *design* do estudo incluiu uma análise comparativa entre os Programas de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991) e de 2007 (Ponte et al., 2007), atendendo ao processo de ensino-aprendizagem, à diversidade de estratégias, atividades e instrumentos, num ensino baseado em tarefas, promotor de alunos mais autónomos e competentes. O projeto não só permitiu a alunos e professores trabalharem de um modo inovador, principalmente entre os do Programa de Matemática de 1991 (DGEBS, 1991), como tentou responder de um modo eficaz às exigências de um Programa de Matemática (Ponte et al., 2007), implementado com outras condições para a vida escolar de alunos e professores.

Da teoria à problemática do estudo

Tivemos por base a melhoria do processo de ensino-aprendizagem, de acordo com Font (2007, p. 15), de "ajudar o aluno a aprender de forma significativa e autónoma os diferentes conteúdos curriculares". Num mundo tecnológico como o de hoje não é mais compatível que a incompreensão da Matemática seja um facto tolerável e aceite, através do argumento de que, na realidade, não é preciso saber Matemática (Aharoni, 2008).

A aprendizagem significativa está subjacente a uma integração construtivista quer de raciocínio, quer de atividade, e juntas levam a um enriquecimento do aluno, através da entrada de novas informações, com associação a conceitos já existentes. No caso da aprendizagem mecânica, a obtenção de conhecimentos é retida sem efetuar ligações concetuais com as já presentes (Valadares & Moreira, 2009).

Quanto mais significativa for a aprendizagem, maior será a autonomia do aluno, desde que lhe sejam fornecidos os meios para que haja produções que sirvam de referência. Cabe ao aluno a responsabilidade pela sua aprendizagem e, para isso, ele deve estar consciente do seu papel no processo de ensino-aprendizagem. A finalidade será ter um posicionamento mais ativo, perante os instrumentos de trabalho, mais investigador na exploração dos materiais fornecidos e mais intencional nas suas ações e atitudes. Por sua vez, o professor deve motivar, influenciar e facultar instrumentos variados, para incentivar a pesquisa e cumprir os objetivos educacionais (Font, 2007; Novak, 2000).

Nesta perspetiva, surge a autonomia como um outro fim primordial a atingir no sistema educativo. Não se pode impor a autonomia a um aluno, mas pode-se dar os meios necessários para que esta seja desenvolvida. Para tal, é necessário um compromisso dos vários elementos da comunidade educativa: em primeiro lugar, dos alunos e professores, seguido dos encarregados de educação e dos vários órgãos que compõem uma escola. O desenvolvimento autónomo do aluno tem de ser construído de uma forma responsável e, muitas vezes, não tem efeitos imediatos, mas a longo prazo. Ao professor fica reservado o papel de orientador e supervisor de todo o processo, não sendo uma tarefa fácil, já que a aprendizagem é «dificilmente avaliável» (Rossetto, 2005).

A autonomia exige responsabilidade, isto é, o aluno terá de responder pelas suas ações, sejam elas de sucesso ou fracasso; por isso, a autonomia não elimina a obrigação, pelo contrário, reforça-a (Barbot & Camatarri, 2001; Freire, 2007). De acordo com a filosofia do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), o aluno passa a ser mais autónomo e responsável pelo seu processo de ensino-aprendizagem, tendo em conta que adquire novos hábitos de trabalho e estratégias que lhe permitem responder eficazmente aos desafios propostos. Ao longo do tempo vai deixando a relação exclusiva de aluno-professor para a combinar com a de aluno-aluno, com o propósito de uma construção de aprendizagens significativas ou, como afirma Liping Ma (2009), com o objetivo de uma interação que conduza a um desenvolvimento das aprendizagens, em todos os envolvidos no processo.

Similarmente, foi considerado o currículo, como suporte do ensino-aprendizagem. Enquanto base do processo, apresenta finalidades definidas, que englobam gestão e avaliação. Tal sucede pelo facto de a educação ser um ato intencional, com decisões partilhadas entre pares. Assim, o currículo é aplicado tendo por base a estrutura escolar, tratando-se de um projeto sociocultural que envolve todos os elementos da comunidade educativa (Leite & Fernandes, 2002).

A gestão flexível do currículo tem de ser construída e articulada, recorrendo a estratégias eficazes, para que haja um desenvolvimento de todos os currículos disciplinares, e, neste caso, da Matemática, adequado ao contexto e tendo por base o Projeto Educativo de Escola (Leite, 2006).

Uma das grandes alterações a nível curricular, a Matemática, surge, primeiramente, com o programa de 1991 (DGEBS, 1991) e, mais tarde, com o Programa de 2007 (Ponte te al., 2007). Em 1997, Ponte (p. 72), numa brochura do Ministério da

Educação, sobre didática do ensino da Matemática, afirmou que “a investigação sobre a aprendizagem tem mostrado que o aluno aprende em consequência da tarefa que desenvolve e da reflexão que sobre ela faz”.

A este propósito, torna-se importante relembrar o que são tarefas. As tarefas matemáticas são tudo aquilo que envolve os alunos, exercícios, problemas, investigações, projetos, construções, aplicações, produções orais, relatórios, portefólios, diários de bordo, testes, entre outros, e que são o ponto de partida para o seu desenvolvimento matemático. As tarefas devem ser promotoras de curiosidade e de ligações com conhecimentos já adquiridos (Stein & Smith, 2009). Quando um professor as propõe, pode esperar mais do que uma reação do aluno, dependendo não só dos conceitos anteriores e da forma como chega ao aluno, mas também do ambiente envolvente da aprendizagem. Assim, quando selecionamos uma tarefa ou uma cadeia de tarefas, fatores como a compatibilidade, diversidade e integração devem ser princípios de seleção. No que diz respeito à compatibilidade, as tarefas devem respeitar o currículo e serem adequadas. Quanto à diversidade, devem ter em conta a diversificação de modos de raciocínio, e ainda a comunicação e postura perante os procedimentos. Ao nível da integração, a sua focalização deve apelar ao espírito crítico (Correia, 2002; Fidalgo & Ponte, 2004).

Relativamente à avaliação, estamos cientes de que se trata de uma das atividades com mais impacto no processo de ensino-aprendizagem. Não podemos esquecer que a quantificação da avaliação é “o processo de recolha de informações sobre os alunos e as salas de aula com o fim de tomar decisões educativas” (Arends, 2008, p.211).

Neste contexto, a avaliação deve ser tão abrangente quanto o possível, ou seja, “a existência de um processo avaliativo não significa que os outros não estejam presentes, nem que o seu abandono signifique uma mudança sem retorno” (Pinto & Santos, 2006, p.13). Em documentos provenientes do Ministério e outros órgãos orientadores educativos, cada vez mais é sugerida a avaliação formativa, bem como a diversidade de instrumentos de avaliação. Significa isto que o aluno passa a ter um papel central no processo, sem que o professor perca a sua importância ou estatuto. O docente altera o seu papel, passando a ser orientador e supervisor o que, na maioria das vezes, o coloca em situações mais exigentes e desafiantes. Nesta ótica, a avaliação é vista para além da formativa, ela é entendida como reguladora. Não obstante estar legislada, não é a que prevalece na maioria das salas de aula (Fernandes, 2005).

Assim, a necessidade de uma intervenção urgente a vários níveis do processo de ensino-aprendizagem, que inferissem nos principais problemas existentes ao nível dos conteúdos, estabeleceu com o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) um reajustamento do Programa de 1991 (DGEBS, 1991), tomando-o como ponto de partida. Assim, é salientada a importância dos saberes, da comunicação, dos recursos, do papel do docente, da história da Matemática, de aptidões como o raciocínio e de metodologias e conteúdos que recorrem à resolução, criativa e investigativa, de problemas (Pintassilgo, Teixeira & Dias, 2008). Desta forma, são percetíveis alterações na estrutura, no conteúdo e na linguagem.

Neste sentido, desenvolveu-se um estudo, recorrendo a análise categorial comparativa, tendo por finalidade averiguar de que forma a evolução dos programas de Matemática evidencia um novo paradigma de ensino-aprendizagem, potenciando uma avaliação formativa, baseada na auto e heteroavaliação, a partir da concretização de tarefas matemáticas.

Resposta à problemática de investigação

Partindo da Pergunta de Partida, bem como dos objetivos, apresentados inicialmente, procederemos à sistematização das conclusões do estudo.

Quanto à relação entre a aprendizagem progressiva e autónoma, recorrendo a tarefas matemáticas dirigidas, entendemos que, de um modo geral, as tarefas matemáticas foram promotoras de alunos mais autónomos e competentes a Matemática. Podemos constatá-lo, por exemplo, através das aulas observadas nas quais averiguamos a promoção da autonomia e da competência em resultado da comunicação matemática. Complementamos com Menezes (2005, p. 362) quando declara que “uma nova conceção de comunicação Matemática tem implicações na aprendizagem da Matemática e consequências no seu lugar no currículo”. A aplicação, sempre que possível, da Matemática a aspetos da vida real é uma estratégia que também não deve ser esquecida. É impulsora da motivação e da predisposição para a uma aprendizagem eficaz e autónoma da disciplina.

Uma sala de aula que promove alunos mais autónomos e competentes caracteriza-se por conciliar tarefas diversificadas, que desenvolvem o trabalho do aluno e que sejam criteriosas para que a Matemática esteja contextualizada, seja entendível e desafiante, mas também exigente. Por isso, a comunicação é a exteriorização do pensamento de alunos que possuem papéis ativos no processo de ensino-aprendizagem, nomeadamente, na execução de tarefas variadas (Barbot & Camatarri, 2001; Font, 2007).

Desta forma, entendemos que as tarefas matemáticas são o motor impulsionador do PMEB (Ponte et al., 2007), o que está de acordo com o relatório final de ano, relativo ao Plano para a Matemática e ao Programa de Matemática do Ensino Básico de 2009-2010 (Santos, 2010_b).

Neste aspeto, o programa de 2007 (Ponte et al., 2007) refere que o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001) indica que "o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando atividades de investigação, desenvolvendo projetos, participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos" (Ponte et al., 2007, p. 8). O Currículo Nacional de Matemática (Idem, 2001, p.68) por sua vez afirma que "a competência matemática desenvolve-se através de uma experiência matemática rica e diversificada e da reflexão sobre essa experiência".

Uma boa estratégia é o trabalho de pares, em grupo e cooperativo que dão origem a discussões informais que podem ser antecedidas ou seguidas de reflexões individuais e que geram relações dinâmicas na sala de aula e contribuem para a formação de seres autónomos, responsáveis e críticos. Uma outra característica evidenciada foi a motivação e o empenho dos alunos. Através do clima de sala de aula que pudemos observar, que nos foi transmitido ou ainda descrito, em alguns casos, no diário de bordo, constatamos que alunos e professores acentuaram o seu envolvimento, à medida que o projeto foi decorrendo. Como tal, entendemos que a relação entre a motivação e o empenho, proporcionou um ambiente de aprendizagem propício, associado a um processo avaliativo regulador supervisionado. A aprendizagem é um processo de sucessivas construções em que os alunos criam conhecimento através de estruturas já alcançadas e para o qual é necessário não só um envolvimento cognitivo, mas também afetivo (Arends, 2008; Ponte et al., 2007; Valadares & Moreira, 2009).

A análise dos vários instrumentos de trabalho permite-nos concluir que o clima de aprendizagem se caraterizou por ser, essencialmente, autónomo. Dado que os professores aplicadores tiveram o cuidado de não dar dicas ou sugestões, para que não houvesse o risco de baixar o grau de dificuldade das tarefas propostas, concluímos que a produção dos alunos se pautou pela autonomia. Através da assistência de aulas onde foram aplicadas as tarefas e na qualidade de meros observadores, percebemos que com a autonomia surgiu espontaneamente o trabalho colaborativo. Para esta colaboração, torna-se necessário feedback vindo dos discentes e dos docentes.

Essa colaboração, em pares, pequenos grupos ou grupo turma, foi fundamental para o desenvolvimento das competências matemáticas, como, Capacidades Transversais - resolução de problemas, raciocínio ou comunicação matemática. A utilização de linguagem científica correta, clara e adequada à idade dos alunos é uma forma de integrar aqueles com mais dificuldades ou mais tímidos, tornando a Matemática uma ciência viva, em relação com o quotidiano (Duarte, 2000).

Neste contexto, comprova-se que uma gestão curricular, correlacionada com o melhoramento das práticas letivas, contribui para um sucesso educativo. Assim, a avaliação, vista através de uma perspetiva mais alargada e recorrendo a diferentes instrumentos de avaliação, revelou-se uma ferramenta de aprendizagem potenciadora, dada a sua diversificada utilização. A importância que era dada à avaliação, por parte de alunos, professores, encarregados de educação, comunidade educativa de uma forma geral, assentava essencialmente no seu caráter normativo (Couvaneiro & Reis, 2007). O aluno, para além de não receber qualquer feedback sobre os erros cometidos, não tinha qualquer intervenção no processo avaliativo, resumindo-se a ser um participante. Neste estudo, a avaliação assumiu uma função reguladora no processo educativo, através da atuação sobre as dificuldades evidenciadas pelos alunos, em resultado das diversas estratégias de ensino utilizadas pelo professor. Os resultados estão de acordo com os estudos citados na revisão da literatura, efetuada nos primeiros capítulos.

A diversidade de instrumentos utilizada prendeu-se não só com a necessidade de diagnosticar as dificuldades dos alunos, mas também averiguar as aprendizagens já concretizadas. Os professores que trabalharam nestes moldes recorreram a variados registos com o intuito de desenvolver competências. Em consequência, verificou-se quer a melhoria das aprendizagens, quer mais autonomia dos alunos. Exemplo de tudo o que acabamos de afirmar, são os resultados do pequeno inquérito por questionário, aplicado relativamente ao «novo» instrumento de avaliação: o teste em duas fases. Apesar de não haver diferenças de opinião relativamente ao instrumento de avaliação propriamente dito, entre o primeiro e o segundo momento de aplicação, a percentagem de alunos mudou substancialmente relativamente às vantagens do mesmo, quando perceberam que mais do que melhorar os níveis de classificação, lhes permitia melhorar as aprendizagens. O resultado passou de 14% para 57%, ou seja, mais do triplo. O recurso a diferentes processos avaliativos leva-os a uma atitude mais consciente e a serem mais ativos, servindo de guia no processo de ensino.

O nosso projeto aponta, então, para que a prática pedagógica dos docentes se centre na construção de um sistema no qual os alunos sejam curiosos, investiguem, tentem e aprendam. Por isso, surge a necessidade de realizarem pesquisas, por exemplo, através de tarefas. A forma mais fácil de envolver um aluno na aprendizagem é centrar nele todo o processo de ensino-aprendizagem. Freire (2007, p. 79) é pertinente quando afirma que “mudar é difícil, mas é possível”.

Deste modo, parece-nos que o Programa de 2007 (Ponte et al., 2007) apresenta novos desafios, relativamente a programas anteriores, nomeadamente, o centralizar o ensino no aluno, o que contraria as metodologias usuais do nosso sistema educativo permitindo melhorar o desempenho dos alunos a Matemática. Os alunos beneficiam das tarefas, base primordial do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007), utilizando-as numa vertente de autonomia e aprendizagem mais eficaz, tornando-os mais competentes matematicamente. Assim, entendemos que os princípios orientadores do PMEB de 2007 (Ponte et al., 2007) têm potencialidades para alterar conceções e práticas na sala de aula. A nossa opinião prende-se com o facto de termos percebido através da recolha dos vários instrumentos utilizados, das conversas com professores e alunos e dos relatórios analisados, que a sala de aula de matemática estava a mudar. Já não se tratava das tradicionais aulas de matemática, cuja relação preferencial era a de professor-aluno (Vale, 2009).

As práticas letivas tornaram-se mais aliciantes, com recurso a estratégias diversificadas, incentivadoras da aprendizagem e promotoras de autonomias e competências. O entusiasmo pelas diferentes estratégias foi muito mais notório nos contextos que ainda não estavam abrangidos pelo Programa de 2007 (Ponte et al., 2007). Por isso, concluímos que a forma como se comunica na sala de aula de matemática mudou e continua a sofrer alterações. A prova disso está que, nas aulas a que assistimos, os alunos várias vezes referem que terem comunicado e investigado em grupo foi salutar para a sua aprendizagem.

Em concordância com o relatório final de ano sobre o Plano da Matemática e o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2009-2010, no estudo, as práticas e as conceções na sala de aula iniciaram um processo de modificação, em relação a estratégias, atividades e práticas de avaliação. Por isso, é possível fazer uma apreciação positiva do trabalho realizado, quer no ponto de vista do aluno quer do professor. O projeto concorreu, decisivamente, para a melhoria da qualidade das aprendizagens e o desenvolvimento profissional docente.

Limitações da investigação

Não podemos deixar de referir que existiram fatores restritivos ao nosso trabalho. Por exemplo, planear as tarefas e os instrumentos de avaliação a aplicar, adequando-os à planificação anual da área disciplinar de Matemática (que é bastante rígida) em diferentes turmas e escolas, nem sempre permitiu gerir da forma mais conveniente as estratégias de ensino previstas. Tal condição reduziu um pouco o nosso leque de registos recolhidos.

Naturalmente, não nos podemos alhear igualmente de uma das maiores preocupações explicitadas pelos professores, que integraram o estudo: o fator tempo. No que diz respeito à utilização de vários instrumentos avaliativos e respetiva aplicação, os docentes argumentavam que ocupavam muito mais tempo na sua preparação (apesar de os utilizados não terem sido elaborados por eles, tiveram clara noção do tempo despendido). O fator tempo foi e continua a ser o maior entrave à aplicação das tarefas e de diversificados instrumentos avaliativos. Existe um programa para cumprir, os alunos têm de dominar todos os conteúdos, pois no final de cada ciclo prestam provas dos seus conhecimentos. Tempo esse indispensável em termos letivos e não letivos.

A juntar a isto, os professores são confrontados com as comparações dos resultados obtidos pelos seus alunos a nível da avaliação externa e interna. Além disso, o desenvolvimento da autonomia e competências ocorre em diferentes ritmos e formas de aluno para aluno, o que implica, sem dúvida, mais tempo do que dois anos letivos, principalmente porque as alterações ocorrem no meio do percurso escolar.

Outro condicionalismo tem a ver com o facto de não ser fácil desenraizar hábitos de trabalho incutidos em docentes, com muitos anos de carreira. Por insegurança ou receio do desconhecido, as resistências que encontramos para a aplicação do nosso projeto, muitas vezes só foram ultrapassadas através de sucessivas reuniões formais e informais. Como os professores estão expostos durante a sua prática letiva (nem se apercebem que assim é), sentiam-se fragilizados perante a «nova» exposição. Quando solicitamos assistir a uma aula como meras observadoras, tivemos a recusa de um dos docentes, o que comprova os receios de observação de aula fora da situação de estágio ou avaliação de Avaliação de Desempenho Docente (ADD).

Também as últimas ações políticas educativas e a falta de reconhecimento ministerial e da opinião pública de uma maneira geral, tem efeitos indesejáveis, desmotivando muitas vezes os professores, levando-os ao que vulgarmente dizem, «não dar mais de si do que o que é exigido».

Em jeito de conclusão, fica a certeza de que a reflexão, a autonomia e o trabalho colaborativo são essenciais no ensino-aprendizagem de Matemática, quaisquer que sejam os desenvolvimentos futuros, no que concerne ao currículo da disciplina.

Bibliografia

Abrantes, P. (2002). Avaliação das aprendizagens no ensino básico. In P. Abrantes e F. Araújo (Coords.), *Avaliação das aprendizagens* (pp. 9-15). Lisboa: Ministério da Educação, DEB.

Abrantes, P. (2000). A Gestão Flexível do Currículo. Práticas e atitudes em confronto e análise. In *Revista Educação, Sociedade & Culturas,* nº 13, pp. 141-147.

Abrantes, P. (1989). *Um (bom) problema (não) (é) só …* Educação e Matemática, nº 8, pp. 7-10 e 35. Acedido em 19 de setembro de 2010, em http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Abrantes%201989.pdf

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Abrantes, P., Precatado, A., Lopes, A., Baeta, A., Almiro, J., Ponte, J. et al., (1998). *Projecto Matemática 2001. Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *Mat$_{789}$, Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: um guia prático e crítico.* Porto: Edições Asa.

Aharoni, R. (2008). *Aritmética para pais*. Telavive: Gradiva.

Almeida, L. & Freire, T. (2008). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação*. Braga: Psiquilíbrios Edições.

Almiro, J. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologias na aula de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 275-316). Lisboa: APM:

Almiro, J. & Nunes, C. (2009). Os Desafios da Gestão Curricular com o Novo Programa de Matemática. In *Revista Educação e Matemática*, nº 105,pp.67-72.

Alonso, C., Gallego, D. & Honey, P. (2002). *Los estilos de aprendizaje: procedimientos de diagnóstico y mejora*. Bilbao: Ediciones Mensajero.

Alves, M. (2003). *A inserção profissional de diplomados de Ensino Superior numa perspectiva educativa: o caso da Faculdade de Ciências e Tecnologia*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

Amaral, S. & Barros, D. (2007). *Estilos de Aprendizagem no contexto educativo de uso das tecnologias digitais interativas*. Acedido a 11 de março de 2013, em: http://lantec.fae.unicamp.br/lantec/portugues/tvdi_portugues/daniela.pdf

Amiguinho, A. (1992). *Viver a Formação, Construir a Mudança*. Lisboa: Educa.

André, B. (org) (1989). *Autonomie et Enseignent / Apprentissage des Langues Étrangères*. Paris : Les Éditions Didier.

Antão, J. (1995). *Comunicação na Sala de Aula*. (2ª ed.). Porto: Edições Asa.

Arends, R. (2008). *Aprender a Ensinar*. (7ª ed.) Lisboa: Editora McGraw-Hill.

Ausubel, D.P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Bandarra, L. & Alves, M. (2010). A Álgebra no 8º ano: Uma possível abordagem. In Grupo de trabalho de investigação (GTI) *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: APM.

Barbot, M. & Camatarri, G. (2001). *Autonomia e Aprendizagem – A Inovação na Formação*. Paris: Rés.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Berger, G. (1992). A investigação em educação: modelos sócio-epistemológicos e inserção institucional. In *Revista de Psicologia e de Ciências da Educação*, 3/ n. 4, p. 23-36.

Bicudo, M. (1999). *Pesquisa em educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. São Paulo: Editora ENESP.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Direção – Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação.

Bogdan, R., Biklen, S., (1994). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bourdieu, P. & Passeron, J. (1970). *A reprodução. Elementos para uma teoria do sistema de ensino*. Lisboa: Veja.

Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). *Promoting Mathematical Communication in the Classroom: Two perspectives teachers' conceptions and practices*. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 3, pp.125-153.

Brun, J. (1996). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Canário, R. (2005). *O que é a Escola? Um "Olhar" Sociológico*. Porto: Porto Editora.

Cardinet, J. (1993). *Avaliar é medir?* Bruxelas: Edições Asa.

Carmo, H. & Ferreira, M. (2008). *Metodologia da Investigação – Guia para auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Carvalho, R. & Silvestre, A. (2010). Desenvolver a comunicação matemática na sala de aula. In Grupo de trabalho de investigação (GTI) *O professor e o programa de Matemática do ensino*. Lisboa: APM.

Ceia, M., Cebola, G. & Pinheiro, M. (1999). *Educação para todos. Actividades matemáticas no Ensino Básico*. Portalegre: Ministério da Educação.

Charles, R., Lester, F. & O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Virgínia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Cohen, L. & Manion, I. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6ª ed.). Londres: Routledge.

Coimbra, M. (2008). *Processos de (co)construção da competência de comunicação escrita em língua materna: um estudo de caso*. (Tese de Mestrado). Porto: Universidade Portucalense.

Conceição, M. & Fernandes, J. (2009). Implementação de Tarefas Matemáticas na Sala de aula por uma Futura Professora. *Atas do XX SIEM* (pp. 190 – 201) Viana do Castelo.

Confrey, J. (1990). What Constructivism Implies for Teaching. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Ed.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*, pp.107-122. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Coon, D. (2006). Introdução à Psicologia. Uma jornada (2ª ed.). São Paulo: Pioneira Thompson Learning.

Correia, E. (2002). *Tarefas Matemáticas. Novas culturas de sala de aula*. Aveiro: Centro Integrado de Formação de Professores da Universidade de Aveiro.

Costa, C. (2004). *A entrevista*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Coutinho, C.P. (2008, jan/abril). A qualidade da investigação educativa de natureza qualitativa: questões relativas à fidelidade e validade. *Educação Unisinos 12* (1), 5-15.

Coutinho, C.P. (2004, nov.). Quantitativo *versus* qualitativo: questões paradigmáticas na pesquisa em avaliação. *Actas do XVII colóquio Admee-Europa: A avaliação de competências. Reconhecimento e validação das aprendizagens adquiridas pela experiência* (pp.436-448). Braga: Universidade do Minho.

Couvaneiro, C. & Reis, M. (2007). *Avaliar, Reflectir, Melhorar*. Lisboa: Piaget.

Crato, N. (Coord.) (2006). *Desastre no Ensino da Matemática: Como Recuperar o Tempo Perdido*. Lisboa: Gradiva.

Cunha, M. (1998). *Saberes Profissionais de Professores de Matemática: Dilemas e Dificuldades na Realização de Tarefas de Investigação*. (Tese de mestrado). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

Dandolini, G. & Souza, J. (2008). *Uma abordagem para o ensino da lógica matemática através de mapas Conceituais Revista RENOTE*,6,2, (pp.1-10). Acedido em 11 de março de 2013, em http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/14686

DeLange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Ultrecht: OW&OC.

Dias, P. & Santos, L. (2010). *A intencionalidade de uma professora no desenvolvimento da auto-regulação das aprendizagens matemáticas*. Atas do XXI SIEM pp. 109 - 125 Aveiro.

Duarte, J. (2000). A Resolução de Problemas no Ensino da Matemática. In *Educação & Comunicação*, nº 4, pp. 97-100.

Fernandes, D. (2008). *Para uma teoria da avaliação no domínio das aprendizagens. Estudos em Avaliação Educacional*, 19, 41, (pp. 347-372). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Fernandes, D. (2006). Para uma teoria da avaliação formativa. In *Revista Portuguesa de Educação,* 19 (2). CIEd: Universidade do Minho.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens : desafios às teorias, práticas e políticas.* Porto: Texto Editora.

Fernandes, M. (2000). *Mudanças e inovação na pós-modernidade. Perspectivas curriculares*. Porto: Porto Editora.

Ferreira, C. (2007). *A avaliação no quotidiano da sala de aula*. Vila Real: Porto Editora.

Ferreira, I., Gomes, O. & Gonçalves, T. (2011). *Tecnologia da informação e comunicação como instrumento para a disseminação da informação.* XIV Encontro de Biblioteconomia, Documentação, Ciências da Informação e Gestão da Informação. Maranhão: Universidade Federal do Maranhão.

Fidalgo, A. & Ponte, J. (2004). Concepções, práticas e reflexão de futuros professores do 1º ciclo do ensino básico sobre o ensino da Matemática. *Quadrante*, 13 (1).

Figueredo, C. (2003). *O uso de estratégias de comunicação em sala de aula da Língua Inglesa: a interação em foco*. IV Seminário de Línguas Estrangeiras. Goiás: Universidade de Goiás.

Flick, U. (2005). *Métodos Qualitativos Na Investigação Científica*. Lisboa: Monitor.

Font, C. (Org.) (2007). *Estratégias de Ensino e Aprendizagem*. Porto: Edições Asa.

Formosinho, J. (1998). *A administração das escolas no Portugal democrático* (versão eletrónica). Acedido em 8 de março de 2013, em www.cursoverao.pt

Fosnot, C. (2007). *Construtivismo e Educação. Teorias, perspectivas e prática pedagógica* (2ª ed) Lisboa: Instituto Piaget.

Freire, P. (2007). *Pedagogia da Autonomia. Saberes Necessários à Prática Educativa* (35ª ed.) São Paulo: Paz e Terra.

Gardner, H. (2007). *Inteligências Múltiplas. A Teoria na Prática*. Porto Alegre: Artmed.

Goldenberg, E. (1999). Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM.

Grupo de trabalho de investigação (2010). *O professor e o programa de Matemática do ensino*. Lisboa: APM.

Hadji, C. (1994). *A Avaliação, Regras do Jogo. Das intenções aos instrumentos*. Porto: Porto Editora.

Hargreaves, A. (2004). *O ensino na sociedade do conhecimento. A educação na era da insegurança*. Porto: Porto Editora.

Holec, H. (1981). *Autonomy and Foreign Language Learning*. Oxford: Pergmon.

Huete, J. & Bravo, J. (2009). *O Ensino da Matemática. Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. (2ª ed) Madrid: Artmed

Hussén, T. (1990). Research Paradigms in Education. In J. P. Keeves (Ed.), *Educational Research, Methodology and Measurement – An International Handbook* (pp. 17-20). Oxford: Pergamon Press.

Leal, L. (1992). *Avaliação das aprendizagens num contexto de inovação curricular* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Leandro, R. (2006). *Insucesso escolar na Matemática: um (outro) olhar: percepção dos alunos do 6º ano do Ensino Básico sobre o Insucesso*. (Tese de Mestrado). Braga: Universidade do Minho.

Leite, C. (2007). A avaliação e o ensino-aprendizagem em função de competências: Porque? Como?. *Qualiforma* 1.

Leite, C. (2006). Políticas de Currículo em Portugal e (im)possibilidades da escola se assumir como uma instituição curricularmente inteligente. In *Currículo sem Fronteiras*, 6, 2, Braga: Universidade do Minho.

Leite, C. & Fernandes, P. (2002). Potencialidades e limites da gestão local do currículo para (e na) construção de uma escola com sentido para todos", In *Gestão Flexível do Currículo. Reflexões de formadores e investigadores*. Lisboa: DEB.

Leite, C. & Lopes, A. (2008*). Políticas Educativas e Dinâmicas Curriculares em Portugal e no Brasil*. Porto: LivPsic.

Lima, E. (2004). *Matemática e ensino*. Lisboa: Gradiva.

Little, D. (1995). Learning as Dialogue: The Dependence of Learner Autonomy on Teacher Autonomy. System, In *The History of an Idea*, 23, 2. Acedido em 28 de maio de 2010 em http://www.citeulike.org/user/rickl/article/3279091

Lopes, C.A. (2002). *Estratégias e Métodos de Resolução de Problemas em Matemática*. Porto: Edições Asa.

Lopes da Silva, A. & Sá, I. (1993). *Saber Estudar e Estudar para Saber*. Porto: Porto Editora.

Ma, L. (2009). *Saber e ensinar Matemática elementar*. Michigan: Gradiva.

Marques, F. (2011). *O Trabalho entre Professores de Matemática na Gestão do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico*. (Tese de mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Marques, M. & Paulus, P. (2002). *Keeping a diary within K'CIDADE: a Multifaceted Tool*. Acedido em 16 de março de 2010 em

http://sites.google.com/site/pascalpaulus/pedagoog/adultos/diarios

Matlin, M. (2005). *Cognition* (6th ed.).Hoboken: John Wiley & Sons.

Matos, M. (2011). Funções e Tipologias da Avaliação das aprendizagens: Análise no Ensino Secundário. In *Revista Alentejo Educação*, 3.

Matos, J. & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta

Mcintosh, A., Reys, B. & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining Basic number sense. In *For the learning of mathematics*. 12 (3), 2-8.

Melo, E. & Bastos, W. (2012). Avaliação escolar como processo de construção de conhecimento. In *Estudos em Avaliação Educacional*, 23,52.

Mendes, A., Silveira, B., Duarte, I., Almiro, J., Cavaleiro, J., Reis, L. et al. (2002). *Funções no 3º ciclo com tecnologia*. Lisboa: APM.

Menezes J. (1999). Matemática, Linguagem e Comunicação. *Atas do ProfMat99*, pp. 123-145. Portimão: APM.

Menezes, J. L. & Guerreiro, A. (2010). Comunicação matemática: na busca de um entendimento comum. *Atas do XXI* Seminário de Investigação em Educação Matemática da Universidade de Aveiro, pp. 137-143.Aveiro.

Menezes, J., Silva, A., Santos, F. & Trindade, M. (2002). Professores investigam as suas aulas. *Atas do ProfMat* 2002, pp.197-200. Viseu: APM.

Menino, H. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases, o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática – um estudo no 2º ciclo do Ensino Básico*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Monteiro, M. (2007). *Área de Projecto - Guia do Aluno - 12º ano*. Porto: Porto Editora.

Moreira, M. A. & Buchweitz, B. (2000). *Novas Estratégias de Ensino e Aprendizagem. Os Mapas Conceptuais e o Vê Epistemológico*. (2ªed.) Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Morris, C. (2002). *Interactive Whiteboards and their practical use within the primary classroom*. Cardiff School of Education. Acedido em 20 de março de 2010, em http://www.uwic.ac.uk/edict/Documents/KS2%20DS/whiteboard%20research.doc

National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* (2ªEd). Lisboa: APM.

Netto, S. (1987). *Psicologia da aprendizagem e do ensino*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.

Neves, M.A. (1999). *Aprendizagem em Álgebra* (Tese de doutoramento). Porto: Universidade Portucalense Infante D. Henrique.

Neves, M. A., Guerreiro, L. & Neves, A. (2002). *Matemática 7º Ano. Guia do Professor*. Porto: Porto Editora.

Neves, M.A., Silva, A., Raposo, M.J. & Silva, J. (2010). *Matemática 8*. Porto: Porto Editora.

Niza, S. (2012). A ação de diferenciação pedagógica na gestão do currículo. In Nóvoa, A., Marcelino, F. e Ramos do Ó, J. (Org.), *Sérgio Niza, estudos sobre a educação* (pp.454-462). Lisboa: Movimento da Escola Moderna e Editora Tinta-da-china.

Novak, J.D. (2000). *Apreender, Criar e Utilizar o Conhecimento. Mapas Conceptuais como Ferramentas de Facilitação nas Escolas e Empresas*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Nunes, C. (2004). *A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática: um estudo com alunos do 3º ciclo do ensino básico* (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Nunes, C. & Ponte, J. (2010). O professor e o desenvolvimento curricular: Que desafios? Que mudanças? In Grupo de trabalho de investigação (GTI) *O professor e o programa de Matemática do ensino*. Lisboa: APM.

Oliveira, C. (2010). O Quadro Interactivo Multimédia no Ensino/Aprendizagem da Matemática. (Tese de Mestrado). Porto: Universidade Portucalense.

Oliveira, H. M.; Segurado, M. I. & Ponte, J. P. (1996). Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática*. Atas do ProfMat96*, pp. 207-213. Lisboa: APM.

Oliveira, L. (1999). A Autonomia dos Alunos na Aprendizagem da Língua Estrangeira. In *Educação & Comunicação*, 1.

Oliveira – Formosinho, J.(Org.) (2002). *A Supervisão na Formação de Professores II – da Organização à Pessoa*. Porto: Porto Editora.

O'Malley, J. & Chamot, A. (1990). *Learning Strategies in Second Language Acquisition*. London: Macmillan.

Ontaria, A. (1994). *Mapas conceptuais. Uma técnica para aprender*. Porto: Edições Asa

Orlandi, L. (2006). *O questionamento como linha de fuga*. XIX Jornada Reichiana do Sedes. São Paulo: Universidade de São Paulo.

Oxford, R. (1990). *Language Learning Strategies*. Boston: Heinle & Heinle Publishers.

Pacheco, J. (2012). Currículo, Aprendizagem e avaliação. In M. P. Alves & J. C. Morgado (Org.),*Avaliação em educação: políticas, processos e práticas* (pp. 17-41). Santo Tirso: De Facto

Pacheco, J. (2011). Currículo e gestão escolar no contexto das políticas educacionais. In *Revista Brasileira de Política e Administração da Educação*, 27, 3.

Pacheco, J. (2005). *Estudos curriculares: para a compreensão crítica da educação*. Porto: Porto Editora.

Pacheco, J. (1998), A avaliação da aprendizagem. In L. Almeida e J. Tavares (Org.). *Conhecer, aprender e avaliar*. Porto: Porto Editora, pp. 1 11-132.

Pacheco, J. (1996). *Currículo: teoria e praxis*. Porto: Porto Editora.

Pacheco, J. (1995). *O Pensamento e a Acção do Professor*. Porto: Porto Editora.

Pacheco, J. & Leite, C. (2010). *Debater o currículo e os seus Campos, Políticas, Fundamentos e Práticas.* Porto: LivPsic.

Pawlas, G. & Oliva, P. (2007). *Supervision for today's schools*. (8th ed.). Indianapolis: Wiley & Jossey – Bass Education.

Pereira, M. (2001). *Transformação Educativa e Formação Contínua de Professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Perrenoud, P. (1999). Não mexam na minha avaliação! Para uma abordagem sistémica da mudança pedagógica. In A. Estrela e A. Nóvoa (Orgs). *Avaliações em educação: Novas perspectivas*. pp.171-206. Porto: Porto Editora.

Pintassilgo, J., Teixeira, A. & Dias, I. (2008). *A história da disciplina de matemática: abordagens teóricas, fontes e estudos (contributos para um campo de pesquisa)*. Lisboa: APM.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos da avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: uma oportunidade de mudança. In *Revista Educação e Matemática*,105,1-6.

Ponte, J.P. & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In Grupo de trabalho de investigação (GTI). *O professor e o programa de Matemática do ensino*. Lisboa: APM.

Ponte, J., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES do ME.

Ponte, J., Brocado, J. & Oliveira, H. (2006). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E. & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Direção – Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. & Sousa, H. (2010). *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: APM.

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E. & Oliveira, P. A. (2008). *Percursos temáticos de aprendizagem.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção – Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Quintas, J.M. (coord.) (1998). *Discurso Docente e Discente. Fragmentos de Diários*. Porto: Porto Editora.

Reinhart,S. (2000). Never say anything a kid can say. Mathematics teaching in the middle school In *NCTM* 5(8). Acedido em 20 de abril de 2010 em http://www.curriki.org/xwiki/bin/download/Coll_edc1/NeverSayAnythingaKidCanSaybyReinhart/never-say-anything.pdf

Ribeiro, S. & Monteiro, C. (2010). *Matemática para pensar*. Lisboa: Sebenta Editores.

Rodrigues, P. (1999). A avaliação curricular. In A. Estrela e A. Nóvoa (orgs). Avaliações em educação: Novas perspectivas. Porto: Porto Editora.

Roldão, M. C. (2009). *Estratégias de Ensino. O saber e o agir do professor*. Gaia: Fundação Manuel Leão.

Roldão, M. (2006). *Gestão do Currículo e Avaliação de competências*. (4ª ed.). Lisboa: Editorial Presença.

Roldão, M. (1999). *Gestão Curricular – Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Ministério da Educação/ Departamento da Educação Básica.

Roldão, M. (1995). *O Estudo do Meio no 1º Ciclo – Fundamentos e Estratégias.* Lisboa: Texto Editora.

Romanelli, G. (1998). A entrevista antropológica: troca e alteridade. *Revista do Programa de Pós-Graduação em Psicologia da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letrasde Ribeirão Preto*, 119-133.

Rosales, C. (1992). *Avaliar é reflectir sobre o ensino*. Porto: Edições Asa.

Rosário, P. (1997). Facilitar a Aprendizagem através do Ensinar a Pensar. In Revista de Psicopedagogia. In *Educação e Cultura*, 1, 2.

Rossetto, M. (2005). *A construção da Autonomia na sala de aula: na perspectiva do professor*. (Pós-Graduação). Rio Grande do Sul: Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Sá, C.A., Sá, A. & Zenhas, M. (2004). *Como abordar… a comunicação escrita na aula de Matemática.* Lisboa: Areal Editores.

Sant'Ana, C. (2008). A Matemática no projeto ciência na Escola: a busca da Autonomia dos alunos. (Tese de Doutoramento). Campinas: Universidade Estadual de Campinas.

Santos, L. (Org.) (2010_a). Avaliar *para aprender. Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Lisboa: Porto Editora.

Santos, L. (Coord) (2010_b). *Plano da Matemática e Novo Programa de Matemática de Ensino Básico. Relatório final de ano de 2009-2010*. Lisboa: DGIDC.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Eds), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios*. Actas do EIEM 2007, (pp.11-35). SEM-SPCE.

Santos, L. (2005). *A Avaliação das Aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso*. Acedido em 28 de abril de 2010, em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/apa.pdf

Santos, L. (2003). Avaliar Competências: Uma Tarefa Impossível? In *Educação e Matemática*, 74.

Santos, L. & Menezes, L. (2008). Introdução. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Eds), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios*. Atas do EIEM 2007, (pp.7-10). SEM-SPCE.

Seabra, O. & Martinho, M. (2009). Novos Programas de Matemática do Ensino Básico. Um grupo de Professores em formação. *Atas do XX SIEM* (pp. 143 – 154) Viana do Castelo.

Silver, H., Strong, R. & Perini, M. (2010). *Inteligências múltiplas e estilos de aprendizagem*. Porto: Porto Editora.

Solé, I. & Coll, C. (2001). Os professores e a concepção construtivista. In C. Coll et al., O Construtivismo na Sala de Aula – Novas Perspectivas para a Acção Pedagógica (pp.8-27). Porto: Edições Asa.

Souza, E. & Diniz, M. (1994). *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo.

Stake, R. (2009). *A arte da investigação com Estudos de Caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. & Smith, M. (2009). *Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão*. In Revista Educação e Matemática, nº 105,pp.22-28.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. In *Mathematical Thinking and Learning*, 10. Acedido em 20 de setembro de 2010, em http://gse.berkeley.edu/faculty/RAEngle/SteinEngleSmithHughes(inpress).pdf

Stein, M. & Smith, M.(1998). *Mathematical tasks as a Framework for reflection: From research to practice*. Mathematics teaching in the middle school, 3(4), pp. 268-275. Acedido em 9 de setembro de 2010, em http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/search/detailmini.jsp?_nfpb=true&_&ERICExtSearch_SearchValue_0=EJ558740&ERICExtSearch_SearchType_0=no&accno=EJ558740

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. & Nápoles, S. (1997). *Funções: Matemática – 10º ano de escolaridade*. Lisboa: DES do ME.

Teodoro, A. (2003).*Globalização e Educação*. Porto: Afrontamento.

Tezani, T. C. (2004) *O Jogo e os processos de aprendizagem e desenvolvimento: aspectos cognitivos e afectivos*. Acedido em 2 de setembro de 2010 em http://www.psicopedagogia.com.br/artigos/artigo.asp? EntrID=621

Tuckman, B. (2005). *Manual de Investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Valadares, J. & Moreira, M. (2009). *A Teoria da Aprendizagem significativa. Sua fundamentação e implementação*. Coimbra: Almedina.

Vale, M. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7º ano do ensino básico.* (Tese de mestrado) Lisboa: Universidade de Lisboa.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. *Atas do Seminário de Investigação Matemática*. (pp.35-63). Viana do Castelo: APM.

Vale, I. ,& Pimentel, T. (Coord.) (2011). *Padrões em Matemática*. Lisboa: Texto Editores.

Valente, W. (2004). *Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática.* Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Van de Walle, J. (2007). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. (6th ed.). Boston: Pearson Education.

Vayer, P. (1993). *Princípio de Autonomia e Educação*. Paris: Dinalivro.

Wenden, A. (1998). *Learner Strategies for Learner Autonomy*. Great Britain: Prentice Hall.

Yin, R. (2005). *Estudo de Caso. Planejamento e Métodos*. Porto Alegre: Bookman.

Documentos consultados

APM (1991). *Avaliação*. Acedido em 16 de abril de 2013 em: http://www.apm.pt/portal/index.php?rid=23944&id=19480

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: Departamento de Educação Básica. Ministério da Educação.

Decreto-Lei nº 41/2012 de 21 de fevereiro. Acedido em 11 de março de 2013, em http://www.spn.pt/Download/SPN/SM_Doc/Mid_115/Doc_3062/Anexos/dec_lei_41_2012_estatuto.pdf

Decreto-Lei nº 18/2011 de 2 de Fevereiro. Acedido em 15 de março de 2010 em http://dre.pt/pdf1sdip/2011/02/02300/0065900669.pdf

Decreto-Lei nº 6/2001 de 18 de Janeiro. Acedido em 15 de março de 2010 em http://dre.pt/pdf1sdip/2001/01/015A00/02580265.pdf

Despacho n.º 5306/2012, de 18 de abril

Despacho n.º 17169/2011, de 23 de dezembro

Despacho nº 9590/99, 2ª série. Acedido em 10 de março de 2013, em http://www.eps-pedro-santarem.rcts.pt/ESC/legisl/despacho9590_99-gstflexcurric.pdf

Despacho nº 484/97. Acedido em 10 de março de 2013, em http://www.observatoriople.gov.pt/np4/5.html

Despacho Normativo nº 30/2001 de 19 de julho. Acedido em 25 de abril de 2010 em http://www.spn.pt/?aba=27&cat=43&doc=419&mid=115

DGE (2013). *Metas Curriculares*. Acedido em 22 de abril de 2013 em: http://www.dge.mec.pt/index.php?s=noticias&noticia=396

DGEBS (1991). *Organização Curricular e programas (Volume I). Ensino Básico 3º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

DGEBS (1991). *Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem: Programa de Matemática (Volume II). Ensino Básico 3º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

EBLP (2011). Acompanhamento do PMEB. Leça da Palmeira: Autor.

EBLP (2011). Relatório Intermédio dos Coordenadores do PMEB. Leça da Palmeira: Autor.

GAVE (2013). *Metas curriculares*. Acedido em 22 de abril de 2013 em: http://www.gave.min-edu.pt/np3/462.html

GAVE (2011). *Critérios de classificação*. Lisboa: Ministério da Educação.

GAVE (2010, 2009, 2005). *Projecto Testes Intermédios*. Acedido em 25 de abril de 2010 em: http://www.gave.min-edu.pt/np3/9.html

LBSE (1986). Lei de Bases do Sistema Educativo. Lisboa: Ministério da Educação. Acedido em 22 de março de 2013 em http://intranet.uminho.pt/Arquivo/Legislacao/AutonomiaUniversidades/L46-86.pdf

ME (2009, 2006). *Plano de acção para a Matemática.* Ministério da Educação.

ME (2008). Brochuras de apoio ao PMEB. Lisboa: Ministério da Educação.

Moodle da CRIE (Computadores, Rede e Internet na Escola – Plataforma de apoio às acções de formação em TIC do Portal da Educação. Acedido em 20 de abril de 2010, em http://moodle.crie.min-edu.pt/course/category.php?id=78

PISA, (2009, 2006) Acedido em 9 de setembro de 2010, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=33&fileName=relatoio_nacional_pisa_2006.pdf

Anexos

Anexo I – Tópicos e objetivos específicos do 7º ano

		Objetivos específicos
Tópicos	**Números inteiros** • Multiplicação e divisão; propriedades • Raiz quadrada e raiz cúbica • Potências de base inteira e expoente natural	• Multiplicar e dividir números inteiros. • Calcular o valor de potências em que a base (diferente de zero) é um número inteiro e o expoente é um número natural. • Induzir a regra de potência da potência (base e expoente naturais) e aplicá-la no cálculo. • Calcular a raiz quadrada e a raiz cúbica de quadrados e cubos perfeitos. • Relacionar potências e raízes.
	Sequências e regularidades • Termo geral de uma sequência numérica • Representação	• Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados. • Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral. • Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra.
	Funções • Conceito de função e de gráfico de uma função (domínios racionais não negativos) • Proporcionalidade direta como função	• Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações. • Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano. • Analisar uma função a partir das suas representações. • Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante. • Analisar situações de proporcionalidade direta como funções do tipo $y = kx$ ($k \neq 0$). • Representar algebricamente situações de proporcionalidade direta. • Resolver e formular problemas e modelar situações utilizando funções.
	Triângulos e quadriláteros • Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo • Congruência de triângulos • Propriedades, classificação e construção de quadriláteros	• Deduzir o valor da soma dos ângulos internos e externos de um triângulo. • Compreender critérios de congruência de triângulos e usá-los na construção de triângulos e na resolução de problemas. • Classificar quadriláteros, construí-los a partir de condições dadas e investigar as suas propriedades. • Compreender e usar a fórmula da área de um paralelogramo e investigar as propriedades deste quadrilátero.
	Tratamento de dados • Organização, análise e interpretação de dados – histograma • Medidas de localização e dispersão • Discussão de resultados	• Construir, analisar e interpretar representações dos dados (incluindo o histograma) e tirar conclusões. • Compreender e determinar a mediana, os quartis e a amplitude interquartis de um conjunto de dados e utilizar estas estatísticas na sua interpretação. • Escolher as medidas de localização mais adequadas para resumir a informação contida nos dados. • Comparar as distribuições de vários conjuntos de dados e tirar conclusões. • Responder às questões do estudo e conjeturar se as conclusões válidas para a amostra serão válidas para a população.
	Equações • Equações do 1° grau a uma incógnita (com parênteses, mas sem denominadores)	• Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes. • Resolver equações do 1° grau a uma incógnita (com parênteses, mas sem denominadores) utilizando as regras de resolução.
	Semelhança • Noção de semelhança • Ampliação e redução de um polígono • Polígonos semelhantes • Semelhança de triângulos	• Compreender a noção de semelhança. • Ampliar e reduzir um polígono, dada a razão de semelhança. • Identificar e construir polígonos semelhantes. • Calcular distâncias reais a partir de uma representação. • Compreender critérios de semelhança de triângulos e usá-los na resolução de problemas.

Fonte: Programa de Matemática (Ponte et al., 2007).

Anexo II – Tópicos e objetivos específicos do 8º ano

		Objetivos específicos
Tópicos	**Isometrias** • Translação associada a um vetor • Propriedades das isometrias	• Compreender as noções de vetor e de translação e identificar e efetuar translações. • Identificar e utilizar as propriedades de invariância das translações. • Compor translações e relacionar a composição de translações com a adição de vetores. • Reconhecer as propriedades comuns das isometrias. • Reconhecer que a translação é a única isometria que conserva direções.
	Números racionais • Representação, comparação e ordenação • Operações, propriedades e regras operatórias • Potências de base racional e expoente inteiro	• Representar números racionais na reta numérica e por dízimas infinitas periódicas. • Comparar e ordenar números racionais representados nas forma decimal e fracionária. • Representar e comparar números racionais positivos em notação científica. • Conhecer as propriedades e as regras das operações em $\mathbb{Q}$ e usá-las no cálculo. • Efetuar operações com potências de base racional (diferente de zero) e expoente inteiro. • Calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais.
	Planeamento estatístico • Especificação do problema • Recolha de dados • População e amostra	• Formular questões e planear adequadamente a recolha de dados tendo em vista o estudo a realizar. • Identificar e minimizar possíveis fontes de enviesamento na recolha dos dados. •Distinguir entre população e amostra e ponderar elementos que podem afetar a representatividade de uma amostra em relação à respetiva população.
	Funções • Funções linear e afim	• Representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim. • Relacionar as funções linear e afim. • Relacionar a função linear com a proporcionalidade direta. • Resolver e formular problemas e modelar situações utilizando funções.
	Equações • Equações do 1° grau a uma incógnita (com denominadores) • Sistemas de duas equações do 1° grau a duas incógnitas	• Resolver equações do 1.° grau utilizando as regras de resolução. • Resolver sistemas de equações pelo método de substituição. • Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações. • Resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações.
	Sólidos geométricos • Área da superfície e volume • Critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos e entre retas e planos	• Compreender e determinar a área da superfície e o volume de prismas retos, pirâmides regulares, cones e esferas. • Utilizar critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos e entre retas e planos. • Resolver problemas envolvendo polígonos e sólidos.
	Sequências e regularidades • Expressões algébricas	• Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra. • Simplificar expressões algébricas
	Equações • Equações literais • Operações com polinómios • Equações do 2° grau (incompletas) a uma incógnita	• Resolver equações literais em ordem a uma das letras. • Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação. • Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios. • Resolver equações do 2° grau (incompletas) a uma incógnita.
	Teorema de Pitágoras • Demonstração e utilização	• Compor e decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros. • Decompor um triângulo por uma mediana e um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa. • Demonstrar o Teorema de Pitágoras. • Resolver problemas no plano e no espaço aplicando o Teorema de Pitágoras.

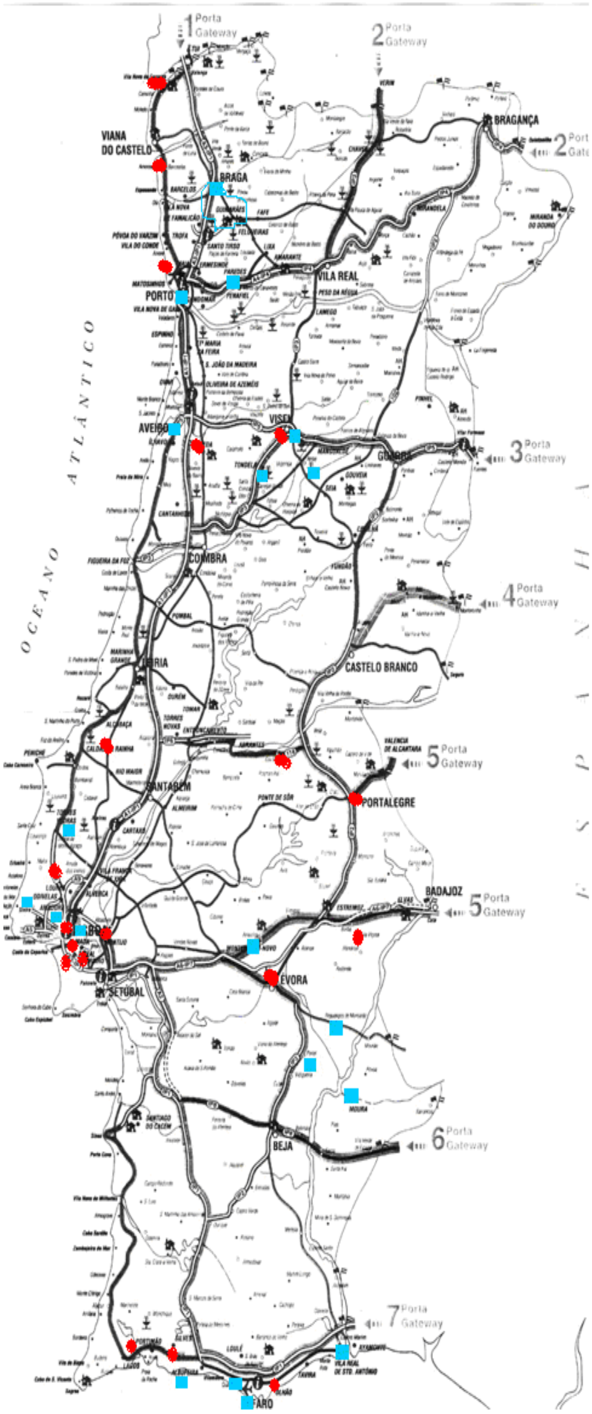
Fonte: Programa de Matemática (Ponte et al., 2007).

Anexo III – Tópicos e objetivos específicos do 9º ano

		Objetivos específicos
Tópicos	**Probabilidade** • Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória • Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento	• Identificar e dar exemplos de fenómenos aleatórios e deterministas, usando o vocabulário adequado. • Identificar e determinar todos os resultados possíveis quando se realiza determinada experiência aleatória. • Compreender a noção de probabilidade de um acontecimento e que a sua medida se situa entre 0 e 1. • Calcular a probabilidade de um acontecimento pela regra de Laplace. • Compreender e usar a frequência relativa para estimar a probabilidade. • Identificar acontecimentos complementares e compreender que a soma das suas probabilidades é 1. • Identificar acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos e compreender que a probabilidade da sua união é igual à soma das suas probabilidades. • Resolver e formular problemas envolvendo a noção de probabilidade.
	Funções • Proporcionalidade inversa como função • Funções do tipo $y = ax^2$	• Analisar situações de proporcionalidade inversa como funções do tipo $y = k/x$ ($k \neq 0$). • Representar algebricamente situações de proporcionalidade inversa. • Representar graficamente funções do tipo $y = ax^2$. • Relacionar as representações algébrica e gráfica das funções estudadas. • Resolver e formular problemas e modelar situações utilizando funções.
	Equações • Equações do 2º grau (completas) a uma incógnita	• Resolver equações do 2° grau a uma incógnita.
	Circunferência • Ângulo ao centro, ângulo inscrito e ângulo excêntrico • Lugares geométricos • Circunferência inscrita e circunferência circunscrita a um triângulo • Polígono regular inscrito numa circunferência	• Relacionar a amplitude de um ângulo ao centro com a do arco correspondente e determinar a área de um setor circular. • Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito e de um ângulo excêntrico com a dos arcos associados. • Identificar e construir circunferência, círculo, bissetriz e mediatriz. • Identificar superfície esférica e plano mediador. • Construir a circunferência inscrita e a circunferência circunscrita a um triângulo dado. • Inscrever um polígono regular numa circunferência (conhecidos o centro da circunferência e um vértice do polígono). • Determinar a amplitude de um ângulo interno e de um ângulo externo de um polígono regular. • Estabelecer relações entre ângulos, arcos, cordas e tangentes. • Resolver problemas envolvendo a circunferência e outros lugares geométricos.
	Números reais • Noção de número real e reta real • Relações < e > em *IR* • Intervalos	• Identificar um número real (racional e irracional) como um número cuja representação decimal é uma dízima finita ou infinita. • Representar números reais na reta real, com aproximações apropriadas aos contextos. • Reconhecer que as propriedades das operações em $\mathbb{Q}$ se mantêm em *IR* e aplicá-las na simplificação de expressões. • Comparar e ordenar números reais. • Compreender e utilizar a transitividade das relações < e > em *IR*. • Determinar valores aproximados por defeito (excesso) da soma e do produto de números reais, conhecidos valores aproximados por defeito· (excesso) das parcelas e dos fatores. • Representar e interpretar intervalos de números reais, bem como a sua interseção e reunião, simbólica e graficamente. • Resolver problemas e investigar regularidades envolvendo números racionais e reais.
	Inequações • Inequações do 1° grau a uma incógnita	• Compreender as noções de inequação e de solução de uma inequação. • Resolver inequações do 1° grau utilizando as regras de resolução. • Resolver e formular problemas envolvendo inequações.
	Trigonometria no triângulo retângulo • Razões trigonométricas de ângulos agudos • Relações entre razões trigonométricas	• Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo. • Estabelecer relações trigonométricas básicas entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo. • Resolver problemas utilizando razões trigonométricas em contextos variados.

Fonte: Programa de Matemática (Ponte et al., 2007).

Anexo IV – Distribuição geográfica das turmas-piloto, no ano letivo de 2008-2009



DREN

1.º ano: EB1/ JI Praia de Angeiras
1.º ano: EB1 de Igreja (Alvarães)
3.º ano: EB1/ JI Praia de Angeiras
3.º ano: EB12 de Vila Praia de Âncora
5.º ano: EB23 de Paredes
5.º ano: EB23 de Lamações
7.º ano: ES3 Filipa de Vilhena (2 turmas)

DREC

1.º ano: EB1 Torredeita
1.º ano: EBI Santo Onofre
3.º ano: EB1 Águeda
5.º ano: EB 23 Dr. Fortunato de Almeida
5.º ano: EB23 de Tondela
7.º ano: ES3 de José Estêvão
7.º ano: ES Tondela

DRELVT

1.º ano: EB1 Malveira
1.º ano: EB1/JI Quinta de Santo António
3.º ano: EB1/JI Vale de Flores
3.º ano: EBI da Charneca da Caparica
3.º ano: EB1 Luísa Ducla Soares
3.º ano: EB1 n.º 1 de Sarilhos Grandes
5.º ano: EBI Padre Vítor Melícias
5.º ano: EB23 Dr. Rui Grácio
7.º ano: ES3 Passos Manuel
7.º ano: ES3 D. João V

DREALENT

1.º ano: EB1 Monte Carvalho
1.º ano: EB1 Castelo
3.º ano: EBI/JI Gavião
3.º ano: EB1 do Rossio de São Brás
5.º ano: EB23 Moura
5.º ano: EB23 Portel
7.º ano: ES Conde de Monsaraz
7.º ano: ES3 Montemor-o-Novo

DREALG

1.º ano: EB1/JI Lagoa
1.º ano: EB1 Mexilhoeira Grande
3.º ano: EB1 Cavalinha
5.º ano: EB23 Montenegro
5.º ano: EB23 Dr. Joaquim Rocha Peixoto Magalhães
7.º ano: EB23 Dr. Francisco Cabrita
7.º ano: ES de Vila Real de Santo António

Fonte: Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC).

Apêndices

Apêndice I – Guião por entrevista estruturada de professores de Matemática participantes no projeto

1. Identificação:
   1.1 Idade
   1.2 Sexo
   1.3 Habilitações literárias
   1.4 Situação profissional

2. A experimentação/implementação do PMEB
   2.1 Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?
   2.2 Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?
   2.3 Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?
   2.4 Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.
   2.5 Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.

Apêndice II – Transcrição das entrevistas estruturadas dos professores de Matemática participantes no projeto

Professor 1

1. **Identificação:**
   1.1 Idade 41
   1.2 Sexo Feminino
   1.3 Habilitações literárias Licenciatura em Matemática
   1.4 Situação profissional Quadro de escola

2. **A experimentação/implementação do PMEB**
   2.1 Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?
   "Razoavelmente, pois tivemos dificuldades em selecionar as tarefas. O que nos valeu foi o trabalho colaborativo, se não era muito complicado, até porque não tivemos formação".

   2.2 Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?
   "Sem dúvida que foram as tarefas em que os alunos tinham de investigar e resolvidas em grupo, claro".

   2.3 Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?
   "Não muito bem, perdíamos muito tempo na seleção das tarefas quando estávamos a fazer a planificação das aulas, e depois os alunos perdiam muito tempo a resolvê-las... E, às vezes, quando as conseguiam resolver, por vezes, gastavam mais tempo do que o previsto".

   2.4 Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.

"O manual…foi um problema pois não era de acordo com o programa e os programas são muito grandes. Outra foi trabalharmos nas aulas de forma diferente, mais aulas em grupo… os alunos em vez de trabalharem, conversam".

2.5 Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.

"A utilização das TIC. Eles gostam das aulas com computador, com o interativo…nós é que nem sempre temos tempo ou habilidade!"

Professor 2

1. **Identificação:**
   - **1.1 Idade** 44
   - **1.2 Sexo** Masculino
   - **1.3 Habilitações literárias** Licenciatura em Matemática
   - **1.4 Situação profissional** Quadro de escola

2. **A experimentação/implementação do PMEB**

2.1 Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?

"Muito bem, gostei muito das novas metodologias e das estratégias…dão mais ritmo às aulas. Os alunos ficam mais atentos e empenham-se mais".

2.2 Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?

"As tarefas com recurso às TIC. Eles gostam muito de computadores, dos Applets, do interativo, de pesquisarem na net,…"

2.3 Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?

"No início não foi muito bem, estávamos um bocado perdidos com a seleção das tarefas. Mas depois com a formação e troca de materiais com outros colegas, as coisas melhoraram bastante. Fazíamos muitas trocas por mail e era assim que resolvíamos mais de metade dos problemas".

2.4 Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.

"Nem sempre o tempo é o suficiente para o trabalho a desenvolver com os alunos, sobretudo nas tarefas matemáticas. Na verdade….sim, na verdade… às vezes o tempo não chega… é uma corrida para acabar as tarefas e assim, bem, não é possível aprofundar e fazer um ensino-aprendizagem como deve ser."

2.5 Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.

"Acho que tarefas que exijam uso do computador, mais variedade, coisas diferentes".

Professor 3

1. **Identificação:**
   - **1.1 Idade** 35
   - **1.2 Sexo** Feminino
   - **1.3 Habilitações literárias** Licenciatura em Matemática
   - **1.4 Situação profissional** Quadro de zona

2. **A experimentação/implementação do PMEB**

2.1 **Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?**

"Nada bem. Ninguém entendia o que era para fazer. Quando lá percebíamos o que era para fazer, nem sempre sabíamos como fazer. Não deram formação aos professores, só à minha Coordenadora, por isso…"

2.2 **Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?**

"As aulas em grupo ou quando tinham de trabalharem em pares, parecia que a Matemática até lhes saía melhor…"

2.3 **Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?**

"O tempo não chega para nada. O programa é extenso e não é fácil cumprir as planificações do período...nem das aulas. Muitas vezes não consigo acabar o que tinha pensado para uma aula…por isso, acho que correu mais ou menos".

2.4 **Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.**

"Às vezes fico muito confusa, nem sei como decidir, se é melhor fazer esta tarefa ou aquela. Precisamos de mais formação…não teórica…mas prática… mas é que precisamos mesmo, especificamente sobre estratégias, instrumentos e modelos de ensino. E o pior é que nem conheço realmente os alunos e as turmas são muito heterogéneas. Ainda se fossem menos!"

2.5 **Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.**

Professor 4

1. **Identificação:**

1.1 **Idade** 42

1.2 **Sexo** Feminino

1.3 **Habilitações literárias** Licenciatura em Matemática

1.4 **Situação profissional** Quadro de escola

2. **A experimentação/implementação do PMEB**

2.1 **Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?**

"Às vezes bem, outras vezes mal, as reuniões muitas vezes eram para esquecer, noutras trabalhava-se muito bem. O problema disto foi a falta de formação, implementaram e não nos deram formação!"

2.2 **Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?**

"O diário de bordo. Eles levaram aquilo a sério…às vezes até eram eles que lembravam que era preciso preencher, mas nem sempre conseguíamos, tínhamos mais coisas da aula".

2.3 **Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?**

"Às vezes bem, outras vezes mal, dependia das turmas, da hora da aula….eu tinha uma turma que trabalhava muito bem, era muito empenhada, mas tinha outra … nem podia aplicar tarefas, se não, lá se ia a aula!"

2.4 **Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.**

"O tamanho do programa, é muito extenso e nós temos sempre aquele peso dos exames e dos testes intermédios e depois temos de dar toda a matéria, não pode ficar nada por dar. E as turmas são muito grandes, assim não é possível aplicar mais estratégias diferenciadas ou atividades. Sobretudo, dificulta o trabalho colaborativo dos alunos, que exige uma orientação progressiva, sem pressas."

2.5 Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.

" Turmas mais pequenas, sem dúvida alguma!"

Professor 5

1. **Identificação:**
   1.1 Idade 40
   1.2 Sexo Masculino
   1.3 Habilitações literárias Licenciatura em Matemática
   1.4 Situação profissional Quadro de escola

2. **A experimentação/implementação do PMEB**

2.1 Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?

"Foi interessante trabalhar desta forma, com a aplicação das tarefas na sala de aula. Foi difícil, mas as tarefas realmente têm potencialidades!"

2.2 Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?

"As tarefas. São um estar diferente na sala de aula, nas aulas já não é só exercícios, são atividades desafiadoras que nós colocamos aos miúdos".

2.3 Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?

"Às vezes idealizávamos uma tarefa e corria bem, mas às vezes…depende das turmas, dos professores, da hora da aula…tem muitos fatores a intervir. Basta introduzirmos na aula de forma diferente e já mudava tudo"

2.4 Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.

"Na ficha de autoavaliação, cerca de 50% dos alunos referiram que as aprendizagens não realizadas anteriormente interferem com a assimilação de conhecimentos novos. Acho que este é um dos grandes problemas a Matemática!"."

2.5 Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.

"Os professores têm de trabalhar em equipa para ultrapassar as dificuldades."

Professor 6

1. **Identificação:**
   1.1 Idade 45
   1.2 Sexo Feminino
   1.3 Habilitações literárias Licenciatura em Matemática
   1.4 Situação profissional Quadro de escola

2. **A experimentação/implementação do PMEB**

2.1 Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?

“Mais ou menos. Selecionar as tarefas não era uma tarefa que reunisse consenso entre nós e depois também se discutia muito a questão do tempo que se perdia na sua aplicação.”

2.2 Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?

“Eu acho que o mais importante é as tarefas Matemáticas… Elas são essenciais…. E para isso é preciso que os professores trabalhem juntos e planifiquem estratégias motivadoras e diferenciadas. Essa é a grande inovação do plano da Matemática”.

2.3 Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?

“Nem sempre corria como queríamos, as turmas são muito grandes”.

2.4 Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.

“As tarefas não se coadunam com turmas grandes…o trabalho de grupo com muitos alunos é complicado.”

2.5 Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.

“Menos alunos por turma”

Professor 7

1. **Identificação:**
   1.1 Idade 45
   1.2 Sexo Feminino
   1.3 Habilitações literárias Licenciatura em Matemática
   1.4 Situação profissional Quadro de escola

2. **A experimentação/implementação do PMEB**

2.1 Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?

“Assim, assim … tínhamos problemas em equilibrar o novo programa com o manual.”

2.2 Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?

“Os alunos achavam as tarefas engraçadas.”

2.3 Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?

“Na maioria das vezes, correu bem, porque os alunos acharam interessante trabalhar de forma diferente, irem à descoberta”

2.4 Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.

“ O desfasamento dos manuais obriga a mais planificação do professor. Muitos alunos queixam-se que não podem estudar pelo manual”

2.5 Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.

“ Turmas mais pequenas sem dúvida alguma!”

Professor 8

1. **Identificação:**
   1.1 Idade 37

1.2 **Sexo** Feminino
1.3 **Habilitações literárias** Licenciatura em Matemática
1.4 **Situação profissional** Quadro de zona

2. A experimentação/implementação do PMEB

2.1 Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?

"A implementação foi um processo atribulado, pois a formação chegou tarde, mas quando começamos a trabalhar todos juntos na implementação, as coisas começaram a correr melhor. A minha coordenadora era uma pessoa muito disponível pois percebeu que nos tinha de ajudar porque só ela tinha tido formação para a implementação!"

2.2 Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?

"As aulas em grupo. Mas tive de fazer acordo com eles para se portarem bem, pois eles achavam que as aulas em grupo eram a continuação do recreio".

2.3 Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?

"Depois do acordo, correram bem. Mas eu ficava muito preocupada com a planificação porque eles eram muito lentos a fazer as coisas e estavam sempre à espera que eu os ajudasse."

2.4 Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.

"Para mim foi a falta de formação e a extensão do programa. Era muito difícil cumprir o programa. Fazíamos uma planificação, íamos dar as aulas e tudo decorria a um ritmo muito mais lento"

2.5 Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.

Professor 9

1. **Identificação:**

1.1 **Idade** 45
1.2 **Sexo** Feminino
1.3 **Habilitações literárias** Licenciatura em Matemática
1.4 **Situação profissional** Quadro de escola

2. A experimentação/implementação do PMEB

2.1 Como correu, na sua opinião, a concretização do projeto PMEB, no ano letivo anterior, na sua escola?

"Não muito bem. As aulas eram menos rentáveis. Não se conseguiu cumprir o programa"

2.2 Qual foi, no seu entender, a estratégia que mais motivou os alunos para a Matemática?

"As tarefas investigativas. Assim, eles fazem Matemática sozinhos".

2.3 Como decorreu a aplicação das tarefas matemáticas, no âmbito do projeto?

"Teve momentos…os alunos não têm responsabilidade para construírem o seu conhecimento, são muitos novos."

2.4 Quais foram os constrangimentos ao projeto? Justifique.

“O trabalho colaborativo deveria ser um hábito adquirido pelos alunos e ainda pelos professores. Infelizmente, os alunos não trabalham o suficiente em grupo na aula. Ainda no outro dia, quando descobri, estava um aluno a fazer sozinho a tarefa, enquanto os outros dois estavam a ouvir música. O que significa que o professor tem que estar mesmo muito atento, até porque as turmas são grandes. “

2.5 Refira algumas sugestões que possam melhorar o ensino-aprendizagem a Matemática.

“Ter turmas com menos alunos, para poder dar mais atenção a cada um e a todos.”